



پیشرفته
فرمول
لیست

ریاضی دهم

مؤلفان: حسین اسفینی، یوسف داستان

۱۸۰۰

پرسش تالیفی
و امتحانی چند قسمتی

۲۰۰

صفحه درسامه
تیپ بندی شده

۲۰۰

تیپ آموزشی امتحانی

۵۰۰

مثال آموزشی با حل کامل

۳۵۰

تمرین با پاسخ نهایی

۱۰۰۰

پرسش با پاسخ تشریحی



9 786220 308867

تهران، میدان انقلاب

نیش بازارچه کتاب

www.gajmarket.com

با توجه به تأثیر مستقیم نمره امتحان نهایی در تعیین رتبه کنکور، جای خالی یک کتاب جامع و کامل در بازار حس می‌شد. بنابراین تصمیم گرفتیم، کتابی کامل با ویژگی‌های منحصر به فرد و کاربردی تألیف کنیم. لازم است به برخی ویژگی‌های خاص این کتاب اشاره کنیم:

درسنامه‌ها

درسنامه ۱		
۱	تیپ ۱	۲ روش حل تیپ ۱
۳	مثال	۴ تمرین پاسخ نهایی
:		

هر درس را به چند درسنامه با ساختار آموزش محور به صورت مقابل تقسیم کرده‌ایم که در ادامه تمام قسمت‌های آن را مفصل توضیح می‌دهیم:

۲ روش حل

در این قسمت، طریقه پاسخ‌دهی به تیپ‌های مطرح شده را با توجه به متن کتاب درسی به ساده‌ترین شکل ممکن بیان کرده‌ایم تا با صرف کمترین زمان، بیشترین بازدهی را داشته باشید.

۱ تیپ

در این قسمت انواع مختلف سؤالاتی که از هر درسنامه، قابلیت طرح در امتحانات نهایی را دارند، به صورت تیپ‌های مختلف زیر آن آورده شده است. این مدل تیپ‌بندی میکرو طبقه‌بندی شده هر درسنامه که هیچ جایی نمونه آن را نخواهید دید، باعث می‌شود ذهن دانش‌آموز در هر درس، کاملاً منظم و ساختارمند شود و سر جلسه امتحان، بازیابی اطلاعات برایش خیلی راحت شود و بتواند به راحتی به سؤالات پاسخ دهد.

۴ تمرین

یکی از ویژگی‌های برجسته و اساسی این کتاب، ارائه تمرینات کارشناسی شده در جلوی هر مثال است که اکثراً فضای خالی برای نوشتن پاسخ زیر آن‌ها وجود دارد که حس خوب حل کردن تمرین زیر آن و در خود کتاب به شما منتقل شود. هدفمان از ارائه این تمرینات را در زیر بیان کرده‌ایم:

(آ) سنجش یادگیری دانش‌آموز: برای آنکه مطمئن شویم دانش‌آموز مثال هر تیپ را به خوبی یاد گرفته است، عمداً تمرین‌هایی کاملاً مشابه آن مثال‌ها آورده‌ایم.

(ب) پاسخ نهایی هر تمرین را زیر آن آورده‌ایم تا دانش‌آموز از صحت پاسخ خود مطمئن شود.

(پ) کمک به دبیران جهت ارزیابی دانش‌آموزان بعد از تدریس مباحث کتاب

۳ مثال

باید قبول کرد هیچ توضیحی بدون حل یک مثال مناسب قابل فهم و درک نخواهد بود، لذا در این قسمت سعی کرده‌ایم بهترین مثال(های) ممکن از آن تیپ را ارائه دهیم که تاکنون در امتحانات مدارس شهرهای مختلف آمده است. قابل ذکر است مثال‌های آورده شده، نتیجه بررسی تعداد بسیار زیادی از سؤالات امتحانی مدارس شهرهای مختلف کشور بوده که گاهی برای انطباق کامل با سؤالات امتحان نهایی، مجبور به اصلاح صورت سؤالات شده‌ایم. این کار وقت زیادی را از ما گرفت.

بانک جامع سؤالات امتحانی

غلط، جای خالی، دوگزینه‌ای و تشریحی می‌باشند که بارها در امتحانات مختلف تکرار شده‌اند.

تمرکز اصلی در این بخش طراحی و جمع‌آوری سؤالاتی بوده که دقیقاً با محتوای کتاب درسی و تیپ سؤالات امتحان نهایی هم‌خوانی دارند. این سؤالات، شامل مسائل صحیح و

پاسخ‌های واقعاً تشریحی

نوشته شده‌اند و همواره سعی کرده‌ایم طوری باشند که دانش‌آموز با خواندن آن‌ها تا حد امکان متوجه حل سؤال بشود.

نقطه قوت دیگر کتاب، پاسخ‌های کاملاً تشریحی آن است که بارها با استقبال و تحسین گسترده معلمین و دانش‌آموزان همراه بوده است. این پاسخ‌ها با صرف وقت و انرژی زیاد

پوشش کامل متن کتاب درسی

عنوان «کتاب درسی زیر ذره‌بین» برخورد خواهید کرد که در آن‌ها، به‌طور موشکافانه‌ای، قسمت‌هایی از کتاب درسی را بررسی کرده‌ایم. این حرکت، یکی از ویژگی‌های انحصاری کتاب ما بوده و نمونه آن را در هیچ کتابی نخواهید دید.

تمام مطالب کتاب درسی اعم از فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها، تمرینات، مثال‌ها، شکل‌ها، نمودارها، زیرنویس‌ها، متن‌های حاشیه کتاب و ... به صورت کامل و جامع پوشش داده شده است. در همین راستا، هنگام مطالعه کتاب به کادرهایی تحت

پرسش‌های تکمیلی

پیشنهاد می‌شود بعد از حل سؤالات مربوط به هر فصل و تسلط بر آن‌ها، به سراغ این سؤالات بروید، زیرا این نوع سؤالات به ندرت در امتحانات دیده شده‌اند.

در انتهای هر فصل، تعدادی سؤال سخت و خشن مخصوص دانش‌آموزان سخت‌کوش آماده کرده‌ایم که به نمره بالاتر از ۲۰ می‌انديشند!

دفترچه رایگان آزمون

از پایان هر فصل با حل کردن آزمون آن فصل، بررسی کنید که آن فصل را چقدر خوب یاد گرفته‌اید. از این آزمون‌ها می‌توانید برای مرور فصل‌ها نیز استفاده کنید.

سؤالات امتحان نهایی را با دقت بررسی کرده‌ایم و با توجه به سبک سؤالات و درجه سختی آن‌ها، آزمون‌هایی کاملاً استاندارد از هر فصل تألیف کرده‌ایم. پیشنهاد می‌شود پس

کانال تلگرام با آیدی @F20riazi

نهایی را قرار خواهیم داد. این مطالب شامل نمونه سؤال‌های امتحانی به همراه حل آن با voice (ویس)، تدریس مباحث مختلف و حل آزمون‌های برگزارشده مؤسسات مختلف می‌باشد. پیشنهاد می‌کنیم حتماً در این کانال عضو شوید و از مطالب آن استفاده کنید.

در راستای کمک به دانش‌آموزان و برطرف کردن سؤالات احتمالی که حین خواندن کتاب با آن‌ها روبه‌رو می‌شوند، تصمیم گرفتیم کانالی راه‌اندازی کنیم که پل ارتباطی شما با مؤلفین کتاب باشد. در این کانال علاوه بر رفع اشکالات دانش‌آموزان، به‌روزترین مطالب ریاضی منطبق با امتحان

فهرست

فصل ۱ مجموعه، الگو و دنباله

۶۰	۴۹	۳۶	۲۳	۸
درس ۵ دنباله هندسی	درس ۴ دنباله حسابی	درس ۳ الگو و دنباله	درس ۲ مقدم یک مجموعه	درس ۱ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

فصل ۲ مثلثات

۱۰۱	۸۶	۷۴
درس ۳ روابط بین نسبت‌های مثلثاتی	درس ۲ دایره مثلثاتی	درس ۱ نسبت‌های مثلثاتی

فصل ۳ توان‌های گویا و عبارتهای جبری

۱۳۱	۱۲۵	۱۱۹	۱۰۸
درس ۴ عبارتهای جبری	درس ۳ توان‌های گویا	درس ۲ ریشه nام	درس ۱ ریشه و توان

فصل ۴ معادله‌ها و نامعادله‌ها

۱۷۲	۱۶۱	۱۵۰
درس ۳ تعیین علامت	درس ۲ سهمی	درس ۱ معادله درجه ۲ و روش‌های مختلف حل آن

فهرست

فصل ۱ - تابع

۱۹۲

درس ۱
مفهوم تابع و
بازتابی‌های آن

۲۰۲

درس ۲
دامنه و
برد توابع

۲۱۵
درس ۳
انواع
تابع

فصل ۲ - شمارش، بدون شماردن

۲۳۴

درس ۱
شمارش

۲۴۸

درس ۲
جایگشت

۲۵۶

درس ۳
ترکیب

فصل ۳ - آمار و احتمال

۲۶۸

درس ۱
فضای نمونه‌ای و
پیشامدهای تصادفی

۲۸۱

درس ۲
احتمال یا
اندازه‌گیری شانس

۲۹۵

درس ۳
مقدمه‌ای بر
علم آمار، ...

۳۰۳

پاسخنامه
تشریحی

فصل

مجموعه، الگو و دنباله



درس ۵
دنباله هندسی



درس ۴
دنباله حسابی



درس ۳
الگو و دنباله



درس ۲
متمم یک
مجموعه



درس ۱
مجموعه های
متناهی و
نامتناهی



فرار از
اشتباه



تذکر



یادآوری



تعریف



اثبات
فرمول



نتیجه



روش حل



مثال



نکته



دید
ویژه

- ۱ یادآوری مجموعه‌های مهم و روابط بین مجموعه‌ها
- ۲ بازه (فاصله)
- ۳ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

دورسی

یادآوری مجموعه‌های مهم و روابط بین مجموعه‌ها

مجموعه: به دسته‌ای از اعداد یا اشیای کاملاً مشخص و متمایز (غیر تکراری) مجموعه می‌گوییم. مثل مجموعه اعداد اول یک رقمی که اعضای آن کاملاً مشخص هستند: $\{2, 3, 5, 7\}$

ترتیب نوشتن اعضای مجموعه مهم نیست. مثلاً: $\{4, 3\}$ همان $\{3, 4\}$ است. از طرفی تکرار در مجموعه اثر ندارد. مجموعه‌های $\{1, 2\}$ و $\{1, 1, 2, 2\}$ یا هم مساوی‌اند.

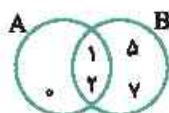
عضویت در مجموعه: اگر x ، عضو مجموعه A باشد می‌نویسیم $x \in A$ و اگر عضو مجموعه A نباشد، می‌نویسیم $x \notin A$. در مجموعه $A = \{0, \{1\}\}$ داریم:

$0 \in A$: زیرا دقیقاً صفر را در مجموعه A می‌بینیم.

$\{0\} \notin A$: زیرا $\{0\}$ را در مجموعه A نمی‌بینیم. دقت کنید $\{0\}$ را با 0 اشتباه نگیرید.

$\{1\} \in A$: زیرا دقیقاً $\{1\}$ را در مجموعه A می‌بینیم.

نمودار ون: مجموعه را علاوه بر نوشتن اعضاء درون $\{ \}$ ، به صورت‌های دیگری نیز می‌توان نمایش داد. نمایش مجموعه‌ها به کمک شکل‌هایی مانند دایره، مستطیل یا ... را نمایش به صورت «نمودار ون» می‌گویند.



A و B دو عضو مشترک ۱ و ۲ دارند.

نمایش مجموعه‌های $A = \{0, 1, 2\}$ و $B = \{1, 2, 5, 7\}$ با نمودار ون به صورت مقابل است:

مجموعه تهی: مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد را مجموعه تهی می‌نامیم و آن را با علامت $\emptyset$ یا $\{ \}$ نمایش می‌دهیم.

مجموعه اعداد طبیعی بین $1/5$ و $1/6$ تهی است. زیرا بین $1/5$ و $1/6$ عدد طبیعی وجود ندارد.

مجموعه‌های $\{ \}$ ، $\{ \{ \}$ یا $\{0\}$ تهی نیستند، زیرا هر کدام یک عضو دارند.

دو مجموعه برابر: اگر هر عضو مجموعه A ، عضو مجموعه B بوده و هر عضو مجموعه B نیز، عضو مجموعه A باشد، آن‌گاه می‌گوییم A و B برابرند و می‌نویسیم $A = B$. مثلاً دو مجموعه $A = \{1, 2\}$ و $B = \{1, 1, 2\}$ برابرند. زیرا اگر عضو تکراری را در B حذف کنیم، $B = \{1, 2\}$ دقیقاً مثل A است.

زیرمجموعه: هرگاه هر عضو مجموعه A ، عضو مجموعه B نیز باشد، مجموعه A را زیرمجموعه B می‌گوییم و آن را به صورت $A \subseteq B$ نمایش می‌دهیم. همچنین زیرمجموعه نبودن را با علامت $\not\subseteq$ نمایش می‌دهیم.

برای مجموعه $A = \{0, \{1\}\}$ داریم:

$\{0\} \subseteq A$: زیرا تنها عضو $\{0\}$ یعنی عدد ۰، عضوی از مجموعه A است.

$\{1\} \not\subseteq A$: زیرا تنها عضو $\{1\}$ یعنی عدد ۱، عضو مجموعه A نیست.

$\{ \{ \} \} \subseteq A$: زیرا تنها عضو $\{ \{ \} \}$ یعنی $\{ \}$ ، عضوی از مجموعه A است.

$\{0, \{1\}\} \subseteq A$: زیرا عضوهای آن یعنی ۰ و $\{1\}$ ، هر دو عضو مجموعه A هستند.

مجموعه تهی، زیر مجموعه هر مجموعه دلخواهی است. مثلاً اگر A یک مجموعه دلخواه باشد، آن‌گاه: $\emptyset \subseteq A$

هر مجموعه‌ای، زیر مجموعه خودش است. مثلاً: $A \subseteq A$

نوشتن مجموعه به زبان ریاضی: گاهی اوقات برای نمایش یک مجموعه، شکل کلی عضوهای آن مجموعه را بیان می‌کنند. مثلاً: هر عدد طبیعی زوج به شکل $2k$ است که در آن k عددی طبیعی است. پس مجموعه اعداد طبیعی زوج را به زبان ریاضی به صورت $\{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ نمایش می‌دهیم.

فقط محض اطلاع بدانید که علامت « $\mid$ » در $\{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ به معنی «به طوری که» می‌باشد.

اعضای مجموعه

$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 \leq 16\}$ را بنویسید.

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

پاسخ نهایی

منتخب مدارس تهران

اعضای مجموعه $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 < 25\}$ را بنویسید.

پاسخ ابتدا با توجه به شرط $x \in \mathbb{N}$ متوجه می‌شویم x عددی طبیعی است و چون

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$x^2 < 25$ ، پس $x = 1, 2, 3, 4$ و داریم:

منتخب مدارس تهران

اجتماع، اشتراک و تفاضل



اجتماع دو مجموعه A و B: مجموعه‌ای است که اعضایش در A یا B یا هر دو مجموعه A و B هستند (اعضایش متعلق به حداقل یکی از مجموعه‌های A و B است). و آن را به صورت $A \cup B$ نمایش می‌دهیم. نمودار آن به صورت مقابل است:

۱ $A \cup A = A$

۲ $A \cup \emptyset = A$

ویژگی‌ها:

۳ $A \cup B \subseteq (A \cup B)$

۴ اگر $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$



اشتراک دو مجموعه A و B: مجموعه‌ای است که هر عضو آن هم به A و هم به B تعلق داشته (متعلق به هر دو مجموعه) و آن را به صورت $A \cap B$ نشان می‌دهند. نمودار آن به صورت مقابل است:

۱ $A \cap A = A$

۲ $A \cap \emptyset = \emptyset$

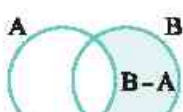
ویژگی‌ها:

۳ $A \cap B \subseteq A$ و B

۴ اگر $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$



تفاضل دو مجموعه: مجموعه $A - B$ ، مجموعه‌ای است که عضوهای آن در A هستند ولی در B حضور ندارند. (عضوها فقط در A هستند). نمودار آن به صورت مقابل است:



به طور مشابه مجموعه $B - A$ ، مجموعه‌ای است که عضوهای آن در B هستند ولی در A حضور ندارند. (عضوها فقط در B هستند). نمودار آن به صورت مقابل است:

ویژگی‌ها:

۱ $A - B = A - (A \cap B)$

۲ $B - A = B - (A \cap B)$

۳ $A - \emptyset = A$, $\emptyset - A = \emptyset$

۴ $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

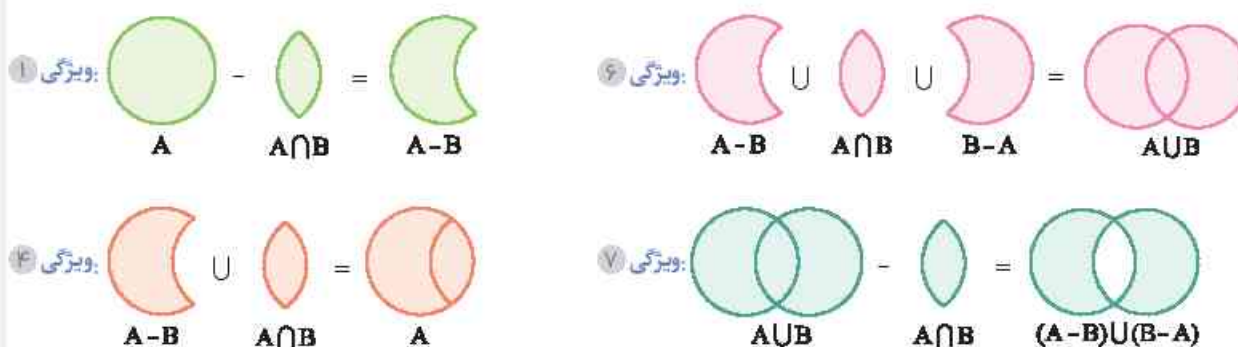
۵ $(B - A) \cup (A \cap B) = B$

۶ $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$

۷ $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

۸ اگر $A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset$

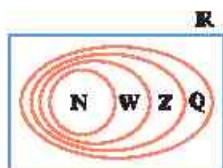
ویژگی‌های بیان شده را حفظ نکنید، بلکه به کمک نمودارون آن را بفهمید تا در ذهن شما بمانند. مثلاً ویژگی‌های ۱، ۴، ۶ و ۷ را به صورت زیر به کمک نمودارون به خاطر می‌سپاریم:



اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه $A \cup B = B$ و $A \cap B = A$ ، مثلاً چون $W \subseteq Z$ است، پس $W \cup Z = Z$ و $W \cap Z = W$

چند مجموعه مهم

- ۱ مجموعه اعداد طبیعی: $N = \{1, 2, 3, \dots\}$
 - ۲ مجموعه اعداد حسابی: $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
 - ۳ مجموعه اعداد صحیح: $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
 - ۴ مجموعه اعداد گویا: $Q = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \neq 0\}$
 - ۵ مجموعه اعداد گنگ (Q'): مجموعه اعدادی هستند که نمی‌توان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح به صورت $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$) نوشت. مثل $\sqrt{2}$ و π .
 - این مجموعه را به صورت $IR - Q$ نیز نشان می‌دهند.
 - ۶ مجموعه اعداد حقیقی: $IR = Q \cup Q'$
- روابط زیر را که بسیار مهم است حتماً به خاطر بسپارید:



$$1 \quad N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq IR$$

$$2 \quad Q \cup Q' = IR$$

$$3 \quad Q \cap Q' = \emptyset$$

$$4 \quad Q' \subseteq IR$$

$$5 \quad Q \cup (IR - Q) = IR$$

همان Q' است.

$$6 \quad Q \cap (IR - Q) = \emptyset$$

همان Q' است.

پاسخ درود بر Q' ! مطمئن باش گم نشده! در واقع اون قسمت بین Q و IR یعنی $IR - Q$



همان Q' هست. به شکل مقابل نگاه کن تا بفهمی Q' کجاست.

آقا
پس
 Q'
چی شد؟



سؤال دانش‌پژوه احمد نوشکار

کتاب درسی پس از معرفی مجموعه‌های مهم، یک نتیجه مهم را آورده که می‌تواند به صورت

جای خالی (به صورت زیر) در امتحان مطرح شود:

«هر عدد دلخواهی باید جایی روی محور اعداد حقیقی داشته باشد و همچنین هر نقطه روی

این محور، نشان دهنده یک عدد حقیقی است.»

کتاب
درسی
زیر ذره‌بین



صفحه ۲

در ادامه انواع تیپ‌های مهمی که از این درس می‌تواند در امتحان مطرح شود را با هم بررسی می‌کنیم:



A و B را به ما می‌دهند و از ما می‌خواهند $A \cup B$ ، $A \cap B$ یا ... را به دست آوریم.

برای حل این تیپ مسائل، کافی است از ویژگی‌های مطرح شده در درسنامه استفاده کنیم و مجموعه خواسته شده را بنویسیم.

اگر $A = \{2, 4, 6, 8\}$ و $B = \{3, 6, 9\}$ باشد، مجموعه‌های $A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A - B$ و $B - A$ را بیابید.

پاسخ

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{6\} \quad \text{اعضای مشترک هر دو مجموعه} \\ A \cup B &= \{2, 3, 4, 6, 8, 9\} \quad \text{تمام اعضای B و A} \\ A - B &= A - (A \cap B) = \{2, 4, 8\} - \{6\} = \{2, 4, 8\} \quad \text{منتهای A حذف کن} \\ B - A &= B - (A \cap B) = \{3, 9\} - \{6\} = \{3, 9\} \quad \text{منتهای B حذف کن} \end{aligned}$$

اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{3, 4, 5\}$ باشد، مجموعه‌های $A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A - B$ و $B - A$ را بیابید.

پاسخ نهایی

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{3, 4\} \\ A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ A - B &= \{1, 2\} \quad B - A = \{5\} \end{aligned}$$



تعدادی عدد را داده و از ما می‌خواهند آن‌ها را در جای مناسب در نمودار ون قرار دهیم.

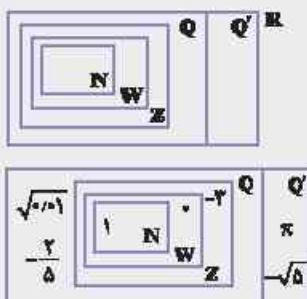
برای پاسخ‌گویی به این مسائل، باید تشخیص دهیم که آن عدد متعلق به کدام یک از مجموعه‌های Q ، Z ، W ، N یا Q' است تا بتوانیم آن را در جای مناسب بنویسیم.

درستی یا نادرستی هریک از عبارات زیر را مشخص کنید.

$$\begin{aligned} \sqrt{17} \in Q' & \text{ (ب)} & \frac{\pi}{2} \in Q & \text{ (آ)} \\ -\frac{3}{5} \in Q & \text{ (ت)} & \sqrt{0.64} \in Z & \text{ (پ)} \end{aligned}$$

پاسخ نهایی

(ب) درست
(ت) درست
(آ) نادرست
(پ) نادرست



عددهای 1 ، 0 ، $-\sqrt{5}$ ، π ، $\sqrt{0.1}$ ، -3 ، $-\frac{2}{5}$ را در جای مناسب در شکل بنویسید.

پاسخ

$$\begin{aligned} 1 \in N, 0 \in W, -3 \in Z \\ \sqrt{0.1} = \sqrt{(0.1)^2} = 0.1 = \frac{1}{10}, -\frac{2}{5} \in Q \\ \pi, -\sqrt{5} \in Q' \end{aligned}$$



از ارتباط بین مجموعه‌های معروف Q ، Z ، W ، N و Q' ، سوالات صحیح و غلط یا جای خالی می‌دهند.

کلید حل این سوالات، تسلط به روابط مجموعه‌های مهم مانند: $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$ ، $Q' = R - Q$ ، $Q' \subseteq R$ و نمودار ون آن‌ها است.

درستی یا نادرستی هریک از عبارات زیر را مشخص کنید.

$$\begin{aligned} \text{آ)} \quad (N \cup Z) \subseteq Q \\ \text{ب)} \quad Q' - Z = Q \\ \text{پ)} \quad Q \cup Z = Q \\ \text{ت)} \quad W \cap N = \{0\} \end{aligned}$$

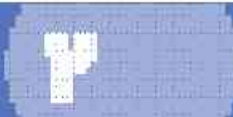
پاسخ نهایی

(آ) درست
(پ) درست
(ب) نادرست
(ت) نادرست

$$\begin{aligned} \text{آ)} \quad (R - Q) \cap Q &= \emptyset & \text{ب)} \quad W - Z &= \emptyset & \text{پ)} \quad W - N &= \emptyset \\ \text{ت)} \quad Q \cap W &= Q & \text{ث)} \quad Q \cup Z &= Q & \text{ج)} \quad R - (Q \cup Q') &= \emptyset \\ \text{ز)} \quad (R - Q) \cap Q &= Q' \cap Q = \emptyset & \text{ح)} \quad W - Z &= \emptyset & \text{د)} \quad Q \cap W &= W \\ \text{ح)} \quad W - N &= \{1, 2, 3, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \emptyset & \text{س)} \quad R - (Q \cup Q') &= R - R = \emptyset \end{aligned}$$

تیب

بازه (فاصله)



بازه (فاصله): زیر مجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ که مشخص‌کننده یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشد را «بازه» یا «فاصله» می‌نامند. اگر a و b دو عدد حقیقی و $a < b$ باشد، حالات زیر را داریم:

حالت ۱: تمام اعداد حقیقی بین دو عدد a و b به همراه خود این دو عدد (نقاط انتهایی بازه) را **بازه بسته از a تا b** می‌گوییم و به صورت $[a, b]$ نمایش می‌دهیم:

نمایش هندسی:  . نمایش مجموعه‌ای: $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

نمایش هندسی:  $\Rightarrow [1, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$

حالت ۲: تمام اعداد حقیقی بین دو عدد a و b را **بازه باز بین a و b** می‌گوییم و به صورت (a, b) نمایش می‌دهیم:

نمایش هندسی:  . نمایش مجموعه‌ای: $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

نمایش هندسی:  $\Rightarrow (-1, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$

! در بازه باز (a, b) ، نقاط ابتدایی و انتهایی یعنی a و b حضور ندارند.

حالت ۳: بازه‌هایی مانند $[a, b]$ یا (a, b) که تنها شامل یکی از نقاط انتهایی خود هستند را **بازه‌های نیم باز** می‌نامیم. این بازه‌ها شامل تمام اعداد حقیقی بین a و b به همراه تنها یکی از دو عدد a و b هستند.

نمایش هندسی:  . نمایش مجموعه‌ای: $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} = [a, b)$

نمایش هندسی:  . نمایش مجموعه‌ای: $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} = (a, b]$

نمایش هندسی:  $\Rightarrow (-1, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 2\}$

نمایش هندسی:  $\Rightarrow [-1, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2\}$

! طول بازه (a, b) برابر $b - a$ است. به عنوان مثال طول هر کدام از بازه‌های $[-1, 6]$ ، $(-1, 6)$ ، $[-1, 6)$ و $(-1, 6]$ برابر $6 - (-1) = 7$ است.

! در مورد بازه‌هایی مانند $[a, b]$ یا (a, b) یا ... نمی‌توان اولین عدد حقیقی بعد از a و اولین عدد حقیقی قبل از b را مشخص کرد.

حالت ۴: تمام اعداد حقیقی بزرگتر از a را به صورت $x > a$ یا $(a, +\infty)$ نوشته و به آن **بازه باز a تا $+\infty$** (بخوانید: مثبت بی‌نهایت) می‌گوییم:

نمایش هندسی:  . نمایش مجموعه‌ای: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

نمایش هندسی:  $\Rightarrow (2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

در جدول زیر تمام حالت‌های ممکن را آورده‌ایم:

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	بسته
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	(a, b)	باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$	نیم‌باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$	نیم‌باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	$[a, +\infty)$	نیم‌باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	$(a, +\infty)$	باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	$(-\infty, a]$	نیم‌باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	$(-\infty, a)$	باز
	$\mathbb{R}$	$(-\infty, +\infty)$	باز

! $+\infty$ و $-\infty$ اعداد حقیقی نیستند و در نمایش بازه‌ها، کنار آن‌ها همیشه پیرانتز می‌آید.

گاهی می‌توان اجتماع دو یا چند بازه را به صورت تفاضلی نشان داد. مثلاً داریم:

$$(-\infty, 2) \cup (2, +\infty) = \{x \mid x < 2 \text{ یا } x > 2\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$(-\infty, 1) \cup [2, +\infty) = \{x \mid x < 1 \text{ یا } x \geq 2\} = \mathbb{R} - [1, 2)$$

پاسخ ببین برای نوشتن مجموعه $(-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$ به اون یکی صورت، کافیه مجموعه‌ای رو پیدا کنید که اجتماع اون با $(-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$ ، برابر مجموعه $\mathbb{R}$ بشه و با این مجموعه اشتراکی نداشته باشه. بعد اون مجموعه رو از $\mathbb{R}$ کم کنید. در این‌جا داریم:

$$(-\infty, 1) \cup [2, +\infty) \cup [1, 2) = \mathbb{R} \Rightarrow (-\infty, 1) \cup [2, +\infty) = \mathbb{R} - [1, 2)$$

بازه مورد نظر

سوال دانش‌پژوهانه را به پژوهش

آقا اجازه!
این آخری رو
می‌شه بیشتر
توضیح بدین
که چطور
نوشتین؟



در ادامه انواع تیپ‌های مهمی که از این درس می‌تواند در امتحان مطرح شود را باهم بررسی می‌کنیم:

متعلق
بودن
یک عدد
به یک
بازه

تیپ

فرض کنید اعدادی مانند $-\frac{3}{4}$ ، -1 ، -4 می‌دهند و از ما می‌پرسند آیا این اعداد متعلق به بازه $[-1, -4]$ هستند یا خیر؟

☀️ برای پاسخگویی به این سؤال، کافی است چک کنیم اعداد داده شده در آن بازه قرار دارند یا خیر. برای این کار آن اعداد را با اعداد دو انتهای بازه یعنی -1 و -4 مقایسه می‌کنیم. خب در این مثال -1 عضو بازه است زیرا بازه از طرف -1 بسته بوده و علامت « $]$ » کنار -1 وجود دارد. ولی -4 عضو بازه نیست زیرا بازه از طرف -4 باز بوده و علامت پرانتز کنار -4 وجود دارد. در نهایت $-\frac{3}{4}$ عضو بازه نیست زیرا $-\frac{3}{4}$ از -1 بزرگ‌تر بوده، لذا بین دو عدد -1 و -4 قرار ندارد!

کدام یک از اعداد $-\frac{5}{6}$ ، -3 ، $-\sqrt{5}$ و $-\pi$ عضو بازه $(-\frac{5}{6}, -3]$ هستند؟

پاسخ نهایی: $-\sqrt{5}$ ، -3

منتخب مدارس انوار

بررسی
وضعیت
دو بازه
نسبت به هم

تیپ

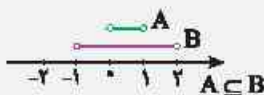
فرض کنید دو مجموعه A و B را به ما داده‌اند و از ما می‌پرسند:

آ، آیا $A = B$ ؟ ب، آیا $A \subseteq B$ ؟

☀️ کافی است بررسی کنیم که آیا تمام اعداد موجود در بازه‌های A و B یکسان‌اند؟ به عبارت دیگر آیا عددی متعلق به یکی از مجموعه‌های A یا B وجود دارد که در دیگری نباشد! اگر چنین عددی را یافتیم آن‌گاه A و B مساوی نیستند! مثلاً: دو مجموعه $A = (1, 2)$ و $B = [1, 2)$ مساوی نیستند، زیرا عدد 1 در B هست ولی در A نیست.

ب) ابتدا بازه‌های A و B را روی محور (نمایش هندسی) رسم کنیم. در این صورت اگر تمام عضوهای بازه A در B نیز وجود داشت آن‌گاه می‌گوییم $A \subseteq B$ است. در غیر این صورت حتی اگر یک عضو پیدا کردیم که در A بوده ولی در B نبود می‌گوییم: $A \not\subseteq B$

🍋 مجموعه $A = (0, 1)$ زیر مجموعه $B = (-1, 2)$ است زیرا:



🍋 مجموعه $A = (0, 2]$ زیر مجموعه $B = (-2, 1]$ نیست.

زیرا اعدادی مانند 1.5 یا 2 در A هست ولی در B نیست!



🍋 درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

آ) $(-1, 4] = [-1, 4)$

ب) $[-2, 1) \subseteq [-3, 2)$

پاسخ: ❌ نادرست است، زیرا مثلاً عدد 4 در بازه $(-1, 4]$ هست ولی در بازه $[-1, 4)$ نیست! به‌طور مشابه -1 در $[-1, 4)$ هست ولی در $(-1, 4]$ نیست. پس این دو بازه برابر نمی‌باشند.

ب) درست است، زیرا با توجه به شکل زیر تمام اعضای $[-2, 1)$ در بازه $[-3, 2)$ هم هستند.



● درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید

آ) $[-5, 1) \subseteq (-\infty, 1]$

ب) $[-8, 1) \subseteq (-8, 1)$

پاسخ نهایی: آ) درست ب) نادرست

منتخب مدارس گل



منتخب مدارس بافت



معاينة
مجموعه‌هایی مانند
 $A \cap B$ ، $A \cup B$
و... از روی A و B

فرض کنید دو یا چند مجموعه مانند A و B داده شده و از ما می‌خواهند مجموعه‌های $A \cap B$ ، $A \cup B$ ، $A - B$ یا هر مجموعه دیگری را به صورت بازه یا اجتماعی از بازه‌ها بنویسیم. برای حل این سوالات ابتدا مجموعه‌های داده شده را روی محور رسم می‌کنیم. سپس خواسته مسئله را از روی محور می‌یابیم.

● اگر $A = (1, 4]$ و $B = [-1, 2]$ باشد، حاصل $A \cap B$ ، $A \cup B$ ، $A - B$ و $B - A$ را بیابید.

پاسخ نهایی

$$A \cup B = [-1, 4], A \cap B = (1, 2]$$

$$B - A = [-1, 1], A - B = [2, 4]$$

اگر $A = [-2, 1]$ و $B = [0, 2]$ باشند، حاصل عبارات زیر را به کمک رسم بازه‌ها روی محور پیدا کنید. پ) $A - B$ ب) $A \cup B$ آ) $A \cap B$

ت) $B - A$ ث) $A - [-1, 0]$

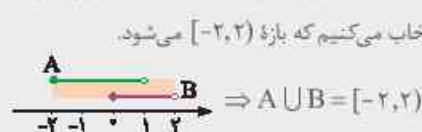
پاسخ

برای هر قسمت مجموعه‌های A و B را روی محور رسم کرده و خواسته مسئله را با توجه به آن‌ها می‌یابیم:

آ) $A \cap B$: قسمت‌های مشترک دو بازه را انتخاب می‌کنیم که بازه $[0, 1]$ می‌شود.



ب) $A \cup B$: تمام قسمت‌های A و B را انتخاب می‌کنیم که بازه $[-2, 2]$ می‌شود.



پ) $A - B$: قسمت مشترک B و A را از A حذف می‌کنیم:

$$A - B = A - (A \cap B) = [-2, 1] - [0, 1] = [-2, 0)$$

ت) $B - A$: قسمت مشترک B و A را از B حذف می‌کنیم:

$$B - A = B - (A \cap B) = [0, 2] - [0, 1] = [1, 2]$$

ث) برای محاسبه $A - [-1, 0]$ باید اشتراک A و $[-1, 0]$ که همان $[-1, 0]$ است را از مجموعه A حذف کنیم:

$$A - [-1, 0] = [-2, 1] - [-1, 0] = [-2, -1) \cup [0, 1]$$

عدد ۱- چون در $[-1, 0]$ وجود دارد پس در جواب نهایی نباید وجود داشته باشد پس کنار آن پرانتز قرار دادیم و عدد صفر چون در $[-1, 0]$ وجود نداشت پس در جواب نهایی، وجود دارد لذا کنار آن «» آوردیم.

در این مسائل چون α متعلق به بازه $(a, b]$ است، می‌توان نوشت $a < \alpha \leq b$ سپس نامعادله‌های $a < \alpha$ و $\alpha \leq b$ را جداگانه حل می‌کنیم و بین جواب‌های حاصل اشتراک می‌گیریم.

اگر بگویند α
متعلق به بازه
 $(a, b]$ است، باید
چکار کنیم؟

● اگر عدد $2a + 1$ عضو بازه $(3, 5)$ باشد، محدوده a را بیابید.

پاسخ نهایی

$$1 < a < 2$$

اگر عدد ۴ متعلق به بازه $[2m - 2, 2m + 6]$ باشد، محدوده m را بیابید.

پاسخ با توجه به شکل باید داشته باشیم:



$$\begin{cases} 2m - 2 < 4 < 2m + 6 \\ 2m - 2 < 4 \Rightarrow 2m < 6 \Rightarrow m < 3 \\ 4 < 2m + 6 \Rightarrow -2 < 2m \Rightarrow -1 < m \end{cases} \Rightarrow -1 < m < 3$$



صحبت از طول بازه (a, b) می شود.

می دانیم طول بازه های (a, b) ، $[a, b]$ ، $(a, b]$ و $[a, b]$ از فرمول $b - a$ به دست می آید. پس با توجه به این فرمول، طول بازه داده شده را حساب می کنیم. از طرفی خواستان باید به این نکته باشد که $a < b$ است! انتهای بازه بزرگتر از ابتدای بازه است. از همین نکته هم می تواند سؤال مطرح شود.

● طول بازه $(2 + a, 6 + a)$ چقدر است؟

پاسخ نهایی ۴



منتخب مدارس یاسوج

اگر طول بازه $[2m - 1, 4m + 1]$ برابر ۴ باشد، مقدار m را بیابید.

پاسخ

$$4 = \text{طول} = \text{پایان} - \text{ابتدا} = (4m + 1) - (2m - 1) = 2m + 2$$

$$\Rightarrow 2m = 2 \Rightarrow m = 1$$

به ازای $m = 1$ بازه به صورت $[1, 5]$ در می آید که چون $5 > 1$ است، پس m قابل قبول است.

منتخب مدارس یاسوج

● در بازه $(m, 2m + 1)$ ، محدوده m را بیابید.

پاسخ نهایی $m > -1$



منتخب مدارس تهران

در بازه $(m + 2, 4)$ ، محدوده m را بیابید.

پاسخ

می دانیم ابتدای بازه باید کوچکتر از انتهای بازه باشد. پس داریم:

$$m + 2 < 4 \Rightarrow m < 2$$

منتخب مدارس رابل

مجموعه های متناهی و نامتناهی



مجموعه ای را که تعداد اعضای آن برابر با یک عدد حسابی باشد، «مجموعه متناهی» می نامند. مثلاً: مجموعه $\{1, 2, 4, 6\}$ ، متناهی است، زیرا چهار عضو دارد. هم چنین مجموعه ای را که متناهی نباشد، «مجموعه نامتناهی» می گویند.

تعداد اعضای مجموعه های نامتناهی از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگتر است.

مجموعه اعداد طبیعی $(\mathbb{N})$ ، مجموعه اعداد صحیح $(\mathbb{Z})$ و تعداد اعداد گویا یا گنگ در یک بازه، مجموعه های نامتناهی و مجموعه مولکول های موجود در جهان هستی، مجموعه ای متناهی است. هم چنین مجموعه تهی نیز مجموعه ای است که صفر عضو دارد و لذا مجموعه ای متناهی می باشد.

پاسخ قلی جان، مگه به تو گفتن برو بشمار درست که خیلی زیادن، اما با داشتن امکانات لازم و صرف وقت بسیار، ممکنه که بشه تعداد اون ها رو به دست آورد. پس یادت باشه تعداد اعضای بعضی از مجموعه های متناهی ممکنه خیلی زیاد باشه، ولی نباید به خاطر این، اونا رو مجموعه نامتناهی بگیریم!

سؤال دانش آموزان قلی جان آورده

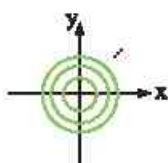
آقا اجازه! آخه مولکول های جهان هستی که خیلی زیادن! چطوری میگن متناهی پس؟



در جدول زیر مثال های مهم کتاب درسی که در امتحانات بارها سؤال داده اند را یکجا آورده ایم.

نوع مجموعه	مجموعه	نوع مجموعه	توضیح	مجموعه
متناهی	انسان های روی زمین	متناهی	$\{2, 3, 5, 7\}$	اعداد اول یک رقمی
متناهی	سلول های عصبی مغز یک انسان	نامتناهی	$\{1, 3, 5, \dots\}$	اعداد طبیعی فرد
نامتناهی	تمام دایره های به مرکز مبدأ	متناهی	$\{10, \dots, 99\}$	اعداد طبیعی ۲ رقمی
متناهی	دانش آموزان مدرسه شما	نامتناهی	$\{10, 20, \dots\}$	مضرب های طبیعی عدد ۱۰
متناهی	درخت های جنگل آمازون	متناهی	$\{1, 2, 5, 10\}$	شمارنده های طبیعی عدد ۱۰
نامتناهی	کسرهای مثبت با صورت یک	نامتناهی	بی شمار عدد حقیقی در بازه وجود دارد.	بازه $(0, 1)$
متناهی	مولکول های موجود در یک مول مشخص از آب	متناهی	$A = \emptyset$ پس متناهی است.	$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$

توضیح جدول:



۱) مطابق شکل مقابل، بی‌شمار دایره به مرکز مبدأ و با شعاع‌های مختلف $2^0, 2^1, 2^2, \dots$ عددی حقیقی غیرصفر می‌توان رسم کرد.

۲) کسره‌های مثبت یا صورت یک را به صورت $\frac{1}{x}$ در نظر می‌گیریم که x می‌تواند هر عدد حقیقی مثبتی باشد. پس بی‌شمار کسر می‌توان نوشت.

۳) تعداد مولکول‌های موجود در یک مول آب، 6.022×10^{23} عدد است که باین که عدد بزرگی می‌باشد ولی قابل شمارش است پس این مجموعه متناهی است.

! از این قسمت می‌توان به صورت جای خالی یا صحیح غلط، سوال مطرح کرد.

در فعالیت صفحه ۷ کتاب درسی خواسته شده در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازه $(0, 1)$ اظهار نظر کنید و سپس در مورد متناهی یا نامتناهی بودن Q سوال کرده است تا به نتیجه بسیار مهم زیر برسید:

➡ اگر A دارای یک زیرمجموعه نامتناهی باشد، آن‌گاه A حتماً یک مجموعه نامتناهی است.

با این نتیجه، مثلاً Z نامتناهی است، زیرا N که زیرمجموعه آن است، نامتناهی است.

کتاب
درسی
زیر ذره‌بین



صفحه ۷

تألیفی

➡ با آوردن سه زیرمجموعه نامتناهی برای Z ، نشان دهید که Z نامتناهی است.

پاسخ N و W و اعداد صحیح منفی

در ادامه انواع تیپ‌های مهمی که از این درس می‌تواند در امتحان مطرح شود را با هم بررسی می‌کنیم:

فرض کنید دو یا چند مجموعه متناهی یا نامتناهی مانند A و B را به ما داده و در مورد متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های مختلفی مانند $A \cup B, A \cap B, A - B$ و $B - A$ یا هر مجموعه دیگری سوال می‌کنند.

☀ برای پاسخگویی به این سوالات جدول زیر کمک خیلی بزرگی به شما خواهد کرد. جدول زیر به شما نشان می‌دهد که اگر A و B متناهی یا نامتناهی باشد، اوضاع از چه قرار است. خوب دقت کنید و به دلایل متناهی یا نامتناهی بودن آن‌ها فکر کنید:

مجموعه‌ها	$A \cap B$	$A \cup B$	$A - B$	$B - A$
A و B هر دو متناهی	متناهی	متناهی	متناهی	متناهی
A متناهی و B نامتناهی	متناهی	نامتناهی	متناهی	نامتناهی
A و B هر دو نامتناهی	می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد	نامتناهی	می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد	می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد

برای حالتی که هر دو A و B نامتناهی باشند، به مثال‌های زیر توجه کنید:

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	$A - B$	$B - A$
N	W	نامتناهی: N	نامتناهی: W	متناهی: $\emptyset$	متناهی: $\{1\}$
اعداد صحیح منفی	N	متناهی: $\emptyset$	نامتناهی: $Z - \{0\}$	نامتناهی: اعداد صحیح منفی	نامتناهی: N

! از این قسمت هم می‌توان سوال به صورت صحیح و غلط یا جای خالی در امتحان مطرح نمود.

بررسی متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های مختلف $A \cup B, A \cap B$ یا ...

تألیف



منتخب مدارس کاشان

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

(آ) اگر A مجموعه اعداد طبیعی کم تر از ۴ و B مجموعه اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد، آن گاه $A \cup B$ نامتناهی است.

(ب) اگر A و B هر دو نامتناهی باشند، مجموعه $A - B$ حتماً متناهی است.

(پ) اگر $B - A$ متناهی باشد، آن گاه B می تواند نامتناهی باشد.

پاسخ: درست است. زیرا $A = \{1, 2, 3\}$ متناهی و $B = \{3, 2, \dots\}$ نامتناهی است، بنابراین طبق جدول، $A \cup B$ نامتناهی است.

(ب) نادرست است. مثلاً اگر $A = \mathbb{N}$ و B اعداد زوج طبیعی، آن گاه $A - B$ ، مجموعه اعداد فرد طبیعی $\{1, 3, 5, \dots\}$ است که نامتناهی است.

(پ) درست است. مثلاً اگر B ، مجموعه نامتناهی W و A ، اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ باشد. در این صورت $B - A = W - \mathbb{N} = \{0\}$ متناهی است ولی B نامتناهی شده است.

منتخب مدارس گرگان

اگر A مجموعه اعداد طبیعی فرد و B مجموعه اعداد اول باشد، کدام یک از مجموعه های زیر متناهی و غیر تهی است؟

(ب) $A - B$

(آ) $B - A$

(ت) $A - (A \cup B)$

(پ) $A \cap B$

پاسخ: ابتدا اعضای مجموعه های A و B را مشخص می کنیم:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} \quad B = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$$

سپس متناهی یا نامتناهی بودن قسمت های داده شده را بررسی می کنیم:

(آ) $B - A = \{2\} \Rightarrow$ متناهی و غیر تهی

(ب) $A - B = \{1, 9, 15, \dots\} \Rightarrow$ نامتناهی

(پ) $A \cap B = \{3, 5, 7, 11, \dots\} \Rightarrow$ نامتناهی

(ت) $A - (A \cup B) = \{1, 3, 5, 7, \dots\} - \{1, 2, 3, 5, 7, \dots\} = \emptyset \Rightarrow$ متناهی

البته می توان گفت $A \subseteq A \cup B$ است، پس $A - (A \cup B) = \emptyset$ و نیازی به محاسبه $A \cup B$ نیست.

● در مثال سمت راست، متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه های $A \cap B$ و $C \cup A$ را بررسی کنید.

پاسخ نویی

$C \cap B$: متناهی و $C \cup A$: نامتناهی

اگر $A = [-2, 100]$ ، $B = (-\infty, -2]$ و C مجموعه اعداد دو رقمی طبیعی مضرب ۳ باشد، متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه های زیر را بررسی کنید.

(ب) $A \cap B$

(آ) $C \cup B$

(ت) $C - (A - B)$

(پ) $(A \cup B) \cap C$

پاسخ: مجموعه های A و B نامتناهی و $C = \{12, 15, \dots, 99\}$ متناهی است.

(آ) $C \cup B$: قطعاً نامتناهی:
 نامتناهی
 متناهی

(ب) $A \cap B = [-2, 100] \cap (-\infty, -2] = \{-2\}$: متناهی

(پ) $(A \cup B) \cap C$: قطعاً متناهی:
 نامتناهی
 نامتناهی

(ت) $C - (A - B) = C - ([-2, 100] - (-\infty, -2]) = C - (-2, 100]$: متناهی:
 اشتراک A و B که $\{-2\}$ است
 را از A حذف می کنیم.
 نامتناهی
 متناهی

بررسی وضعیت
متاهی یا
نامتاهی
بودن A و B
وقتی یکی
زیر مجموعه
دیگری است.

تپ



- فرض کنید $A \subseteq B$ باشد، در این صورت به جملات زیر خوب توجه کرده و آن‌ها را به خاطر بسپارید.
- ۱ اگر B متاهی باشد، A نیز متاهی است.
 - ۲ اگر B نامتاهی باشد، در مورد متاهی بودن یا نامتاهی بودن A نمی‌توان اظهار نظر کرد.
 - ۳ اگر A نامتاهی باشد، B نیز نامتاهی است.
 - ۴ اگر A متاهی باشد، در مورد متاهی بودن یا نامتاهی بودن B نمی‌توان اظهار نظر کرد.

درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

(آ) اگر $A - B$ نامتاهی باشد، آن‌گاه $A \cup B$ نامتاهی است.

(ب) اگر $A \cap B$ نامتاهی باشد، آن‌گاه A می‌تواند متاهی باشد.

(پ) اگر $A \subseteq B$ و $B = [1, +\infty)$ باشد، آن‌گاه A حتماً نامتاهی است.

پاسخ درست است. می‌دانیم $(A - B) \subseteq A \cup B$ است. پس چون $A - B$ نامتاهی

است، لذا طبق درسنامه مجموعه $A \cup B$ نیز نامتاهی خواهد بود.

(ب) نادرست است. زیرا $A \cap B \subseteq A$ ، پس وقتی $A \cap B$ نامتاهی است، پس A نیز نامتاهی بوده و نمی‌تواند متاهی باشد.

(پ) نادرست است. مجموعه $B = [1, +\infty)$ نامتاهی است و چون $A \subseteq B$ است، در مورد متاهی یا نامتاهی بودن A نمی‌توان اظهار نظر کرد. مثلاً A را می‌توان مجموعه متاهی $A = \{1\}$ یا مجموعه نامتاهی $A = [2, +\infty)$ در نظر گرفت.

● اگر $B \subseteq A$ و $A = (-\infty, 4]$ ، متاهی یا نامتاهی بودن مجموعه B را بررسی کنید و برای آن مثال بزنید.

پاسخ نهایی B می‌تواند متاهی یا نامتاهی

باشد. مثلاً: $B = \{3\}$ یا $B = (-\infty, 0]$

مستطیل متاهی روی



مستطیل متاهی همدان

پرسش‌های تشریحی

منتخب مدارس کشور

جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

- ۱ اگر $A = [-1, 2]$ و $B = [-2, 3]$ باشد، آن‌گاه $B - A =$ است.
- ۲ $W - (N \cap Z) =$ و $(Q - Q') \cap Z =$
- ۳ طول بازه $[-4, \frac{3}{4}]$ برابر است.
- ۴ اگر عدد $2m+1$ متعلق به بازه $(3, 5]$ باشد، محدوده m برابر است.
- ۵ اگر $B - A$ نامتناهی باشد، آن‌گاه مجموعه B قطعاً است. (متناهی - نامتناهی)
- ۶ اگر $W - B$ متناهی باشد، آن‌گاه مجموعه B قطعاً است. (متناهی - نامتناهی)
- ۷ اگر $A = \{\frac{1}{x} | x \in N\}$ و $B = \{\frac{x}{\lambda} | x \in N\}$ باشد، آن‌گاه مجموعه $A \cap B$ قطعاً است. (متناهی - نامتناهی)
- ۸ اگر A مجموعه اعداد حسابی و B مجموعه اعداد فرد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰ باشد، آن‌گاه $A - B$ و $B - A$ است. (متناهی - نامتناهی)
- ۹ اگر B دارای یک زیرمجموعه نامتناهی باشد، آن‌گاه مجموعه B یک مجموعه خواهد بود. (متناهی - نامتناهی)

منتخب مدارس کشور

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

- | | | | |
|---|----|---|----|
| $3 \in (1, 3)$ | ۲۰ | $\sqrt{26} \in Q'$ | ۱۰ |
| $a \in \{a, b\}$ | ۲۱ | $-\frac{5}{6} \notin Z$ | ۱۱ |
| $2 \in \{1, 3\}$ | ۲۲ | $-\frac{\sqrt{7}}{8} \in Q$ | ۱۲ |
| $[2, 5) = (2, 5]$ | ۲۳ | $W \cap N = N$ | ۱۳ |
| $(1, 2) \subseteq [1, 2] \subseteq [1, 2]$ | ۲۴ | $W - Z = \emptyset$ | ۱۴ |
| $(-1, 4] \subseteq [-1, 4)$ | ۲۵ | $Q' \cap N = N$ | ۱۵ |
| $[a, b] \subseteq (a, b)$ | ۲۶ | $Q' - R = Q$ | ۱۶ |
| $\{1, 2\} \subseteq (\sqrt{2} - 1, \sqrt{6})$ | ۲۷ | $N \cup ((Z - N) \cap W) = W$ | ۱۷ |
| $(3, 6) \subseteq \{3, 6\}$ | ۲۸ | $2 \in [-\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{\sqrt{17}}{2})$ | ۱۸ |
| $\pi \in (1, 5) \cap (0, 4)$ | ۲۹ | $\emptyset \subseteq (-1, 2]$ | ۱۹ |
| $(1, 4) \cap (5, 7) \subseteq \{5\}$ | ۳۰ | | |

منتخب مدارس کشور

با توجه به بحث مجموعه‌های متناهی و نامتناهی، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

- ۳۱ مجموعه نامتناهی، مجموعه‌ای است که تعداد اعضای آن از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر است.
- ۳۲ اگر A و B متناهی باشند، $A \cup B$ و $A \cap B$ متناهی هستند.
- ۳۳ اگر A متناهی و B نامتناهی باشد، $A \cup B$ نامتناهی و $A \cap B$ متناهی است.
- ۳۴ اگر A و B نامتناهی باشند، $A \cup B$ و $A \cap B$ نامتناهی هستند.
- ۳۵ اگر $A \cap B$ متناهی باشد، A و B و $A \cup B$ متناهی هستند.
- ۳۶ اگر $A \cap B$ نامتناهی باشد، A و B و $A \cup B$ نامتناهی هستند.
- ۳۷ اگر $A \cup B$ متناهی باشد، A و B متناهی و $A \cap B$ نامتناهی است.
- ۳۸ اگر $A \cup B$ نامتناهی باشد، A و B نامتناهی و $A \cap B$ می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.
- ۳۹ اگر $A - B$ متناهی باشد، A متناهی است.
- ۴۰ اگر $A - B$ نامتناهی باشد، A حتماً نامتناهی است ولی B و $B - A$ می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۴۱

مجموعه‌های داده شده را روی نمودار ون با رنگ کردن مشخص کنید.

کتاب درسی



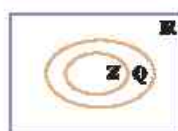
ب) مجموعه $\mathbb{R} - Q$



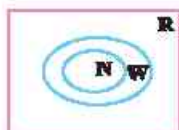
آ) مجموعه اعداد صحیح منفی (غیرحسابی)



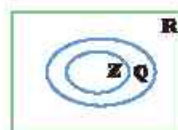
د) مجموعه $Q \cup (\mathbb{R} - Q)$



پ) مجموعه $Q \cap (\mathbb{R} - Q)$



ج) مجموعه اعداد حسابی غیرطبیعی

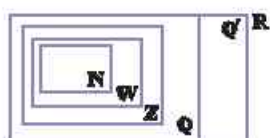


ت) مجموعه اعداد گویای غیرصحیح

منتخب مدارس کشور

جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	نوع بازه	بازه	شماره سطر
	$\{x \in \mathbb{R} \mid 6 < x < 8\}$	باز	$(6, 8)$	۱
	$\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 1\}$	نیم باز		۲
			$[-1, 1]$	۳
			$(-2, 3) \cup \{3, \sqrt{2}\}$	۴
			$(-\infty, 1] - \{1\}$	۵

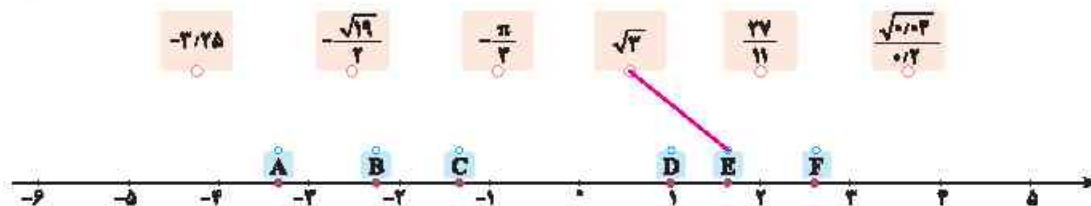


اعداد $\frac{\sqrt{81}}{3}, -\sqrt{49}, -\frac{\pi}{5}, \frac{\sqrt{7}}{2}, \sqrt{0.09}, -\frac{4}{9}, \frac{3}{5}$ و ۰ را روی شکل و در محل مناسب بنویسید.

کتاب درسی

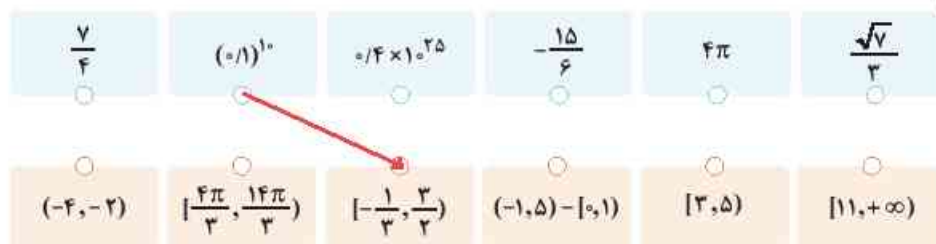
با توجه به نقاط مشخص شده روی محور، جای هر کدام از اعداد زیر را مانند نمونه به کمک فلش مشخص کنید. کدام یک از این اعداد گنگ هستند؟ دور آن‌ها خط بکشید.

کتاب درسی



هر یک از اعداد واقع در سطر اول، عضو یک یا چند تا از بازه‌های واقع در سطر دوم هستند. هر عدد را به بازه یا بازه‌های نظیر آن وصل کنید. (مانند نمونه)

کتاب درسی



منتخب مدارس اهواز

مجموعه‌های زیر را روی محور نشان داده و سپس آن‌ها را در صورت امکان به صورت اجتماع بازه‌ها بنویسید.

ب) $[-2, 2) - \mathbb{Z}$

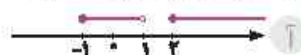
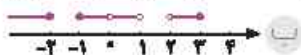
پ) $\{-2, 2\} - \mathbb{Z}$

د) $\mathbb{R} - [-2, 1)$

آ) $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$

منتخب مدارس یزد

در شکل‌های زیر، مجموعه‌هایی که نمایش هندسی آن‌ها روی محور رسم شده است را به صورت اجتماعی از بازه‌ها بنویسید.



منتخب مدارس کشور

حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آن‌ها روی یک محور به دست آورید.

$$\text{الف} \quad (-3, 2) \cup [-4, 3] \quad \text{ب} \quad (-1, 2] \cap [1, +\infty) \quad \text{پ} \quad (-\infty, 4) \cap (0, 2] \quad \text{ت} \quad (-\infty, a] \cap (a-1, +\infty)$$

$$\text{ث} \quad (\mathbb{R} - [0, 2)) \cap (-1, 3] \quad \text{ج} \quad (0, 3] - [1, +\infty) \quad \text{ح} \quad (-\infty, 3) - (-1, 1]$$

۴۹ اگر $A = [-1, 2]$ و $B = (1, 3]$ و $C = [-2, 2]$ باشد، مجموعه‌های خواسته شده زیر را به کمک رسم آن‌ها روی محور بیابید. نوع بازه‌ها را در قسمت‌های (آ) تا (ت) مشخص کنید.

منتخب مدارس کشور

$$\text{آ} \quad A \cap B \quad \text{ب} \quad A \cup B \quad \text{پ} \quad A - B \quad \text{ت} \quad B - A$$

$$\text{ث} \quad C - A \quad \text{ج} \quad (C \cup B) - A \quad \text{ح} \quad (C - A) \cup (A - B)$$

منتخب مدارس رشت

اگر $x \in (6x - 15, 5x - 7)$ باشد، محدوده x را به دست آورید.

منتخب مدارس یاسوج

اگر $A = (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ و $B = (-\infty, 5) \cap [-4, +\infty)$ باشد، مجموعه $A \cap B$ را بیابید.

منتخب مدارس ابهر

اگر $[-1, b] \cup [a, 7] = [-2, 9]$ باشد، آن‌گاه a و b را بیابید.

منتخب مدارس ری

اگر $\{a\} = (-\infty, \frac{1-m}{4}] \cap [\frac{-2m-1}{5}, +\infty)$ باشد، مقدار m و a را بیابید.

منتخب مدارس کاشان

اگر $\mathbb{R} = (-\infty, \frac{2m+5}{7}] \cup (\frac{m-1}{2}, +\infty)$ باشد، محدوده m را پیدا کنید.

منتخب مدارس سناری

اگر $[7, 16] = (a - 2b, 9) \cup (7, 2a + 1)$ شود، مقادیر a و b را بیابید. ($b \in \mathbb{Z}$)

منتخب مدارس سناری

مقدار a را به گونه‌ای بیابید که مجموعه $\{3a\} \cup (a - 2, 2a + 1)$ ، بازه‌ای نیم باز باشد.

کتاب درسی

فرض کنید A مجموعه تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰ باشد.

آ یک زیرمجموعه متناهی و یک زیرمجموعه نامتناهی از A بنویسید.

ب مجموعه‌ای بنویسید که A زیرمجموعه آن باشد.

پ دو زیرمجموعه نامتناهی مانند C و D از A بنویسید به طوری که $D \subseteq C$ باشد.

کتاب درسی

فرض کنید $B \subseteq A$ باشد، آن‌گاه عبارات درست و نادرست را مشخص کنید.

آ اگر A متناهی باشد، لزوماً B نیز متناهی است.

ب اگر A نامتناهی باشد، لزوماً B نیز نامتناهی است.

پ اگر B نامتناهی باشد، لزوماً A نیز نامتناهی است.

ت اگر B متناهی باشد، مجموعه A می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

کتاب درسی

بازه $(-2, 3)$ را در نظر بگیرید.

آ دو عدد گنگ و دو عدد گویا در این بازه نام ببرید.

ب در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویا و گنگ موجود در این بازه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

پ در مورد متناهی یا نامتناهی بودن Q و Q' چه می‌توان گفت؟

کتاب درسی

برای هر کدام از قسمت‌های زیر، دو مجموعه نامتناهی A و B (در صورت وجود) مثال بزنید.

آ $A \cap B$ متناهی باشد.

ب $A \cap B$ نامتناهی باشد.

پ مجموعه $A \cap B$ عضو نداشته باشد.

ت $A \cup B$ متناهی باشد.

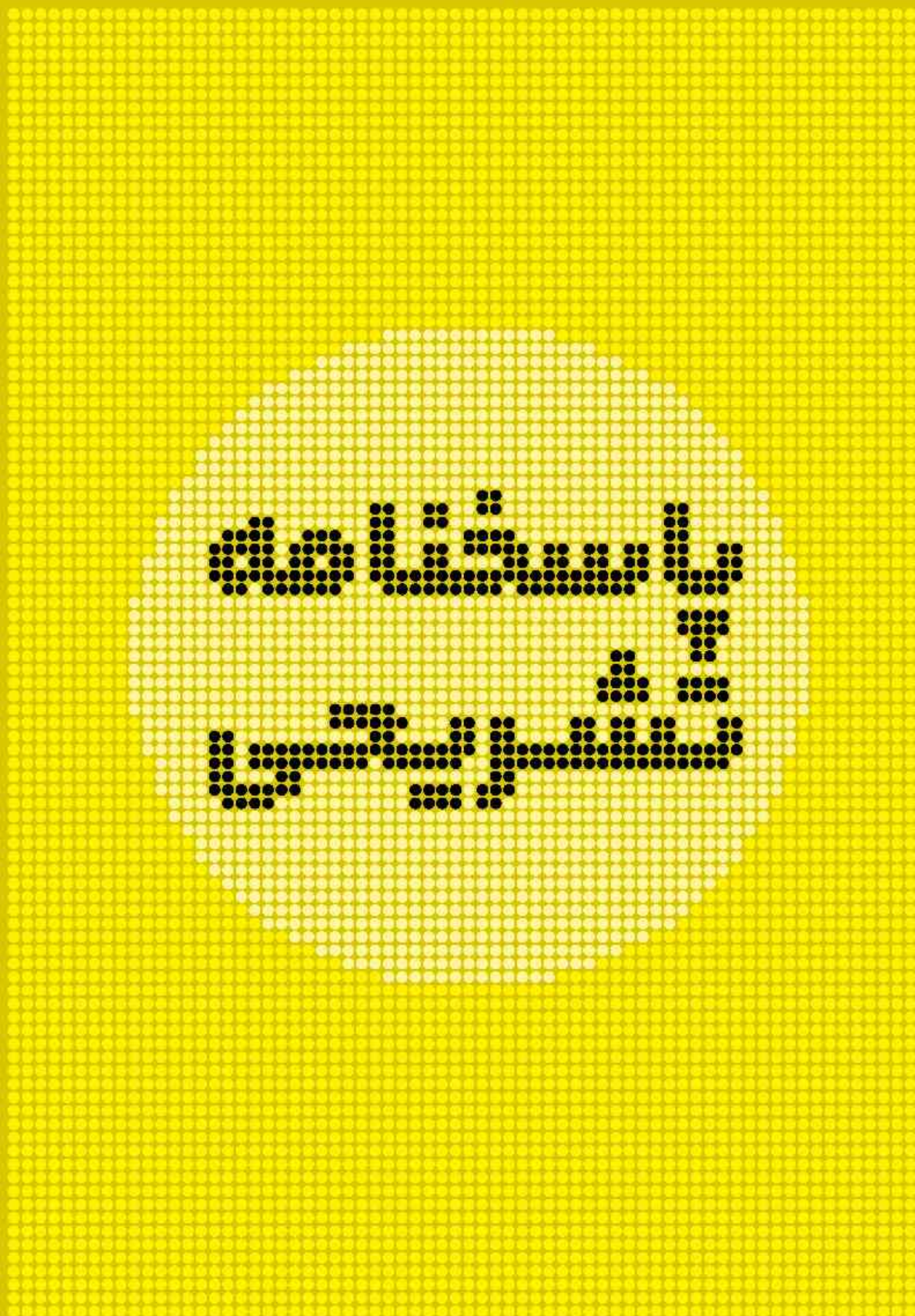
ث $A \cup B$ نامتناهی باشد.

ج $B \subseteq A$ بوده و $A - B$ دو عضو باشد.

منتخب مدارس شیراز

اگر A یک مجموعه متناهی و B یک مجموعه نامتناهی باشد، متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

$$\text{آ} \quad B - A \quad \text{ب} \quad A - B \quad \text{پ} \quad A - (A \cup B) \quad \text{ت} \quad B - (A \cap B)$$



فصل

۱۰ نادرست است. زیرا $\sqrt{36} = 6$ عددی گویا بوده و عضو Q' نیست.

۱۱ درست است. زیرا $-\frac{5}{6}$ عدد صحیح نیست.

۱۲ نادرست است. زیرا $\sqrt{7}$ عددی گنگ است، پس $-\frac{\sqrt{7}}{8}$ که

حاصل تقسیم عددی گنگ بر عددی گویا است، هم عددی گنگ و عضو Q' است نه Q .

۱۳ درست است. زیرا $N \subseteq W \Rightarrow N \cap W = N$

۱۴ درست است. زیرا $W \subseteq Z \Rightarrow W - Z = \emptyset$

۱۵ نادرست است. زیرا Q' اعداد گنگ و N اعداد طبیعی هیچ اشتراکی با هم ندارند. پس $Q' \cap N = \emptyset$

۱۶ نادرست است. زیرا $Q' \subseteq IR \Rightarrow Q' - IR = \emptyset$

۱۷ درست است. زیرا:

$$N \cup ((Z - N) \cap W) = N \cup (\{0, -1, -2, \dots\} \cap \{0, 1, 2, \dots\}) \\ = N \cup \{0\} = W$$

۱۸ درست است زیرا:

$$9 < 15 < 16 \Rightarrow 3 < \sqrt{15} < 4 \Rightarrow \frac{3}{2} < \frac{\sqrt{15}}{2} < 2$$

یعنی ۲ از $\frac{\sqrt{15}}{2}$ بزرگتر است.

$$16 < 17 < 25 \Rightarrow 4 < \sqrt{17} < 5 \Rightarrow 2 < \frac{\sqrt{17}}{2} < \frac{5}{2}$$

یعنی ۲ از $\frac{\sqrt{17}}{2}$ کوچکتر است.

پس ۲ متعلق به بازه $(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{\sqrt{17}}{2})$ است.

۱۹ درست است. تهی زیر مجموعه هر مجموعه‌ای است.

۲۰ نادرست است. زیرا $(1, 3)$ بازه‌ای باز است و شامل ۱ و ۳ نیست.

۲۱ درست است. زیرا a عضو مجموعه دو عضوی $\{a, b\}$ است.

۲۲ نادرست است. زیرا مجموعه $\{1, 3\}$ دو عضو ۱ و ۳ را دارد و ۲ عضو آن نیست.

$$\Rightarrow B - A = [-2, 3] - [-1, 2] \\ = [-2, -1) \cup (2, 3]$$

$$W - (N \cap Z) \stackrel{N \subseteq Z \Rightarrow N \cap Z = N}{=} W - N$$

$$= \{0, 1, 2, 3, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{0\}$$

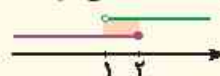
$$(Q - Q') \cap Z = (Q - (Q \cap Q')) \cap Z = Q \cap Z \stackrel{Z \subseteq Q}{=} Z$$

$$[-4, \frac{3}{2}) \Rightarrow \text{طول بازه} = \frac{3}{2} - (-4) = \frac{3}{2} + 4 = \frac{3+8}{2} = \frac{11}{2} = 5.5$$

$$2m + 1 \in (3, 5] \Rightarrow 3 < 2m + 1 \leq 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 < 2m + 1 \Rightarrow 2 < 2m \Rightarrow 1 < m \\ \text{و} \\ 2m + 1 \leq 5 \Rightarrow 2m \leq 4 \Rightarrow m \leq 2 \end{cases}$$

بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم که جواب برابر $1 < m \leq 2$ می‌شود.



۵ چون $B - A \subseteq B$ است و $B - A$ نامتناهی است، پس B نیز نامتناهی خواهد بود.

۶ اگر $W - B$ متناهی باشد، پس حتماً B نامتناهی بوده است. زیرا اگر B متناهی باشد، $W - B$ نامتناهی می‌شود که خلاف فرض است.

$$A = \{\frac{1}{x} \mid x \in N\} \stackrel{x=1, 2, 3, \dots}{=} A = \{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$$

$$B = \{\frac{x}{8} \mid x \in N\}$$

$$\stackrel{x=1, 2, 3, \dots}{=} B = \{\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8}, \frac{9}{8}, \dots\}$$

$$\Rightarrow A \cap B = \{\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\} \Rightarrow A \cap B \text{ متناهی است}$$

۸ $A = W$ نامتناهی و B متناهی است. پس $A - B$ نامتناهی و $B - A$ متناهی است.

۹ طبق درسنامه اگر $A \subseteq B$ و A نامتناهی باشد، B نیز نامتناهی خواهد بود.



۳۷ نادرست است. اگر $A \cup B$ متناهی باشد چون $A, B \subseteq A \cup B$ نتیجه می‌گیریم که A و B نیز متناهی و در نتیجه $A \cap B$ نیز متناهی است نه نامتناهی!

۳۸ نادرست است. مثلاً اگر $A = \{1\}$ و $B = \mathbb{N}$ آن‌گاه $A \cup B = \mathbb{N}$ شده که نامتناهی است (شرط مسئله برقرار است). در حالی که A متناهی بود! پس نتیجه مهم این است که اگر $A \cup B$ نامتناهی باشد، آن‌گاه حداقل یکی از دو مجموعه A یا B باید نامتناهی باشد و لزومی ندارد که هر دوی A و B نامتناهی باشد. البته $A \cap B$ می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. مثلاً با توجه به شرط $A \cup B$ نامتناهی، اگر $A = \mathbb{N}$ و $B = \mathbb{W}$ باشد. آن‌گاه $A \cap B = \mathbb{N}$ شده که نامتناهی است و اگر $A = \{1\}$ و $B = \mathbb{N}$ باشد، $A \cap B$ برابر $\{1\}$ شده که متناهی است.

۳۹ نادرست است. مثلاً اگر $A = \mathbb{W}$ و $B = \mathbb{N}$ باشد، در این صورت $A - B = \{0\}$ متناهی است ولی A نامتناهی بود.

۴۰ درست است. زیرا $A - B \subseteq A - B$ بوده و اگر $A - B$ نامتناهی باشد، با توجه به درسنامه، A نیز نامتناهی خواهد بود. برای بررسی وضعیت B ، فرض کنید، $A = \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه B می‌تواند مثلاً مجموعه متناهی $\{1\}$ باشد یا مجموعه نامتناهی $\mathbb{N}$. در هر دو حالت $A - B$ نامتناهی است. هم چنین در حالتی که B متناهی باشد، آن‌گاه $B - A$ هم متناهی خواهد بود. چون زیرمجموعه آن است و در حالتی که B نامتناهی باشد، چون A هم نامتناهی است $B - A$ می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

۴۱

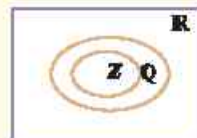
۱) مجموعه اعداد صحیح منفی $\{-1, -2, \dots\}$



۲) اعداد گنگ $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$



۳) $\emptyset$ = اعداد گنگ با اعداد گویا اشتراکی ندارد $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \emptyset$ پس جایی را نمی‌توان رنگ کرد.



۴) کل اعداد حقیقی = (اعداد گنگ) $\cup$ (اعداد گویا) $\mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$



۲۳ نادرست است. زیرا مثلاً عدد ۵ عضو مجموعه $(2, 5]$ نیست ولی عضو مجموعه $[2, 5]$ است!

۲۴ درست است.

۲۵ نادرست است. زیرا عدد ۴ عضو مجموعه $[-1, 4)$ است. پس اگر این مجموعه بخواهد زیرمجموعه $[-1, 4)$ باشد، مجموعه $[-1, 4)$ هم باید ۴ را داشته باشد در حالی که این‌طور نیست!

۲۶ نادرست است. زیرا اعداد a و b در مجموعه $[a, b]$ هستند ولی در مجموعه (a, b) حضور ندارند.

۲۷ درست است. زیرا $\sqrt{6}$ از ۲ بزرگتر و $\sqrt{2} - 1 \approx 1/4 - 1 = -3/4$ پس بازه $(\sqrt{2} - 1, \sqrt{6})$ شامل اعداد ۱ و ۲ است، پس مجموعه دو عضوی $\{1, 2\}$ زیرمجموعه $(\sqrt{2} - 1, \sqrt{6})$ است.

۲۸ نادرست است. زیرا مجموعه $\{3, 6\}$ تنها دو عضو ۳ و ۶ را دارد، در حالی که مجموعه $(3, 6)$ شامل تمام اعداد حقیقی بین ۳ و ۶ است. پس مجموعه $(3, 6)$ نمی‌تواند زیرمجموعه مجموعه دو عضوی $\{3, 6\}$ باشد.

۲۹ درست است. مجموعه $(1, 4) \cap (0, 4) = (1, 4)$ و چون $\pi \approx 3/14$ پس π عضو این مجموعه است.

۳۰ درست است. مجموعه $(1, 4) \cap (5, 7) = \emptyset$ بوده و $\emptyset$ زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است.

۳۱ درست است.

۳۲ درست است.

۳۳ درست است. زیرا $B \subseteq A \cup B$ و چون B نامتناهی است، پس $A \cup B$ هم نامتناهی می‌شود و چون $A \cap B \subseteq A$ است و A متناهی است پس $A \cap B$ نیز متناهی خواهد بود.

۳۴ نادرست است. زیرا $A \cap B$ می‌تواند نامتناهی یا متناهی باشد. (به مثال درسنامه رجوع کنید). البته $A \cup B$ نامتناهی است.

۳۵ نادرست است. زیرا مثلاً اگر A مجموعه اعداد صحیح نامثبت و B مجموعه اعداد حسابی باشد آن‌گاه $A \cap B = \{0\}$ متناهی است ولی A و B و $A \cup B$ نامتناهی هستند.

۳۶ درست است. زیرا $A \cap B$ زیرمجموعه هم A و هم B است. پس اگر $A \cap B$ نامتناهی باشد، دو مجموعه A و B نیز نامتناهی و در نتیجه $A \cup B$ نیز نامتناهی است.

۴۵ ● عدد $\frac{7}{4} = 1/75$ عضو مجموعه زیر است:

$$(-1, 5) - [0, 1) = (-1, 0) \cup (1, 5)$$

● عدد $(\pi/1)^{1/2}$ عددی بین صفر و یک است. پس عضو مجموعه $[-\frac{1}{3}, \frac{3}{2})$ است.

● عدد $0/4 \times 10^{25}$ عددی خیلی بزرگ است و لذا عضو مجموعه $(11, +\infty)$ است.

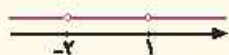
● عدد $\frac{-15}{6} = -2/5$ عضو بازه $(-4, -2)$ است.

● عدد $4\pi \approx 4(3/14) = 12/56$ بوده که عضو بازه‌های $(11, +\infty)$ و $(\frac{4\pi}{3}, \frac{14\pi}{3})$ است.

دقت کنید 4π بزرگتر از $\frac{4\pi}{3}$ است و از $\frac{14\pi}{3}$ کوچکتر است زیرا $\frac{14\pi}{3} > 4\pi = \frac{12\pi}{3}$ پس 4π در داخل بازه $(\frac{4\pi}{3}, \frac{14\pi}{3})$ قرار دارد.

● عدد $\frac{\sqrt{7}}{3} \approx \frac{2}{3}$ حدود $\frac{2}{3}$ است. لذا عضو بازه $[-\frac{1}{3}, \frac{3}{2})$ می‌باشد.

۴۶ $\mathbb{R} - \{-2, 1\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$



ب) $\mathbb{R} - [-2, 1) = (-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$



پ) $\{-2, 2\} - \mathbb{Z} = \emptyset$



این قسمت را نمی‌توان به عنوان اجتماع بازه‌ها نوشت.

د) $[-2, 2) - \mathbb{Z} = (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$



۴۷ ا) $[-1, 1) \cup [2, +\infty)$

ب) $(-\infty, -2) \cup [-1, 0) \cup (0, 1) \cup (2, 3]$

۴۸ ا) $(-2, 2) \cup [-4, 2] = [-4, 2]$

ب) $(-1, 2) \cap [1, +\infty) = [1, 2]$

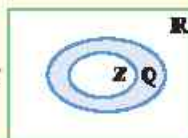
پ) $(-\infty, 4) \cap (0, 2] = (0, 2]$

د) $(-\infty, a] \cap (a-1, +\infty) = (a-1, a]$

ه) $(\mathbb{R} - [-2, 2)) \cap (-1, 2] = (-1, 0) \cup [2, 3]$

۴۹

۴۲ $\mathbb{Q} - \mathbb{Z} =$ مجموعه اعداد گویای غیر صحیح (ث)

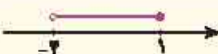


ج) $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$ مجموعه اعداد حسابی غیر طبیعی



! این مجموعه (ناحیه آبی) تنها شامل عدد صفر می‌باشد.

۴۲ سطر (۲): $[-4, 1]$



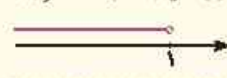
۴۲ سطر (۳): $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ بازه بسته



۴۲ سطر (۴): $(-2, 2) \cup \{2, \sqrt{2}\} = (-2, 2]$ نیم باز



۴۲ سطر (۵): $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\} = (-\infty, 1)$ باز



۴۳ $\frac{\sqrt{81}}{3} = \frac{9}{3} = 3 \in \mathbb{N}$ و $-\sqrt{49} = -7 \in \mathbb{Z}$

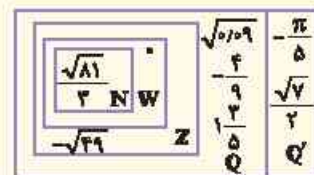
$-\frac{\pi}{5} \in \mathbb{Q}'$ و $\frac{\sqrt{7}}{2} \in \mathbb{Q}'$

$\sqrt{0/09} = \sqrt{(0/3)^2} = 0/3 = \frac{3}{10} \in \mathbb{Q}$

$\frac{-4}{9} \in \mathbb{Q}$ و $1\frac{3}{5} = \frac{8}{5} \in \mathbb{Q}$ و $0 \in \mathbb{W}$

! می‌دانیم وقتی مثلاً می‌نویسیم $3 \in \mathbb{N}$ ، عدد سه، عضو $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ هم هست.

حال این اعداد را در محل مناسب در شکل می‌نویسیم:



۴۴ عدد $-3/25$ را به نقطه A، عدد $-\frac{\sqrt{19}}{2} = -\frac{4/...}{2} = -2/...$

را به نقطه B، عدد $-\frac{\pi}{3} \approx -1/...$ را به نقطه C، عدد

$\frac{27}{11} = 2/...$ را به نقطه F و عدد $\frac{\sqrt{0/4}}{0/2} = \frac{\sqrt{(0/2)^2}}{0/2} = \frac{0/2}{0/2} = 1$

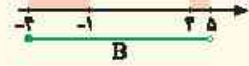
را به نقطه D باید وصل کنیم. (دقت کنید اعداد $\sqrt{3}$ ، $-\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{\sqrt{19}}{2}$

اعداد گنگ هستند.)

۵۱ ابتدا مجموعه‌های $A = (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ و

$B = (-\infty, 5) \cap [-4, +\infty) = [-4, 5)$ را روی محور رسم می‌کنیم و سپس

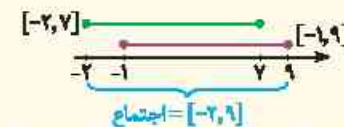
به کمک نمودار اشتراک A و B را می‌یابیم.



$$\Rightarrow A \cap B = [-4, -1) \cup (4, 5)$$

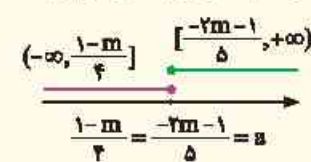
۵۲ طبق فرض $[-1, b] \cup [a, 7] = [-2, 9]$ شده است. پس b باید

برابر ۹ و a باید برابر ۲ باشد، علت آن را روی محور بیان می‌کنیم:



۵۳ برای آن که اشتراک دو بازه $(-\infty, \frac{1-m}{4})$ و $[\frac{-2m-1}{5}, +\infty)$

تنها یک عدد (a) شود. به ناچار باید وضعیت دو بازه به صورت زیر باشد:



حال معادله زیر را حل می‌کنیم تا m به دست آید:

$$\frac{1-m}{4} = \frac{-2m-1}{5} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 5 - 5m = -8m - 4$$

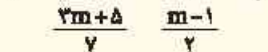
$$\Rightarrow 3m = -9 \Rightarrow m = -3$$

به ازای $m = -3$ دو بازه به صورت $(-\infty, 1]$ و $[1, +\infty)$ درمی‌آیند که

اشتراک آن‌ها ۱ می‌شود. پس $a = 1$.

۵۴ ابتدا دو مجموعه $(\frac{m-1}{3}, +\infty)$ و $(-\infty, \frac{3m+5}{7})$ را روی

محور رسم می‌کنیم:



باتوجه به شکل، اگر قرار باشد اجتماع این دو مجموعه، $\mathbb{R}$ (مجموعه اعداد

حقیقی) شود، باید داشته باشیم:

$$\frac{3m+5}{7} \geq \frac{m-1}{3} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3(3m+5) \geq 7(m-1)$$

$$\Rightarrow 9m + 15 \geq 7m - 7 \Rightarrow 12 \geq m$$

۵۵ اجتماع دو بازه $(a - 2b, 9)$ و $(7, 3a + 1)$ برابر $[7, 16]$ شده

است. پس حتماً $3a + 1$ برابر ۱۶ بوده و داریم:

$$3a + 1 = 16 \Rightarrow 3a = 15 \Rightarrow a = 5$$

از طرفی چون ابتدای بازه اجتماع عدد ۷ بوده، نتیجه می‌گیریم

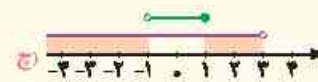
$7 \leq a - 2b$ می‌باشد. هم‌چنین انتهای بازه همیشه بزرگ‌تر از ابتدای

بازه است، پس در بازه $(a - 2b, 9)$ داریم: $a - 2b < 9$. بنابراین:

$$7 \leq a - 2b < 9 \xrightarrow{a=5} 7 \leq 5 - 2b < 9 \xrightarrow{-5} 2 \leq -2b < 4$$

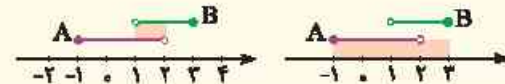
$$\xrightarrow{+(-2)} \xrightarrow{b \in \mathbb{Z}} -1 \geq b > -2 \Rightarrow b = -1$$

$$\text{ج) } (-\infty, 2) - [1, +\infty) = (-\infty, 1)$$



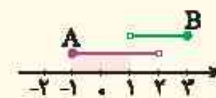
$$(-\infty, 2) - (-1, 1] = (-\infty, -1] \cup (1, 2)$$

۴۹

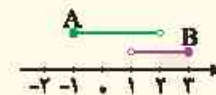


۱) بازه بسته: $A \cup B = [-1, 3]$ بازه باز: $A \cap B = (1, 2)$

۲) بازه بسته: $A - B = A - (A \cap B) = [-1, 2) - (1, 2) = [-1, 1]$



۳) بازه بسته: $B - A = B - (A \cap B) = (1, 2) - (1, 2) = [2, 2]$



۴) اشتراک را از حلقه می‌کنیم
 $C - A = [-2, -1) \cup \{2\}$

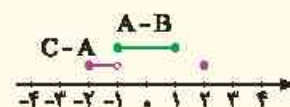


$$(C \cup B) - A = [-2, 3] - [-1, 2) = [-2, -1) \cup [2, 3]$$

$$\text{ج) } (C - A) \cup (A - B)$$

$$= [-2, -1) \cup \{2\} \cup [-1, 1] = [-2, 1] \cup \{2\}$$

با توجه به قسمت (ب) با توجه به قسمت (ت)



۵۰ چون عدد ۳ در بازه $(5x - 7, 6x - 15)$ حضور دارد پس داریم:

$$\begin{cases} 6x - 15 < 3 \Rightarrow 6x < 18 \xrightarrow{+6} x < 3 \\ 3 < 5x - 7 \Rightarrow 10 < 5x \xrightarrow{+5} 2 < x \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} \Rightarrow x \in (2, 3)$$



کاج



پیشرفتن

فرمول

لیسنس

امتنان بار

ریاضی دہم





آزمون ۱ فصل اول | زمان پاسخگویی: ۱۲۰ دقیقه

۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.	۱
۲	ا. حاصل $(\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}) - (\mathbb{Q} \cup \mathbb{W})$ برابر با مجموعه است. ب. اگر $A = [-1, 2) \cup [4, +\infty)$ و مجموعه مرجع، مجموعه اعداد حقیقی باشد، آن گاه $A' =$ پ. جمله $(2n - 2)$ ام یک دنباله به صورت $\frac{2\sqrt{n+5}}{n^2+3}$ است. جمله هفتم این دنباله برابر است. ت. در دنباله هندسی با جمله عمومی $t_n = \frac{2}{3 \times 2^n}$، قدرنسبت برابر است.	
۲	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. ا. $((-2, 3] \cap (-\infty, 2)) \subseteq [-2, 2]$ ب. اگر $A \subseteq B$ و B' نامتناهی باشد، آن گاه A' نیز نامتناهی است. پ. اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند، آن گاه $n(A - B') = 0$ است. ت. دنباله ای وجود ندارد که هم حسابی و هم هندسی باشد.	
۳	اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 < x \leq 2\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 < x \leq 4\}$ باشد، حاصل مجموعه های زیر را به دست آورید. ا. $A \cap B$ ب. $A' - B$	
۴	اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ مجموعه مرجع باشد و $A' = \{1, 2, 6\}$ و $B = \{5, 6, 7\}$، آن گاه حاصل $A \cap (A' - B')$ را بیابید.	
۵	اگر $n(U) = 100$، $n(A') = 70$، $n(B) = 25$ و $n(B - A) = 19$ باشد، آن گاه مطلوب است: محاسبه: ا. $n(A \cup B)$ ب. $n(A' \cup B')$	



۹/۷۵

متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

آ اعداد طبیعی ۲ رقمی

ب تمام دایره‌های به مرکز مبدأ

پ کسرهای مثبت با صورت یک

۷۵

در بررسی ۵۰۰ کشاورز، ۳۷۰ نفر دارای مزرعه‌ی چای و ۲۰۰ نفر دارای شالیزار هستند. تعداد آن‌هایی که نه مزرعه‌ی چای و نه شالیزار دارند، برابر تعداد کشاورزانی است که فقط شالیزار دارند. چند کشاورز فقط مزرعه‌ی چای دارند؟

۱/۵

در یک الگوی خطی جمله پنجم برابر ۳۲ و جمله دوازدهم برابر ۶۷ است. جمله چندم این الگو ۲۹۲ است؟

۱/۵

جمله عمومی الگوی مقابل را نوشته و سپس جمله سی‌ام آن را بیابید. $۶, ۱۶, ۳۰, ۴۸, \dots$

۱۰

در الگوی زیر، تعداد دایره‌ها در شکل نهم را به دست آورید.



۱۱

در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۳ و مجموع سه جمله دوم ۳۹ است. مجموع جملات نهم و دهم را بیابید.

۱۲

بین ۲۰ و ۸۰ به تعداد مشخص شده در شکل، واسطه حسابی درج کنید.





۱۳

جمله سوم یک دنباله هندسی ۱۲ و جمله ششم آن ۹۶ است. در این صورت:

آ جمله عمومی دنباله را بیابید.

ب جمله چندم دنباله ۳۰۷۲ است؟

۷۵

۱۴

بین دو عدد $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ سه واسطه هندسی مثبت درج کنید. (جمله اول)

۱

۱۵

قیمت دوچرخه‌ای ۱۰ میلیون تومان است. اگر دوچرخه دست دوم در هر سال ۵٪ نسبت به سال قبل، کاهش قیمت داشته باشد؛ آن‌گاه بعد از ۳ سال، به چه قیمتی می‌توان دوچرخه را فروخت؟

۱