

پایه دوازدهم
رشته علوم تجربی

مؤلف کتاب

مہندس سجاد عظمتی

همکار مؤلف

علی احمدی قزلدشت

نريمان فتح الله



مهدي عزيزي

امتحانات نهایی، اکنون بیش از همیشه سرنوشت ساز شده‌اند؛ جایی که تلاش و پشتکار، آینده را رقم می‌زند. این کتاب، همراهی است برای شما، تا با اطمینان، راهی هموار به سوی موفقیت طی کنید.

قدم به قدم، به سوی درک عمیق‌تر

در درسنامه‌ها، هر مفهوم و نکته‌ای را با دقت و جزئیات بررسی کرده‌ایم. این درسنامه‌ها راهی به سوی درک بهتر مطالب و مهارت حل مسئله‌اند. درسنامه‌ها همچون چراغی روشن هستند، به‌ویژه برای کسانی که در طول سال، فرصت مرور کتاب درسی را نداشته‌اند.

شناخت ذهن طراحان امتحان نهایی

با دقت زیاد، تمرین‌ها، فعالیت‌ها، سؤالات کار در کلاس، و حتی تمرین‌های «کتاب راهنمای معلم» را بررسی کرده‌ایم. سؤالات امتحانات نهایی سال‌های گذشته و شبه‌نهایی‌های شهرهای مختلف نیز در این مجموعه جای گرفته‌اند تا شما را با شیوه تفکر طراحان آشنا کنند. همچنین، از سؤالات امتحانات نهایی رشته ریاضی استفاده کرده‌ایم تا خیالتان از همه سؤالات راحت باشد.

سؤالات [41] انتخابی برای بهترین‌ها

اگر می‌خواهید کاملاً آماده باشید، بخش «سؤالات [41]»، مجموعه‌ای چالش برانگیزتر از امتحانات نهایی است. این سؤالات طراحی شده‌اند تا شما را فراتر از سطح معمول امتحانات نهایی ببرند. هر قدر خود را با این سؤالات محک بزنید، به موفقیت در امتحان نهایی نزدیک‌تر می‌شوید.

«برای فتح ستاره‌ها، باید نگاهت بالاتر از آسمان باشد.»

چگونه مرور کنیم؟

نگران کمبود زمان نباشید! ما نکات کلیدی را به صورت خلاصه و جامع در «کتابچه» گردآوری کرده‌ایم. همچنین، با ارائه راهنمای تصحیح و نحوه نگارش پاسخ‌برگ، کمک می‌کنیم تا پاسختان مطابق انتظارات آزمون‌های نهایی باشد.

در پایان:

این کتاب، همراه شماست تا آرامش را به لحظات حساس امتحانات بیاورد. بدانید که هر گام شما را یک قدم به موفقیت نزدیک‌تر می‌کند. امیدوارم این مسیر، شما را به نمره‌ای طلایی و لبخندی از رضایت برساند.

سپاسگزاری

از مدیریت محترم انتشارات گاج، جناب آقای محمد جوکار که با حمایت‌های بی‌دریغ خود، زمینه نشر و دسترسی گسترده این اثر را فراهم کردند، قدردانی می‌کنم.

همچنین، از همکاران گرامی‌ام که با دانش، تجربه و پشتیبانی مؤثر و سازنده، من را در روند تألیف و بهبود محتوای کتاب یاری کردند، نهایت سپاس را دارم. اساتید: علی احمدی قزلدشت، فریمان فتح‌الهی، امیرحسام شکری



عناوین فصل‌ها	درسنامه و سؤالات	پاسخ تشریحی	پاسخ تصویری سؤالات
تابع	۱۰	۱۹۶	درس ۱ درس ۲ درس ۳
مثلثات	۵۴	۲۲۲	درس ۱ درس ۲
حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت	۸۰	۲۳۶	درس ۱ درس ۲
مشتق	۱۰۲	۲۴۷	درس ۱ درس ۲ درس ۳
کاربرد مشتق	۱۳۶	۲۷۲	درس ۱ درس ۲
هندسه	۱۶۱	۲۸۶	درس ۱ درس ۲
احتمال	۱۸۸	۲۹۷	

آزمون‌های نوبت اول، نوبت دوم، نهایی و فصل به فصل

عناوین آزمون‌ها	سؤالات	پاسخ‌ها
نوبت اول تألیفی (دو نمونه آزمون نوبت اول)	۳۰۴	۳۱۷
نوبت دوم تألیفی (چهار نمونه آزمون نوبت دوم)	۳۰۶	۳۱۸
امتحان نهایی (شهریور و دی ۱۴۰۴ و تیر ۱۴۰۵)	۳۱۲	۳۲۳



لینک در اینجا

برای دریافت ۷ دوره آزمون تألیفی فصل به فصل QR-Code را اسکن کنید.
(دریافت آزمون‌ها نیازمند عضویت در پیام‌رسان بله و یا ای‌اچ‌اس است.)



لینک در بله



www.gajlive.ir





۱۵۵
دقیقه



جلسه
توابع صعودی
و توابع نزولی -
توابع یکنوا



۱۰۵
دقیقه



جلسه
توابع
چند جمله‌ای -
تابع درجه ۳



۲۳۰
دقیقه



جلسه
تبديل
نمودار
توابع



۱۲۰
دقیقه



جلسه
ترکيب
توابع



۸۵
دقیقه



جلسه
تابع
وارون



فصل



۶۵
دقیقه



جلسه
تاثرات



۱۶۵
دقیقه



جلسه
تناوب



۱۹۵
دقیقه



جلسه
معادلات
مثلثاتی



۶۰
دقیقه



جلسه
نسبت‌های
مثلثاتی زوایای
دو برابر کمان



فصل



۷۵
دقیقه

جلسه



رفع ابهام
 $\div$



۴۵
دقیقه

جلسه



بخش پذیری
و
تقسیم



۱۳۰
دقیقه

جلسه



حد بی نهایت
(جدهای
نامتناهی)



۲۰
دقیقه

جلسه



همسایگی



۱۰۵
دقیقه

جلسه



حد در
بی نهایت



۶۰
دقیقه

جلسه



تعریف مشتق
تابع f در نقطه
 $x=a$



۱۲۵
دقیقه

جلسه



مفهوم مشتق
(شیب خط مماس
بر منحنی)



۲۱۰
دقیقه

جلسه



محاسبه
تابع مشتق
برخی توابع



۱۸۰
دقیقه

جلسه



مشتق پذیری
و پیوستگی



۷۵
دقیقه

جلسه



آهنگ
تغییر



۴۵
دقیقه

جلسه



مشتق
تابع مرکب /
قاعده زنجیری



فصل



۱۴۰
دقیقه

جلسه



بهینه‌سازی



۱۸۰
دقیقه

جلسه



اکسترم‌های
یک تابع و توابع
صعودی و نزولی



۸۰
دقیقه

جلسه



بیضی



۹۰
دقیقه

جلسه



تفکر تجسمی
و آشنایی با
مقاطع مخروطی

فصل



۱۳۰
دقیقه

جلسه



دایره



۱۲۰
دقیقه

جلسه



قانون
احتمال
کل

فصل



۵۰ ساعت آموزش
ویدئویی



کتاب
الکترونیکی

فرمول ۲۰ هیبرید یک کتاب نیست
یک دوره آموزشی کامل است



به دنیای هیبرید گاج
کتاب تخصصی ورود



www.gajlive.ir

۱

بخش



درسنامه

و سوالات تشریحی

فصل اول

درس اول: توابع چند جمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

ریاضی دوازدهم

تابع چند جمله‌ای

هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ که در آن n عددی صحیح و نامنفی و $(a_n \neq 0)$ و همه ضرایب عدد حقیقی هستند را یک تابع چند جمله‌ای درجه n می‌نامند.

دامنه همه توابع چند جمله‌ای $\mathbb{R}$ است. برد توابع چند جمله‌ای با درجه فرد نیز $\mathbb{R}$ است اما برد توابع چند جمله‌ای با درجه زوج را با روش‌هایی که در آینده بحث می‌کنیم، محاسبه می‌کنیم.

تا به حال با چند نوع تابع چند جمله‌ای آشنا شده‌ایم، درجه آن‌ها به صورت زیر است:

- درجه تابع ثابت $f(x) = c$ برابر صفر است.
- درجه تابع خطی $f(x) = mx + b$ برابر ۱ است.
- درجه تابع سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ برابر ۲ است.
- برای تابع $f(x) = 0$ درجه تعریف نمی‌شود.

مثال توابع زیر نمونه‌هایی از توابع چند جمله‌ای با درجه‌هایشان هستند:

- ۱ $f(x) = \frac{-3}{4}x + 5 \rightarrow$ درجه ۱
- ۲ $f(x) = \sqrt{2}x^3 + 2x + 5 \rightarrow$ درجه ۳
- ۳ $f(x) = (3x - 1)(x^2 + 5) \rightarrow$ درجه ۳
- ۴ $f(x) = x(x^3 + 4x - \sqrt{5}x^5) \rightarrow$ درجه ۶

نکته اگر در عبارتی، توان x عددی منفی یا غیر صحیح بود، یا x درون قدرمطلق یا جزء صحیح بود، آن عبارت چند جمله‌ای نیست.

مثال چند نمونه از توابعی که چند جمله‌ای نیستند:

- ۱ $f(x) = x^2 - |x|$
- ۲ $f(x) = 2x^5 - 2\sqrt{x}$
- ۳ $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} + 1$

سؤال درستی یا نادرستی عبارات را تشخیص دهید.

۱ تابع $f(x) = x^2 + 3|x| - 2$ تابعی چند جمله‌ای است.

۲ تابع $f(x) = (x-1)(x^2 + 5)$ تابعی چند جمله‌ای از درجه ۲ است.

پاسخ ۱ نادرست؛ به دلیل وجود قدرمطلق در ضابطه تابع، چند جمله‌ای نیست.

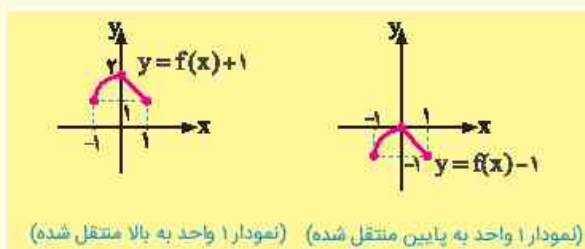
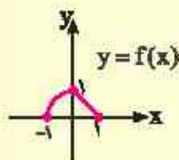
۲ نادرست؛ اگر دو پیرائت‌زا در هم ضرب کنیم حاصل، تابعی چند جمله‌ای از درجه ۳ می‌شود:

$$f(x) = (x-1)(x^2 + 5) = x^3 + 5x - x^2 - 5 \xrightarrow{\text{فرم استاندارد}} f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 5$$

یادآوری از پایه

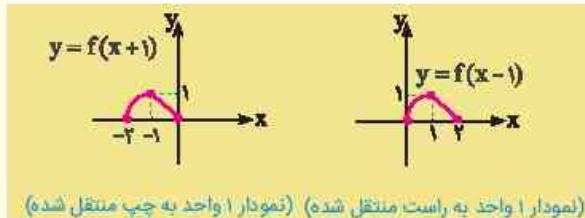
یادآوری قوانین انتقال از پایه

در سال‌های گذشته، با رسم و انتقال توابع مختلف آشنا شده‌ایم. حالا می‌خواهیم برای یادآوری، با یک نمونه، قوانین انتقال و قرینه‌یابی را بررسی کنیم. فرض می‌کنیم نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است:

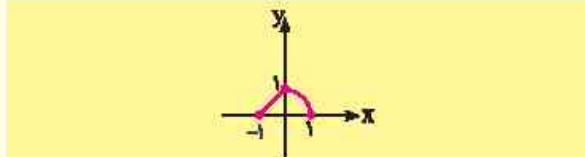


۱. انتقال قائم ← رسم نمودار $y = f(x) + k$:
نمودار $y = f(x)$ را k واحد در راستای محور y انتقال می‌دهیم.
اگر $k > 0$ باشد، منحنی به سمت بالا و اگر $k < 0$ باشد منحنی به سمت پایین می‌رود.

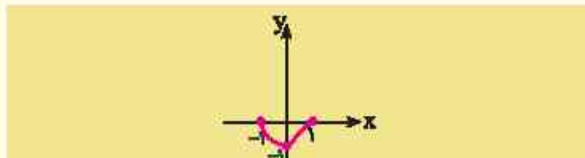
انتقال



۲. انتقال افقی ← رسم نمودار $y = f(x + k)$:
نمودار $y = f(x)$ را k واحد در راستای محور x انتقال می‌دهیم.
اگر $k > 0$ باشد، منحنی به سمت چپ و اگر $k < 0$ باشد، منحنی به سمت راست می‌رود.

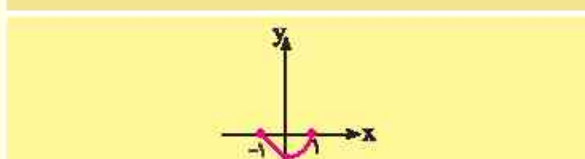


۳. قرینه نسبت به محور y ← رسم نمودار $y = f(-x)$:
نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور y قرینه می‌کنیم.



۴. قرینه نسبت به محور x ← رسم نمودار $y = -f(x)$:
نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم.

قرینه

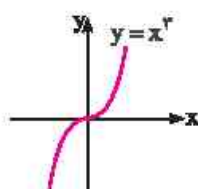


۵. قرینه نسبت به مبدأ مختصات ← رسم نمودار $y = -f(-x)$:
نمودار $y = f(x)$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم.

تابع درجه سوم

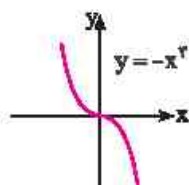
• هر تابع به صورت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ با شرط $a \neq 0$ ، یک تابع درجه ۳ است. دامنه و برد این تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

نمودار تابع $y = x^3$ با توجه به جدول مختصات به صورت مقابل است:



x	-۲	$-\frac{1}{2}$	-۱	۰	۱	$\frac{1}{2}$	۲
y	-۸	$-\frac{1}{8}$	-۱	۰	۱	$\frac{1}{8}$	۸

- نمودار تابع $y = x^3$ فقط در نقطه به طول $x = 0$ محور x ها را قطع می‌کند، یعنی نقطه $x = 0$ تنها صفراين تابع است.
- اگر نمودار تابع $y = x^3$ را نسبت به محور x یا محور y قرینه کنیم، نمودار تابع $y = -x^3$ به دست می‌آید که به صورت مقابل است:

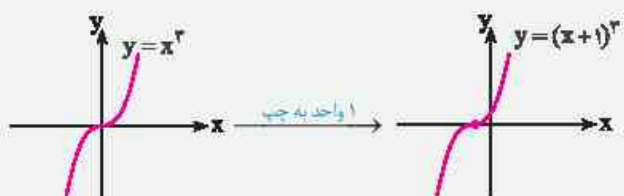


مثال ! نمودار تابع‌های $y = (x-2)^3$ و $y = (x+1)^3$ را رسم می‌کنیم.

برای رسم نمودار $y = (x-2)^3$ از روی نمودار $y = x^3$ ، کافی است نمودار $y = x^3$ را ۲ واحد به سمت راست ببریم:

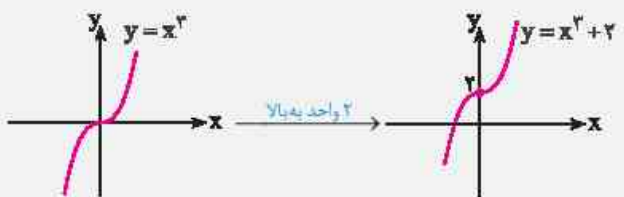


برای رسم نمودار $y = (x+1)^3$ از روی نمودار $y = x^3$ ، کافی است نمودار $y = x^3$ را ۱ واحد به سمت چپ ببریم:



مثال ! نمودار تابع‌های $y = x^3 + 2$ و $y = x^3 - 1$ را رسم می‌کنیم.

برای رسم نمودار $y = x^3 + 2$ از روی نمودار $y = x^3$ ، کافی است نمودار $y = x^3$ را ۲ واحد به بالا ببریم:



برای رسم نمودار $y = x^3 - 1$ از روی نمودار $y = x^3$ ، کافی است نمودار $y = x^3$ را ۱ واحد به پایین ببریم:



نکته در بعضی از سؤالات که ضابطه تابع درجه سوم به صورت $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ داده می‌شود، می‌توانیم به کمک اتحاد مکعب دوجمله‌ای،

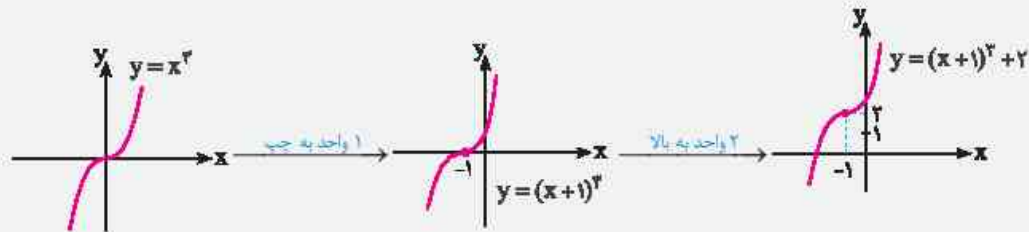
تابع درجه سوم را به صورت $y = a(x - \alpha)^3 + \beta$ بنویسیم و با کمک قوانین انتقال نمودار آن را رسم کنیم. به نمونه‌های زیر توجه کنید:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Rightarrow f(x) = (x+1)^3$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \Rightarrow f(x) = (x-2)^3$$

مثال نمودار تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$ را رسم می‌کنیم.

با کمک اتحاد مکعب دوجمله‌ای، تابع را به صورت $f(x) = (x+1)^3 + 2$ بازنویسی می‌کنیم. حال با کمک قوانین انتقال داریم:



سؤال به کمک نمودار $y = x^3$ ، نمودار هر کدام از توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید:

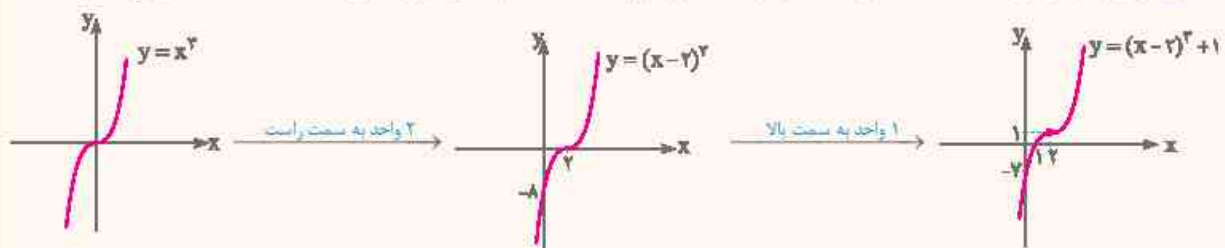
۱ $y = (x-2)^3 + 1$

۲ $y = -x^3 - 1$

۳ $y = x^3 + 3x^2 + 3x$

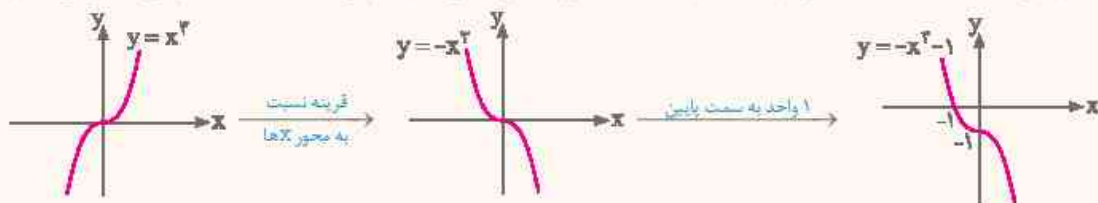
۴ $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$

پاسخ ۱ برای رسم نمودار $y = (x-2)^3 + 1$ ، ابتدا نمودار $y = x^3$ را دو واحد به سمت راست و سپس یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم:



با توجه به نمودار، دامنه و برد تابع هر دو برابر با بازه $(-\infty, +\infty)$ هستند.

۲ برای رسم نمودار $y = -x^3 - 1$ ، ابتدا نمودار $y = x^3$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم و سپس یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.

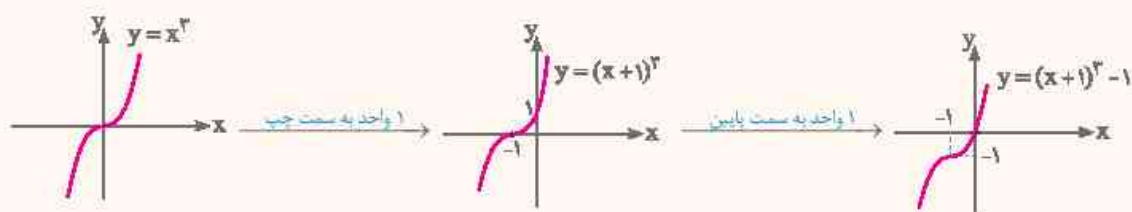


با توجه به نمودار، دامنه و برد تابع، هر دو برابر با بازه $(-\infty, +\infty)$ است.

۳ با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای تابع را به صورت مقابل بازنویسی می‌کنیم:

$$y = x^3 + 3x^2 + 3x \Rightarrow y = (x+1)^3 - 1$$

حال برای رسم تابع مورد نظر، ابتدا تابع $y = x^3$ را یک واحد به سمت چپ و سپس یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.

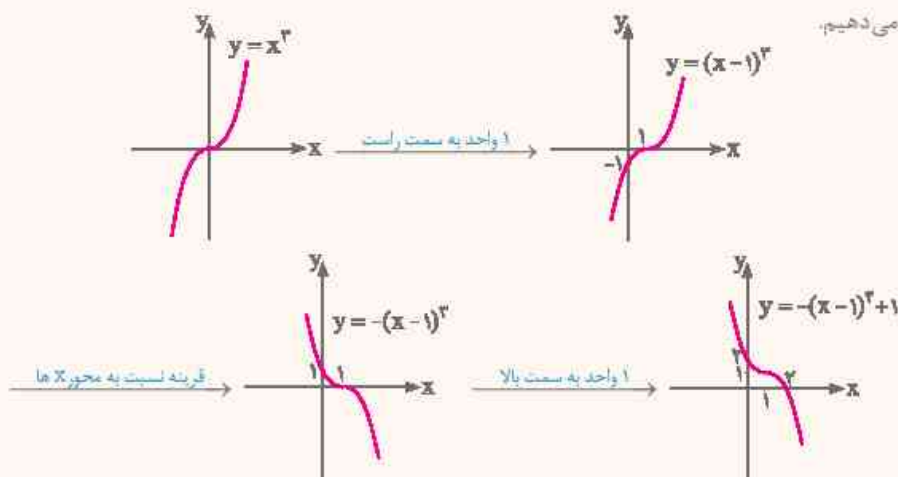


با توجه به نمودار تابع، دامنه و برد تابع، هر دو برابر با بازه $(-\infty, +\infty)$ هستند.

۴ با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای تابع را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری از منفی}} y = -(x^3 - 3x^2 + 3x - 2) \Rightarrow y = -(x-1)^3 + 1$$

برای رسم نمودار تابع مورد نظر، ابتدا تابع $y = x^r$ را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و سپس نسبت به محور x هاقرینه می‌کنیم و یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.

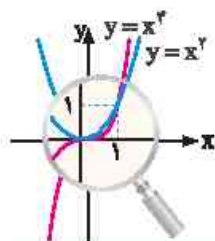


با توجه به نمودار، دامنه و برد تابع، هر دو برابر با بازه $(-\infty, +\infty)$ است.

مقایسه نمودار $y = x^r$ و $y = x^2$

با توجه به نمودار توابع $y = x^2$ و $y = x^r$ ، مشاهده می‌کنیم:

- این دو تابع در دو نقطه با طول‌های $x = 1$ و $x = 0$ متقاطع‌اند.
- در بازه $(1, +\infty)$ نمودار تابع $y = x^r$ بالاتر از نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد.
- در بازه $(0, 1)$ نمودار تابع $y = x^2$ بالاتر از نمودار تابع $y = x^r$ است.



سؤال جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید:

- نمودار $y = x^r$ در بازه $(0, 1)$ از نمودار تابع $g(x) = x^2$ قرار دارد.
- نمودار $y = x^r$ و $y = x^2$ در نقطه با هم برخورد می‌کنند.
- در بازه نمودار $y = x^r$ بالاتر از نمودار $y = x^2$ است.

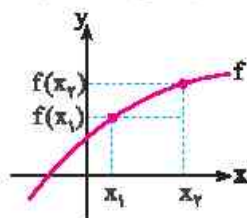
پاسخ ۱. پایین‌تر؛ در بازه $(0, 1)$ تابع $y = x^r$ پایین‌تر از تابع $y = x^2$ قرار دارد.

۲. دو؛ توابع $y = x^r$ و $y = x^2$ در دو نقطه با طول‌های $x = 1$ و $x = 0$ متقاطع هستند.

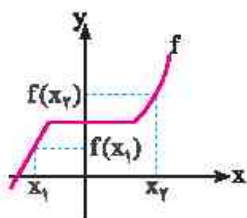
۳. $(1, +\infty)$ ؛ در بازه $(1, +\infty)$ نمودار $y = x^r$ بالاتر از نمودار $y = x^2$ قرار دارد.

توابع صعودی و نزولی

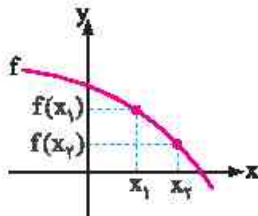
تابع اکیداً صعودی: اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم. (یعنی با افزایش مقدار x مقدار y هم افزایش پیدا کند.)



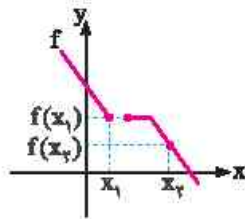
تابع صعودی: اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم $f(x_1) \leq f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی صعودی می‌نامیم. (یعنی با افزایش مقدار x مقدار y افزایش پیدا کند یا ثابت بماند.)



■ **تابع اکیداً نزولی:** اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$ ، آن گاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم. (یعنی با افزایش مقدار x مقدار y کاهش پیدا کند.)



■ **تابع نزولی:** اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم $f(x_1) \geq f(x_2)$ ، آن گاه f را تابعی نزولی می‌نامیم. (یعنی با افزایش مقدار x مقدار y کاهش پیدا کند یا ثابت بماند.)



■ **تابع اکیداً یکنوا:** اگر تابع f در یک بازه اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، می‌گوییم تابع f در این بازه اکیداً یکنوا است.

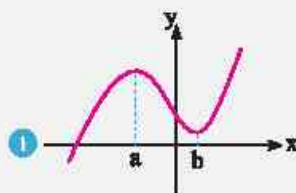
■ **تابع یکنوا:** اگر تابع f در یک بازه صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم تابع f در این بازه یکنوا است.

■ **تابع غیریکنوا:** اگر تابعی در یک بازه نه صعودی و نه نزولی باشد، می‌گوییم آن تابع غیریکنوا است. مثلاً تابع $y = x^2$ در بازه $(-\infty, +\infty)$ غیریکنوا است. نمودار را ببینید:

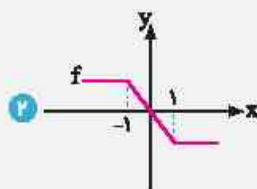


■ **تابع هم صعودی و هم نزولی:** تابع ثابت $y = k$ در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است. (توجه کنید تنها تابعی که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت است.)

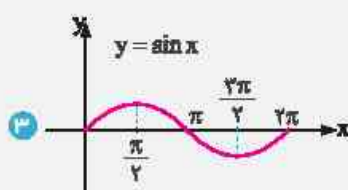
! مثال یکنوایی و اکیداً یکنوایی نمودارهای زیر را بررسی می‌کنیم:



نمودار تابع f به صورت مقابل است. با توجه به نمودار این تابع در بازه $[a, b]$ اکیداً نزولی است. پس در این بازه اکیداً یکنوا است. از طرفی در بازه‌های $(-\infty, a]$ و $[b, +\infty)$ اکیداً صعودی است. پس در این بازه‌ها نیز اکیداً یکنوا است. اما در $\mathbb{R}$ نه صعودی است و نه نزولی.

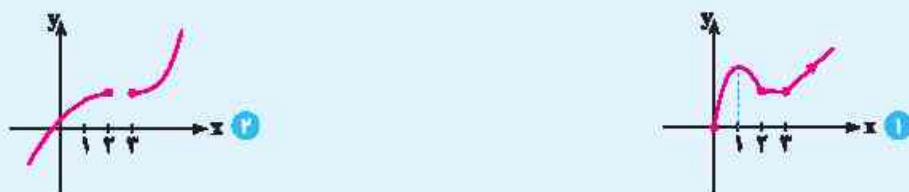


نمودار تابع f در شکل مقابل دیده می‌شود. این تابع در بازه $(-\infty, +\infty)$ یکنوا و نزولی است، اما اکیداً یکنوا نیست.



تابع $y = \sin x$ در هر یک از بازه‌های $[0, \frac{\pi}{4}]$ و $[\frac{3\pi}{4}, 2\pi]$ اکیداً صعودی و در بازه $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ اکیداً نزولی است؛ اما در $(0, 2\pi)$ نه صعودی است و نه نزولی.

سؤال مشخص کنید توابع زیر در چه بازه‌ای صعودی، اکیداً صعودی، نزولی، اکیداً نزولی و ثابت هستند.

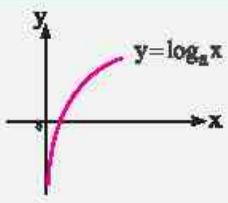
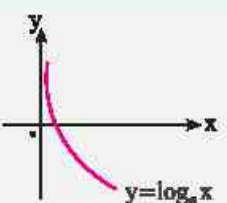
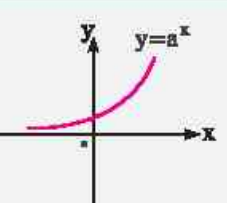
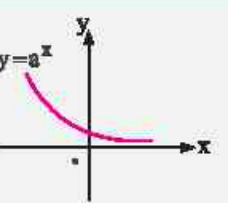
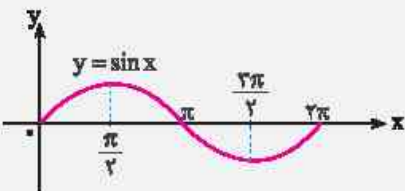
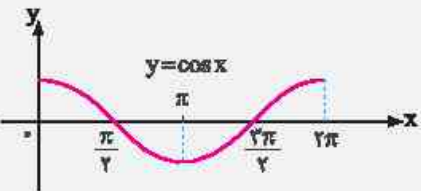


پاسخ ۱) با توجه به نمودار تابع، در بازه $[0, 1]$ با افزایش مقدار x ها، مقدار y ها نیز افزایش می‌یابد، پس تابع در این بازه اکیداً صعودی است. در بازه $(1, 2)$ با افزایش مقدار x ها، مقدار y ها کاهش می‌یابد، پس تابع در این بازه اکیداً نزولی است. در بازه $(2, +\infty)$ تابع ثابت است و با افزایش مقدار x ها، مقدار y تغییری نمی‌کند و تابع در این بازه هم صعودی است و هم نزولی است. در بازه $[0, +\infty)$ با افزایش مقدار x ها، مقدار y ها نیز افزایش می‌یابد، پس تابع در این بازه اکیداً صعودی است. همچنین در بازه $[2, +\infty)$ با افزایش مقدار x ها، مقدار y ثابت است، پس تابع در این بازه صعودی است. و در بازه $[1, 2]$ با افزایش مقدار x ها، مقدار y ها کاهش می‌یابد یا ثابت است، پس تابع در این بازه نزولی است. ۲) در بازه $(2, 3) - \mathbb{R}$ با افزایش مقدار x ها، مقدار y ها نیز افزایش می‌یابد، یا ثابت است، پس تابع در این بازه صعودی است. همچنین در هر یک از بازه‌های $(-\infty, 2]$ و $[3, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

بررسی صعودی و نزولی بودن توابع معروف

در جدول زیر، همه نمودارهای مهم کتاب درسی را از نظر وضعیت صعودی یا نزولی بودن (وضعیت یکنوایی) بررسی کردیم:

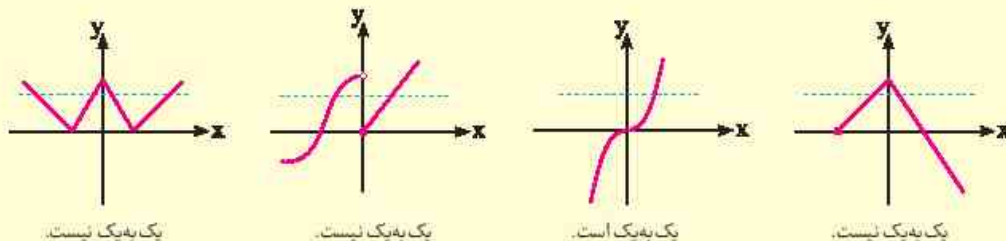
۱. تابع ثابت $y = k$	۲. تابع $y = x$	۳. تابع $y = x^2$	۴. تابع $y = x $
این تابع در بازه $(-\infty, +\infty)$ هم صعودی و هم نزولی است. (تابع ثابت، تنها تابعی است که هم صعودی و هم نزولی است.)	این تابع در دامنه‌اش یعنی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است. تابع $y = -x$: این تابع در دامنه‌اش یعنی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است. (پس تابع خطی $y = mx + b$ با شرط $m \neq 0$ اکیداً یکنوا است.)	این تابع در بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی و در بازه $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است. ولی در $\mathbb{R}$ نه صعودی و نه نزولی است. (یعنی غیر یکنوا است.)	این تابع در بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی و در بازه $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است. ولی در $\mathbb{R}$ نه صعودی و نه نزولی است. (یعنی غیر یکنوا است.)
۵. تابع $y = x^3$	۶. تابع $y = \sqrt{x}$	۷. تابع $y = \frac{1}{x}$	۸. تابع $y = [x]$
این تابع در مجموعه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) اکیداً صعودی است. (پس اکیداً یکنوا است.)	این تابع در بازه $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است. (پس اکیداً یکنوا است.)	این تابع در هر یک از بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است. ولی روی دامنه‌اش یعنی روی $\mathbb{R} - \{0\}$ غیر یکنوا است.	این تابع در دامنه‌اش ($\mathbb{R}$) صعودی است. (یعنی یکنوا است.)

۹. تابع $y = \log_a x$ با شرط $a > 1$	۱۰. تابع $y = \log_a x$ با شرط $0 < a < 1$	۱۱. تابع $y = a^x$ با شرط $a > 1$	۱۲. تابع $y = a^x$ با شرط $0 < a < 1$
			
$(a > 1)$	$(0 < a < 1)$	$(a > 1)$	$(0 < a < 1)$
این تابع در بازه $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است. (پس اکیداً یکتوا است.)	این تابع در بازه $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است. (پس اکیداً یکتوا است.)	این تابع در مجموعه اعداد حقیقی، اکیداً صعودی است. (پس اکیداً یکتوا است.)	این تابع در مجموعه اعداد حقیقی، اکیداً نزولی است. (پس اکیداً یکتوا است.)
۱۳. تابع $y = \sin x$		۱۴. تابع $y = \cos x$	
			
این تابع در بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$ اکیداً صعودی، در بازه $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ اکیداً نزولی و در بازه $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ اکیداً صعودی است. ولی در $\mathbb{R}$ نه صعودی و نه نزولی است. (پس غیر یکتوا است.)		این تابع در بازه $[0, \pi]$ اکیداً نزولی و در بازه $[\pi, 2\pi]$ اکیداً صعودی است. ولی در $\mathbb{R}$ نه صعودی و نه نزولی است. (پس غیر یکتوا است.)	

یادآوری از پایه

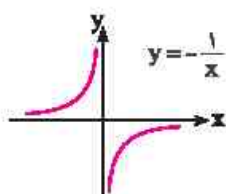
یادآوری تابع یک به یک (از پایه یازدهم)

اگر تابع f به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها به شکل (x, y) باشد، به شرطی یک به یک است که هیچ دو x مختلفی دارای y یکسان نباشند. تابع $f = \{(1, 2), (3, 0), (4, 2)\}$ یک به یک نیست، زیرا دو زوج مرتب $(1, 2)$ ، $(4, 2)$ دارای مؤلفه دوم یکسان هستند. نمودار تابع f به شرطی یک به یک است که هر خط موازی محور x ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

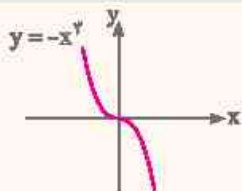


ارتباط یک به یک بودن تابع با وضعیت یکنوایی

اگر تابعی اکیداً یکتوا باشد، حتماً یک به یک است. اما عکس این مطلب ممکن است برقرار نباشد. مثلاً به نمودار تابع $y = -\frac{1}{x}$ نگاه کنید. این تابع، یک به یک است، اما اکیداً یکتوا نیست.



سؤال آیا می‌توان تابعی رسم کرد که اکیداً نزولی باشد ولی یک‌به‌یک نباشد؟ با رسم شکل توضیح دهید.



پاسخ خیر نمی‌توان، چون می‌دانیم اگر تابعی اکیداً یکنوا باشد، حتماً یک‌به‌یک است.

مثلاً در تابع $y = -x^3$ که تابعی اکیداً نزولی است، مشخص است که اگر هر خطی موازی محور x ها رسم کنیم، نمودار تابع را فقط در یک نقطه قطع می‌کند و یک‌به‌یک است.

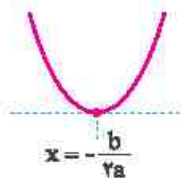
وضعیت صعودی و نزولی بودن توابع معروف، زیر ذره‌بین!

در این فصل باید سعی کنید ضابطه‌ها را رسم کنید و سپس راجع به صعودی یا نزولی بودن آن نظر دهید. در این مورد، نکات زیر به شما کمک می‌کند.

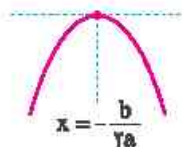
۱. تابع درجه دوم: $f(x) = ax^2 + bx + c$

از آن جایی که نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ به شکل سهمی است، در حالت کلی نه صعودی و نه نزولی می‌باشد. اما اگر دامنه را برحسب رأس سهمی محدود کنیم، در یک بازه اکیداً نزولی و در یک بازه اکیداً صعودی خواهد شد. در این صورت با توجه به علامت a ، با دو حالت زیر مواجه می‌شویم:

۱ اگر $a > 0$ باشد، دهانه سهمی رو به بالا است. بنابراین بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً نزولی است به صورت $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ و بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً صعودی است به صورت $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ می‌باشد.

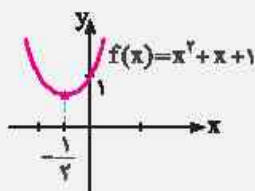


۲ اگر $a < 0$ باشد، دهانه سهمی رو به پایین است. بنابراین بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً صعودی است به صورت $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ و بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً نزولی است به صورت $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ می‌باشد.



مثال مشخص می‌کنیم تابع $f(x) = x^2 + x + 1$ در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است.

ابتدا تابع مورد نظر را رسم می‌کنیم:



$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$$

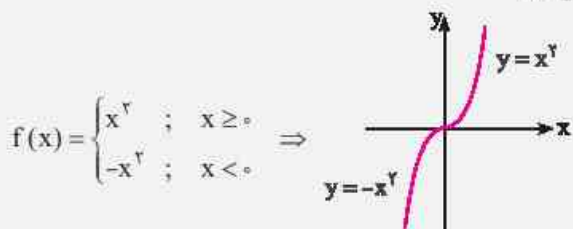
$$y_S = (-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2}) + 1 = \frac{3}{4}$$

در بازه $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش می‌یابد پس تابع $f(x)$ در این بازه اکیداً نزولی است. ولی در بازه $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ با افزایش مقدار x ، مقدار y نیز افزایش می‌یابد پس تابع در این بازه اکیداً صعودی است.

تابع چندضابطه‌ای

برای تحلیل یکنوایی تابعی که به صورت چندضابطه‌ای مطرح می‌شود، یک روش رسم نمودار تابع است.

مثال برای بررسی یکنوایی تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

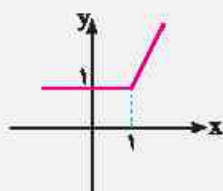


واضح است که این تابع، اکیداً صعودی است.

تابع قدرمطلق

برای بررسی یکنوایی توابع شامل قدرمطلق، می‌توانیم تابع را در ریشه عبارت داخل قدرمطلق به صورت چندضابطه‌ای بنویسیم و آن را رسم کنیم.

مثال برای بررسی یکنوایی تابع $y = x + |x - 1|$ خواهیم داشت:

$$y = x + |x - 1| = \begin{cases} 2x - 1 & ; x \geq 1 \\ 1 & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow$$


واضح است که تابع فوق، صعودی است.

سؤال نمودار توابع زیر را رسم کنید، مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند؟

❶ $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$

❷ $f(x) = x + 2|x|$

❸ $f(x) = x - |x|$

❹ $f(x) = x|x|$

❺ $f(x) = -\log_2 x + 1$

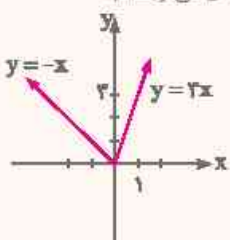
❻ $f(x) = 3^x - 2$

پاسخ ❶ برای رسم تابع $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ کافی است نمودار $y = \cos x$ را $\frac{\pi}{4}$ به سمت چپ منتقل کنیم:



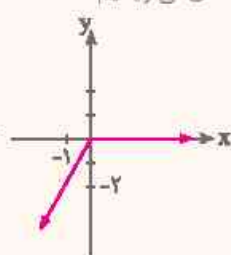
تابع $f(x)$ در بازه $[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ نزولی و در بازه $[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$ صعودی است.

❷ ابتدا تابع را در ریشه عبارت داخل قدرمطلق به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x & ; x \geq 0 \\ x - 2x & ; x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$


با توجه به نمودار تابع، در بازه $(-\infty, 0]$ تابع نزولی و در بازه $[0, +\infty)$ صعودی است.

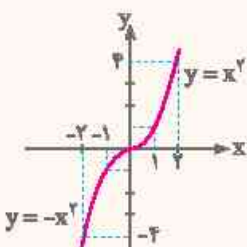
❸ ابتدا تابع را در ریشه عبارت داخل قدرمطلق به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} x - x & ; x \geq 0 \\ x - (-x) & ; x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & ; x \geq 0 \\ 2x & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$


با توجه به نمودار تابع، در بازه $[0, +\infty)$ تابع ثابت است پس هم صعودی و هم نزولی است و در بازه $(-\infty, 0]$ با افزایش مقدار x ها، مقدار y ها نیز افزایش

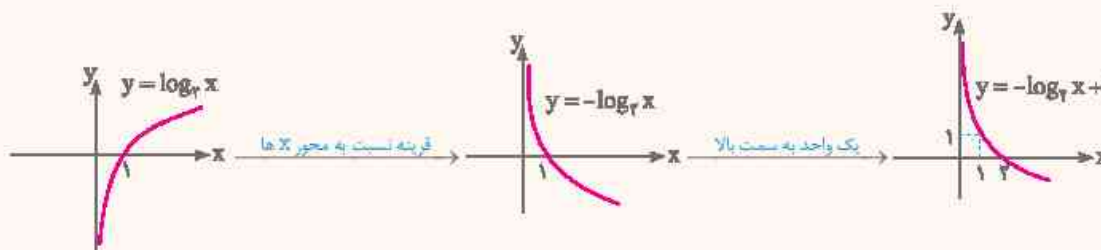
می‌یابد پس اکیداً صعودی است و همچنین تابع در بازه $(-\infty, +\infty)$ صعودی می‌باشد.

❹ ابتدا تابع را در ریشه عبارت داخل قدرمطلق به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$


با توجه به نمودار تابع، در کل بازه $(-\infty, +\infty)$ تابع صعودی است.

۵ با توجه به قوانین انتقال، ابتدا تابع $y = \log_7 x$ را رسم کنیم سپس نسبت به محور x ها قرینه کرده و یک واحد به سمت بالا انتقال می دهیم.



با توجه به نمودار تابع و دامنه آن، تابع در بازه $(0, +\infty)$ نزولی است.

۶ برای رسم تابع $f(x)$ کافی است تابع $y = 3^x$ را دو واحد به سمت پایین منتقل کنیم.



با توجه به نمودار تابع، در بازه $(-\infty, +\infty)$ تابع صعودی است.

حل نامعادلات با کمک یکنوایی

۱ اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی باشد و $f(\odot) < f(\otimes)$ ، آن گاه $\odot < \otimes$ است.

۲ اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد و $f(\odot) < f(\otimes)$ ، آن گاه $\odot > \otimes$ است.

مثال ۱ تابع اکیداً صعودی f با دامنه $\mathbb{R}$ را در نظر می گیریم. اگر $f(a+1) > f(2a-1)$ باشد، حدود a را مشخص می کنیم.

در توابع اکیداً صعودی، می توانیم f ها را از طرفین نامعادله خط برنیم و جهت نامعادله عوض نشود، یعنی:

$$f(2a-1) > f(a+1) \Rightarrow 2a-1 > a+1 \Rightarrow a > 2$$

توابع چند جمله ای - توابع صعودی و نزولی

پرسش های تشریحی

درس
۱

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

(شهریور ۱۴۰۰)

۱. دامنه توابع چند جمله ای برابر $\mathbb{R}$ است.

(خرداد ۹۹ خارج)

۲. تابع $y = 2x^5 - 4x^3 + \sqrt{7}x$ یک تابع چند جمله ای نیست.

(دی ۱۴۰۰ - مشایه خرداد ۱۴۰۱)

۳. تابع $y = \sqrt{2}x^2 - \frac{3}{4}x$ یک چند جمله ای از درجه ۳ است.

(شهریور ۱۴۰۲)

۴. تابع $y = \sqrt{3}x^2 - \pi x + 1$ یک تابع چند جمله ای است.

(دی ۹۹ خارج)

۵. درجه تابع $f(x) = x^2(x - x^2)^2 + 1$ برابر ۵ است.

۶. تابع $f(x) = \sin x + 5x$ یک تابع چند جمله ای است.

۷. اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^2$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $f(x) > g(x)$ برابر بازه $(1, +\infty)$ است.

(شهریور ۱۴۰۰)

۸. تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ در دامنه اش اکیداً نزولی است.

(شهریور ۹۸)

۹. تابع $y = -x^3 + 2$ در دامنه تعریفش صعودی است.

(خرداد ۹۹ خارج)

۱۰. تابع $f(x) = |x|$ در تمام دامنه اش صعودی است.

(شهریور ۱۴۰۰ خارج)

۱۱. تابع $y = (\frac{1}{4})^x$ در دامنه خود یک تابع اکیداً نزولی است.

(خرداد ۱۴۰۱ خارج)

۱۲. تابع $y = 2^x - 2$ صعودی است.

(شهریور ۱۴۰۲)

۱۳. تابع $y = \frac{1}{x}$ در دامنه اش یکنوا است.

(دی ۹۹ خراج)

(دی ۱۴۰۱)

(دی ۹۷ - خرداد ۹۹)

(خرداد ۱۴۰۲)

(حسابان شهریور ۱۴۰۳)

۱۴. تابعی که اکیداً صعودی باشد، صعودی است.

۱۵. هر تابع اکیداً یکنوا، یکنوا نیست.

۱۶. هر تابع یکنوا، یک به یک است.

۱۷. تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است.

۱۸. بی شمار تابع وجود دارد که هم صعودی و هم نزولی است.

۱۹. تابع همانی در دامنه تعریفش، هم صعودی و هم نزولی است.

۲۰. تابع $y = 2x^2 + 4x - 1$ در بازه $[-2, 5]$ صعودی است.

۲۱. تابع $y = |x|$ در بازه $[-1, 2]$ اکیداً یکنوا است.

۲۲. تابع $f(x) = 2 - (1 - x)^3$ در دامنه خود اکیداً نزولی است.

۲۳. اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً نزولی باشند، تابع $f + g$ نیز در آن فاصله اکیداً نزولی است.

● جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۲۴. دامنه توابع چند جمله‌ای برابر است.

۲۵. در تابع $f(x) = ax + b$ اگر a برابر باشد، هم صعودی و هم نزولی است.

۲۶. تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد است. (اکیداً یکنوا - غیر یک به یک)

۲۷. تابعی که در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود، تابع نامیده می‌شود.

۲۸. تابع f را گوئیم هرگاه داشته باشیم: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

۲۹. تابع $y = (x+1)^3$ در دامنه تعریف خود (صعودی - نزولی) است.

۳۰. تابع $y = 2^x$ در دامنه تعریف خود (اکیداً صعودی - اکیداً نزولی) است.

۳۱. تابع $y = (\frac{1}{2})^x$ همواره تابعی و تابع $y = \log_2 x$ همواره تابعی است. (صعودی - نزولی)

۳۲. در بازه $(0, 1)$ ، نمودار تابع $y = x^3$ ، نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد.

۳۳. تابع $y = x + |x|$ در بازه $[a, +\infty)$ اکیداً صعودی است. حداقل مقدار a برابر است.

● مسائل

۴ تابع چند جمله‌ای

در ابتدا، مسائل مربوط به رسم تابع $y = x^3$ را بررسی می‌کنیم. در این مسائل، به اتحاد مکعب دو جمله‌ای، اتحاد چاق و لاغر، فاکتورگیری و... توجه کنید.

۳۴. نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید.

۱. $f(x) = (x+2)^3 - 2$

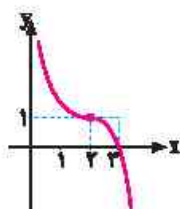
۲. $f(x) = -(-x+2)^3 - 4$

۳. $f(x) = (x-1)(x^2 + x + 1)$

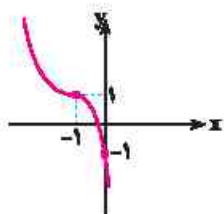
۳۵. نمودار تابع $y = x(x^2 - 4x + 3) + x^2$ را رسم کنید.

۳۶. نمودار تابع $f(x) = (x^2 + 3)(x+3) - 7$ را رسم کنید.

۳۷. اگر نمودار تابع $y = m(x-n)^2 + p$ به صورت مقابل باشد، مقادیر m و n و p را بیابید.



۳۸ شکل زیر نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx^2 + cx + d$ است، حاصل $f(1)$ را بیابید.



مقایسه نمودار $y = x^2$ و $y = x^3$ بسیار با اهمیت است. اول درسنامه این بخش رو دقیق مطالعه کنید و بعد بیایید چندتا سؤال خوب زیر رو حل کنید.

۳۹ در کدام بازه‌ها، نمودار تابع $y = -x^3$ بالاتر از نمودار تابع $y = x^2$ قرار می‌گیرد؟

۴۰ نمودار $y_1 = x^2 + 4x + 4$ و $y_2 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و معلوم کنید در چه بازه‌ای نمودار y_2 بالاتر از y_1 است؟

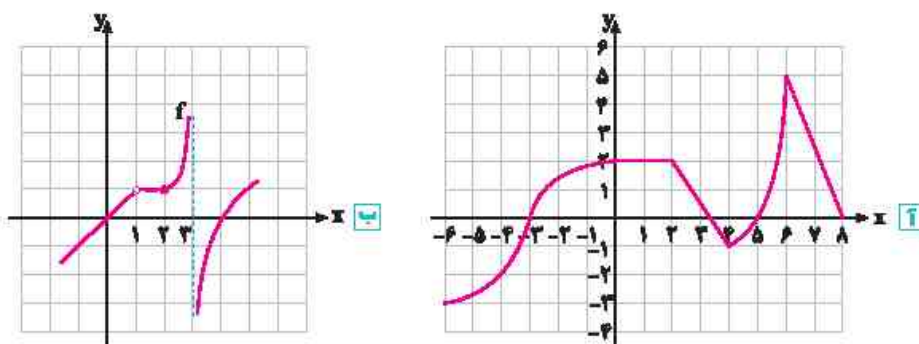
۴۱ در کدام بازه‌ها، نمودار تابع $y = |x^2|$ پایین‌تر از نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد؟

توابع صعودی و نزولی

سؤالات زیر، مربوط به بررسی صعودی یا نزولی بودن تابع است. خیلی وقت‌ها، با کمک رسم نمودار می‌تونیم به سؤالات این بخش پاسخ بدیم.

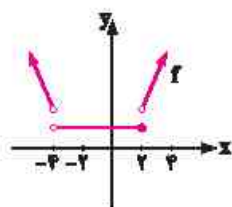
(تمرین صفحه ۱۰ کتاب درسی)

۴۲ با استفاده از نمودار توابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟



۴۳ با توجه به نمودار تابع f ، در جدول زیر برای هریک از ستون (A) قسمت صحیح از ستون (B) را انتخاب کنید. (یکی از ستون‌ها اضافه است). (فرورداد ۱۴۰۴)

B	A
(۱) $(-\infty, -4)$	الف) تابع در این بازه اکیداً صعودی است.
(۲) $(2, +\infty)$	ب) تابع در این بازه اکیداً نزولی است.
(۳) $(-1, +\infty)$	پ) تابع در این بازه ثابت است.
(۴) $(-4, 2]$	



۴۴ تابعی رسم کنید که در بازه $(-3, -1)$ اکیداً صعودی، در بازه $[-1, 1]$ هم صعودی هم نزولی و در بازه $(1, +\infty)$ اکیداً نزولی باشد.

۴۵ نمودار تابعی را رسم کنید که در هریک از بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد ولی در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی نباشد. (تمرین صفحه ۱۰ کتاب درسی)

۴۶ تابع $f(x) = (a-1)x^2 + (b+2)x + a+b$ هم صعودی و هم نزولی است.

۲ مقدار a و b را به دست آورید.

۳ مقدار $f(1)$ را به دست آورید.

۴۷. تابع $f(x) = (k-1)x^2 + 4$ اکیداً نزولی است. مقادیر k را به دست آورید.

۴۸. نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند؟

الف $y = x^2 + 2$

ب $y = x^2 + 2x - 1$

ج $y = x^2 |x|$

د $y = (\frac{1}{3})^x - 1$

ه $y = x + |x|$

و $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$

ز $y = x|x| - 2x$

ح $y = (x-1)|x|$

ط $y = x - [x]$

ث $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$; $D = [0, 2\pi]$

ی $y = \sqrt{x-3} + 1$

ک $f(x) = \frac{1}{x}$; $D_f = [-3, 3] - \{0\}$

۴۹. نمودار توابع چندضابطه‌ای زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که تابع در آن صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 3x - 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x > 2 \\ 1 & -3 < x \leq 2 \\ -\frac{1}{3}x & x \leq -3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & x \geq 1 \\ -(x-1)^2 + 1 & x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & x \geq 1 \\ -2 & 0 \leq x < 1 \\ |x+1| & x < 0 \end{cases}$$

(حسابان دی ۱۴۰۲)

۵۰. حدود m را طوری تعیین کنید که تابع $f = \{(0, 2), (-1, 0), (2, m), (3, 5)\}$ اکیداً صعودی باشد.

۵۱. مقادیر m را طوری تعیین کنید که تابع نمایشی $y = (\frac{m+1}{3})^x$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی:

الف اکیداً صعودی باشد.

ب اکیداً نزولی باشد.

۵۲. تابع $f(x) = x + 1 + |x - 1|$ در بازه $[a, +\infty)$ اکیداً صعودی است. حداقل مقدار a را مشخص کنید.

۵۳. مقادیر m را طوری مشخص کنید که تابع $y = x^2 - mx + 3$ در بازه $[1, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد.

۵۴. مقادیر m را طوری مشخص کنید که تابع $y = -x^2 + (m-1)x - 3$ در بازه $[-1, 2]$ غیریکنوا باشد.

۵۵. تابع $f(x) = |x+1| + |x-2|$ در بازه $[a, b]$ هم صعودی و هم نزولی است. بیش‌ترین مقدار $b - a$ را بیابید.

۵۶. مقادیر a را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} x+2 & x \leq 2 \\ 2x+a & x > 2 \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی، اکیداً صعودی باشد.

۵۷. تابع $y = f(x)$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است. اگر $f(3) = 0$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{(x-1)f(x)}$ را به دست آورید.

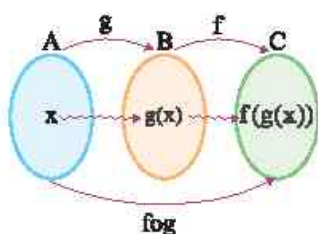
۵۸. تابع اکیداً نزولی f با دامنه $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. اگر $f(a+2) > f(|a| + a)$ باشد، حدود a را بیابید.

فصل اول

درس دوم: ترکیب توابع (قسمت اول)

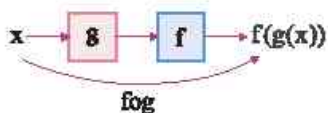
ترکیب توابع

فرض کنید f و g دو تابع باشند، به طوری که خروجی های تابع g در دامنه تابع f قرار داشته باشند. برای دو تابع f و g ، تابع مرکب $(fog)(x) = f(g(x))$ را به صورت نمایش می دهیم.



تشکیل fog

برای ساختن تابع $(fog)(x)$ ابتدا x وارد تابع g می شود، سپس مقدار به دست آمده یعنی $g(x)$ وارد تابع f می شود:



مقادیر $g(x)$ به عنوان ورودی تابع f است.

محاسبه مقدار ترکیب توابع

اگر ضابطه توابع $f(x)$ و $g(x)$ و یا مقدار آن ها را در برخی نقاط به ما داده باشند، برای محاسبه مقدار $(fog)(a)$ ، ابتدا مقدار $g(a)$ را محاسبه می کنیم و سپس این عدد را به عنوان ورودی در تابع f قرار می دهیم. (برای پیدا کردن مقادیر $(gof)(a)$ یا $(fof)(a)$ نیز به همین ترتیب عمل می کنیم.)

سؤال با توجه به جدول های زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

x	$f(x)$
۰	-۱
۱	۳
۲	۵
۳	۵

x	$g(x)$
-۲	۳
۱	۰
۳	۸
۵	۱

- $(fog)(۱) =$
- $(gog)(-۲) =$
- $(gof)(۲) =$
- $(fof)(۱) =$
- $(gofog)(۵) =$

- $(fog)(۱) = f(g(۱)) \xrightarrow{g(۱)=۰} f(g(۱)) = f(۰) = -۱$
- $(gog)(-۲) = g(g(-۲)) \xrightarrow{g(-۲)=۳} g(g(-۲)) = g(۳) = ۸$
- $(gof)(۲) = g(f(۲)) \xrightarrow{f(۲)=۵} g(f(۲)) = g(۵) = ۱$
- $(fof)(۱) = f(f(۱)) \xrightarrow{f(۱)=۳} f(f(۱)) = f(۳) = ۵$
- $(gofog)(۵) = g(f(g(۵))) \xrightarrow{g(۵)=۱} g(f(۱)) = g(۳) = ۸$

پاسخ

ترکیب توابع زوج مرتبی

اگر توابع f و g را به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها بدهند و از ما تابع $f \circ g$ را بخواهند، x ها را از دامنه تابع g انتخاب می‌کنیم و مقادیر تابع g را به دست می‌آوریم. سپس این مقادیر به دست آمده از تابع g را به عنوان ورودی تابع f در نظر می‌گیریم. به این ترتیب، اعضای تابع $f \circ g$ به دست می‌آیند. مثلاً اگر زوج مرتب $(1, 2)$ عضوی از تابع g و زوج مرتب $(2, 3)$ عضوی از تابع f باشد، آن‌گاه:

$$1 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} 3 \Rightarrow f(g(1)) = 3$$

مثال اگر $f = \{(1, 1), (2, -1)\}$ و $g = \{(1, 0), (-1, 1)\}$ باشد، توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ به صورت زیر در می‌آیند:

$$\begin{cases} 1 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} 0 \\ 2 \xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{g} 1 \end{cases} \Rightarrow g \circ f = \{(1, 0), (2, 1)\} \quad \begin{cases} 1 \xrightarrow{g} 0 \xrightarrow{f} \text{تعریف نشده} \\ -1 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 1 \end{cases} \Rightarrow f \circ g = \{(-1, 1)\}$$

مثال اگر $f = \{(2, 3), (-1, 4), (3, 1)\}$ باشد، تابع $f \circ f$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} 2 &\xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{f} 1 \\ -1 &\xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} \text{تعریف نشده} \Rightarrow f \circ f = \{(2, 1)\} \\ 3 &\xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} \text{تعریف نشده} \end{aligned}$$

سؤال اگر $f = \{(0, -1), (5, 2), (3, 5), (-2, 4)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, -1), (2, 0), (-1, 4), (5, -7)\}$ ، هریک از توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به صورت زوج مرتب بنویسید.

مشابه مثال صفحه ۱۳ کتاب درسی

پاسخ مراحل ساخت تابع $g \circ f$:

به ازای هر x از دامنه f ، اگر $f(x)$ در دامنه g موجود باشد اعضای $g \circ f$ به صورت $(x, g(f(x)))$ می‌باشند.

$$\begin{aligned} 0 &\xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{g} 4 \\ 5 &\xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} 0 \\ 3 &\xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g} -7 \\ -2 &\xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{g} \text{تعریف نشده} \end{aligned} \Rightarrow g \circ f = \{(0, 4), (5, 0), (3, -7)\}$$

مراحل ساخت تابع $f \circ g$:

به ازای هر x از دامنه g ، اگر $g(x)$ در دامنه f موجود باشد اعضای $f \circ g$ به صورت $(x, f(g(x)))$ می‌باشند.

$$\begin{aligned} 1 &\xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} \text{تعریف نشده} \\ 3 &\xrightarrow{g} -1 \xrightarrow{f} \text{تعریف نشده} \\ 2 &\xrightarrow{g} 0 \xrightarrow{f} -1 \\ -1 &\xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f} \text{تعریف نشده} \\ 5 &\xrightarrow{g} -7 \xrightarrow{f} \text{تعریف نشده} \end{aligned} \Rightarrow f \circ g = \{(2, -1)\}$$

نتیجه لزومی ندارد که دو تابع $f \circ g$ و $g \circ f$ باهم برابر باشند. (باتوجه به دو تابع f و g ، ممکن است برابر باشند یا نباشند، پس در حالت کلی نمی‌توانیم اظهار نظر کنیم.)

ساختن ضابطه ترکیب تابع

در بعضی از سوالات، ضابطه توابع f و g را به ما می‌دهند و از ما ضابطه تابع $f \circ g$ را می‌خواهند. در این سوالات باید در تابع f به جای همه x ها، $g(x)$ قرار دهیم.

مثال اگر $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = 1 - x$ ، آن‌گاه برای به دست آوردن ضابطه تابع $f \circ g$ داریم:

$$f(g(x)) = 2(g(x)) + 1 = 2(1 - x) + 1 = 2 - 2x + 1 = 3 - 2x$$

مثال اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، ضابطه تابع $g \circ f$ را به دست می‌آوریم:

در تابع g ، به جای همه x ها، $f(x)$ قرار می‌دهیم:

$$g(f(x)) = \frac{2f(x)+2}{2-f(x)} = \frac{2(\frac{2x-1}{x+1})+2}{2-(\frac{2x-1}{x+1})} = \frac{\frac{4x-2}{x+1}+2}{2-\frac{2x-1}{x+1}} = \frac{\frac{4x-2+2x+2}{x+1}}{\frac{2x+2-2x+1}{x+1}} = \frac{6x}{3} = 2x$$

نکته در بعضی از سوالات، ضابطه تابع f داده می‌شود و از ما ضابطه تابع $f \circ f$ را می‌خواهند. در این سوالات باید در تابع f ، به جای همه x ها، $f(x)$ قرار دهیم.

مثال اگر $f(x) = 2x + 5$ باشد ضابطه $f \circ f(x)$ برابر است با: $f(f(x)) = 2(f(x)) + 5 = 2(2x + 5) + 5 = 4x + 10 + 5 = 4x + 15$

سؤال اگر $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = x^2 - 8x + 15$ باشند:

۱ $g \circ f(x)$ را تشکیل دهید.

۲ معادله $g \circ f(x) = 0$ را حل کنید.

پاسخ مراحل ساخت تابع $g \circ f$:

۱ برای تشکیل تابع $g \circ f(x)$ کافی است در ضابطه $g(x)$ به جای x ها، $f(x)$ را قرار دهیم:

$$g(f(x)) = f^2(x) - 8f(x) + 15 = (2x - 1)^2 - 8(2x - 1) + 15 = 4x^2 - 4x + 1 - 16x + 8 + 15 = 4x^2 - 20x + 24$$

۲ برای حل معادله $4x^2 - 20x + 24 = 0$ ابتدا طرفین معادله را بر ۴ تقسیم می‌کنیم:

$$g \circ f(x) = 0 \Rightarrow 4x^2 - 20x + 24 = 0$$

$$\xrightarrow{+4} x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

نوشتن یک تابع به صورت ترکیب دو تابع

تمام توابع را می‌توان به صورت ترکیب دو تابع نوشت، حتی در برخی موارد با چند حالت ترکیب تابع می‌توان تابع اصلی را ساخت، برای این کار ابتدا بخشی از تابع اصلی را به عنوان تابع بیرونی در نظر بگیرید، سپس با جداسازی آن بخش، تابع درونی ساخته می‌شود.

مثال تابع $h(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$ را به صورت ترکیب دو تابع می‌نویسیم:

حالت ۱ $f(x) = \sqrt{x}$ بیرونی، $g(x) = (x^2 + 2x)^2 \Rightarrow h(x) = f(g(x))$ درونی

حالت ۲ $f(x) = \sqrt{x^2}$ بیرونی، $g(x) = x^2 + 2x \Rightarrow h(x) = f(g(x))$ درونی

کتاب راهنمای معلم ریاضی ۳

سؤال توابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید.

۳ $h(x) = \frac{1}{-x^2 + 2x - 3}$

۲ $h(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 2}$

۱ $h(x) = (\sin x)^5$

پاسخ برای نوشتن توابع به صورت ترکیب دو تابع، ابتدا بخشی از تابع اصلی را به عنوان تابع بیرونی در نظر می‌گیریم. سپس با جداسازی آن، تابع درونی ساخته می‌شود:

۱ با توجه به تابع $h(x) = (\sin x)^5$ داریم:

$$\begin{cases} f(x) = x^5 \\ g(x) = \sin x \end{cases} \Rightarrow f(g(x)) = h(x)$$

۲ با توجه به تابع $h(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 2}$ داریم:

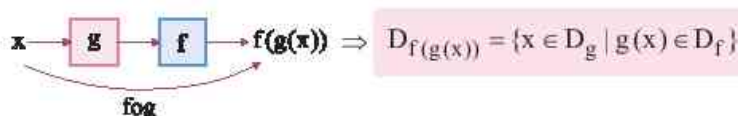
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \\ g(x) = \sqrt{x - 2} \end{cases} \Rightarrow g(f(x)) = h(x)$$

۳ با توجه به تابع $h(x) = \frac{1}{-x^2 + 2x - 3}$ داریم:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \\ g(x) = -x^2 + 2x - 3 \end{cases} \Rightarrow f(g(x)) = h(x)$$

دامنه ترکیب توابع

با توجه به نحوه تشکیل تابع $f \circ g$ مشخص است که $g(x)$ به جای مقادیر ورودی تابع f قرار می‌گیرد، پس دامنه تابع $f \circ g$ به صورت زیر خواهد بود:



بنابراین برای به دست آوردن دامنه ضابطه gof به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ ابتدا دامنه دو تابع f و g را به دست می‌آوریم.

۲ سپس شرط $f(x) \in D_g$ را بررسی کنید. (یعنی به جای x ‌های دامنه g ، ضابطه $f(x)$ را قرار می‌دهیم و به کمک حل نامعادله، نامساوی و ... x ‌ها را پیدا می‌کنیم.)

۳ جواب به دست آمده را با دامنه f اشتراک بگیرید.

تذکره در نمایش‌های زوج مرتبی، محاسبه دامنه ترکیب تابع راحت‌تر است، فقط کافی است بررسی کنید $(a, b) \in f$ و $(b, c) \in g$ و آنگاه مؤلفه a در دامنه تابع gof قرار می‌گیرد.

مثال اگر $f(x) = 2x - 3$ ، $g(x) = \sqrt{x - 7}$ ، دامنه تابع gof را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ D_g : x - 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq 7 \Rightarrow D_g = [7, +\infty) \end{cases}$$

مرحله اول:

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 3 \in [7, +\infty)\}$$

مرحله دوم:

$$2x - 3 \geq 7 \Rightarrow 2x \geq 10 \Rightarrow x \geq 5$$

$$D_{\text{gof}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\} = [5, +\infty)$$

مرحله سوم:

مثال اگر $f = \{(1, -2), (2, 3), (0, -2)\}$ و $g = \{(1, 2), (-1, 0), (-2, 5)\}$ باشند، دامنه تابع gof برابر است با:

$$1 \xrightarrow{f} -2 \xrightarrow{g} 5$$

$$2 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g} \text{تعریف نشده} \Rightarrow D_{\text{gof}} = \{0, 1\}$$

$$0 \xrightarrow{f} -2 \xrightarrow{g} 5$$

مشابه کار در کلاس صفحه ۱۴ کتاب درسی

سؤال اگر $f(x) = \frac{3}{x-2}$ و $g(x) = \frac{\lambda}{x}$ ، دامنه تابع و ضابطه توابع fog و fof را به دست آورید.

پاسخ برای به دست آوردن دامنه ترکیب توابع ابتدا دامنه تابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\} \quad D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

دامنه fog به صورت زیر است:

$$D_{\text{fog}} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

حال ضابطه g را در محدوده دامنه f قرار می‌دهیم و نامعادله حاصل را حل می‌کنیم:

$$D_{\text{fog}} = \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid g(x) \in \mathbb{R} - \{2\}\}$$

$$\frac{\lambda}{x} \neq 2 \Rightarrow \lambda \neq 2x \Rightarrow x \neq \frac{\lambda}{2}$$

$$D_{\text{fog}} = \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid x \neq \frac{\lambda}{2}\} \Rightarrow D_{\text{fog}} = \mathbb{R} - \{0, \frac{\lambda}{2}\}$$

برای تشکیل ضابطه fog کافی است در تابع $f(x)$ به جای x ‌ها تابع $g(x)$ را قرار دهیم:

$$\text{fog}(x) = \frac{3}{g(x) - 2} = \frac{3}{\frac{\lambda}{x} - 2}$$

دامنه تابع $\text{fof}(x)$ به صورت زیر است:

$$D_{\text{fof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\}$$

حال ضابطه f را در محدوده دامنه خودش قرار می‌دهیم و نامعادله حاصل را حل می‌کنیم:

$$D_{\text{fof}} = \{x \in \mathbb{R} - \{2\} \mid f(x) \in \mathbb{R} - \{2\}\}$$

$$\frac{3}{x-2} \neq 2 \Rightarrow 3 \neq 2x - 4 \Rightarrow 2x \neq 7 \Rightarrow x \neq \frac{7}{2}$$

$$D_{\text{fof}} = \{x \in \mathbb{R} - \{2\} \mid x \neq \frac{7}{2}\} \Rightarrow D_{\text{fof}} = \mathbb{R} - \{2, \frac{7}{2}\}$$

برای تشکیل ضابطه fof کافی است در تابع f به جای x ‌ها، خود $f(x)$ را قرار دهیم:

$$\text{fof}(x) = \frac{3}{f(x) - 2} = \frac{3}{\frac{3}{x-2} - 2}$$

پاسخ ابتدا دامنه تابع f و g را به دست می آوریم:

$$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_f = [2, +\infty) \quad , \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

دامنه تابع fog به صورت زیر است:

حال ضابطه g را در محدوده دامنه f قرار می دهیم و نامعادله حاصل را حل می کنیم:

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in [2, +\infty)\}$$

$$2x^2 - 1 \geq 2 \Rightarrow 2x^2 \geq 3 \Rightarrow x^2 \geq \frac{3}{2} \Rightarrow x \geq \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{یا} \quad x \leq -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}] \cup [\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty)\}$$

$$\Rightarrow D_{fog} = (-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}] \cup [\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty)$$

برای تشکیل ضابطه fog کافی است در تابع f به جای x ها، $g(x)$ را قرار دهیم:

$$fog(x) = 2\sqrt{g(x)-2} = 2\sqrt{(2x^2-1)-2} = 2\sqrt{2x^2-3}$$

دامنه تابع gof به صورت زیر است:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

حال ضابطه f را در محدوده دامنه g قرار می دهیم و نامعادله حاصل را حل می کنیم:

$$D_{gof} = \{x \in [2, +\infty) \mid f(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in [2, +\infty) \mid 2\sqrt{x-2} \in \mathbb{R}\} = [2, +\infty)$$

عبارت $2\sqrt{x-2} \in \mathbb{R}$ به این معنی است که $2\sqrt{x-2}$ در اعداد حقیقی باشد یعنی $x-2 \geq 0$ که بازه $[2, +\infty)$ به دست می آید.

برای تشکیل ضابطه gof کافی است در تابع g به جای x ها، $f(x)$ را قرار دهیم:

$$gof(x) = 2f^2(x) - 1 = 2(2\sqrt{x-2})^2 - 1 = 2(4x-4) - 1 = 8x - 9$$

پیدا کردن ضابطه تابع مجهول در توابع مرکب

حالت ۱ یافتن ضابطه تابع درونی با معلوم بودن تابع مرکب

در این حالت فرض کنید توابع $f(x)$ و $(fog)(x)$ به شما داده شده، در این حالت $g(x)$ را در $f(x)$ قرار می دهیم و معادله حاصل را برحسب $g(x)$ حل می کنیم.

مثال اگر $f(x) = x + 1$ و $(fog)(x) = x^2 + 2x + 2$ باشند، تابع $g(x)$ به صورت زیر به دست می آید.

$$f(x) = x + 1 \Rightarrow f(g(x)) = g(x) + 1 \Rightarrow g(x) + 1 = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow g(x) = x^2 + 2x + 1$$

حالت ۲ یافتن ضابطه تابع بیرونی با معلوم بودن تابع مرکب

در این حالت فرض کنید توابع $g(x)$ و $(fog)(x)$ را به شما داده اند.

۱ ضابطه تابع $g(x)$ را برابر t فرض کرده و مقدار x را برحسب t به دست می آوریم.

۲ در تابع مرکب داده شده، به جای x عبارت به دست آمده برحسب t را قرار می دهیم و تابع f برحسب t یعنی $f(t)$ را به دست می آوریم.

۳ در تابع $f(t)$ به جای همه x ها، t می گذاریم تا ضابطه $f(x)$ به دست آید.

مثال اگر $g(x) = x + 3$ و $(fog)(x) = 4x + 10$ باشند، $f(x)$ به صورت زیر به دست می آید.

$$g(x) = x + 3 = t \Rightarrow x = t - 3$$

$$f(g(x)) = 4x + 10 \Rightarrow f(t) = 4(t - 3) + 10 = 4t - 2 \Rightarrow f(t) = 4t - 2 \Rightarrow f(x) = 4x - 2$$

۲ بخش



پاسخ‌نامه

فصل ۱ تابع

۱ | درست

توضیح: دامنه توابع چند جمله‌ای تمام اعداد حقیقی را شامل می‌شود.

۲ | نادرست

توضیح: تابع y تابعی ۳ جمله‌ای از درجه ۵ می‌باشد.

۳ | درست

توضیح: زیرا بزرگ‌ترین توان x برابر ۳ می‌باشد.

۴ | درست

توضیح: تابع $y = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \dots$ به شرطی چند جمله‌ای است که توان‌ها عدد حسابی باشد که در این سؤال برقرار است.

۵ | نادرست

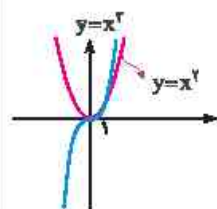
توضیح: با توجه به ضابطه تابع بزرگ‌ترین درجه x برابر ۷ است.

۶ | نادرست

توضیح: به دلیل وجود $\sin x$ در ضابطه تابع، چند جمله‌ای محسوب نمی‌شود.

۷ | درست

توضیح: منظور نامعادله $f(x) > g(x)$

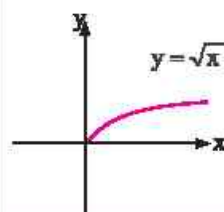


این است که مشخص کنیم در کدام بازه، نمودار تابع $f(x) = x^3$ بالای نمودار تابع $g(x) = x^2$ قرار دارد. با توجه به نمودار مقابل، در بازه $(1, +\infty)$ نمودار $f(x) = x^3$ در بالای نمودار $g(x) = x^2$ قرار دارد.

روش دوم: نامعادله $x^3 > x^2$ را حل می‌کنیم:

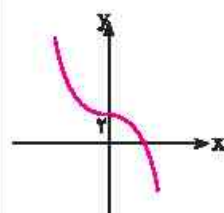
$$x^3 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2(x - 1) > 0 \Rightarrow x > 1$$

۸ | نادرست



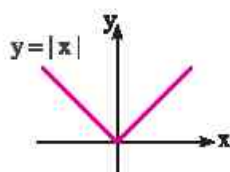
توضیح: با توجه به نمودار تابع، در دامنه‌اش اکیداً صعودی است.

۹ | نادرست



توضیح: با توجه به نمودار تابع، در دامنه‌اش اکیداً نزولی است.

۱۰ | نادرست

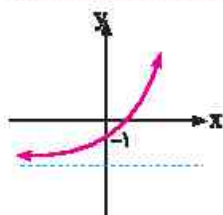


توضیح: با توجه به نمودار تابع، در بازه $(0, +\infty)$ صعودی و در بازه $(-\infty, 0]$ نزولی می‌باشد، بنابراین در $\mathbb{R}$ یکنوا نیست.

۱۱ | درست

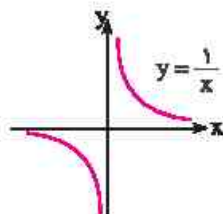
توضیح: چون پایه عددی بین ۰ و ۱ است پس تابعی اکیداً نزولی است.

۱۲ | درست



توضیح: در توابع نمایی اگر پایه بزرگ‌تر از یک باشد تابعی اکیداً صعودی است و انتقال دادن آن به پایین، این وضعیت را تغییر نمی‌دهد.

۱۳ | نادرست



توضیح: با توجه به نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ در بازه $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی و در بازه $(-\infty, 0)$ نیز اکیداً نزولی است، اما با توجه به نمودار، تابع یکنوا نیست.

۱۴ | درست

توضیح: اگر تابعی اکیداً صعودی باشد، صعودی نیز هست.

۱۵ | نادرست

توضیح: اگر تابعی اکیداً یکنوا باشد، قطعاً یکنوا نیز هست.

۱۶ | نادرست

توضیح: اگر تابعی اکیداً یکنوا باشد، یک به یک است.

۱۷ | درست

توضیح: تابع ثابت در یک بازه هم صعودی و هم نزولی می‌باشد.

۱۸ | درست

توضیح: تمامی توابع ثابت به فرم $y = k$ هم صعودی و هم نزولی هستند.

۱۹ | نادرست

توضیح: تابع ثابت، تنها تابعی است که هم صعودی و هم نزولی است. (توجه کنید معادله تابع ثابت به صورت $y = k$ و معادله تابع همانی به صورت $y = x$ است.)

۲۰ | نادرست



توضیح: با توجه به نمودار مشخص است که در بازه $[-2, 5]$ تابع غیر یکنوا است.

۳۲ | پایین

توضیح: در بازه $(0, 1)$ نمودار تابع $y = x^2$ پایین‌تر از نمودار تابع $y = x^2$ می‌باشد.

۳۳ | صفر

توضیح: باید تابع را رسم کنیم. برای رسم، تابع را در $x = 0$ به صورت دوضابطه‌ای باز می‌کنیم:

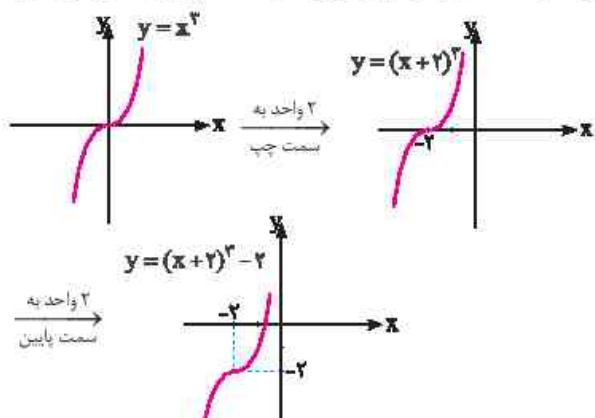
$$y = x + |x| = \begin{cases} x + x & ; x \geq 0 \\ x - x & ; x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

مشاهده می‌شود که در $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

پس حداقل مقدار a برابر صفر است.



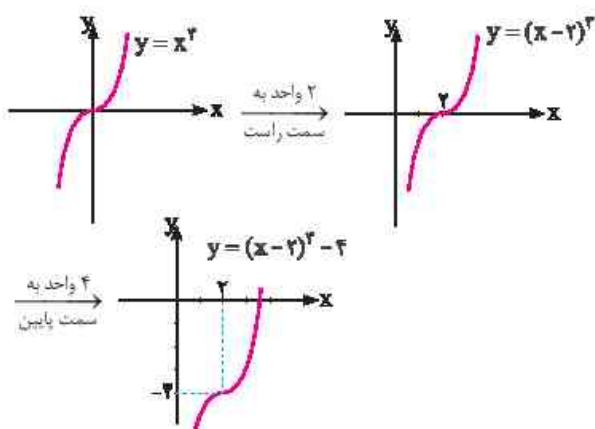
۳۴ | آ | برای رسم تابع $f(x) = (x+2)^3 - 2$ ابتدا تابع $y = x^3$ را دو واحد به سمت چپ و سپس دو واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.



با توجه به نمودار تابع، دامنه و برد هر دو برابر با بازه $(-\infty, +\infty)$ است.
(ب) ابتدا می‌توانیم با فاکتورگیری از منفی داخل پرانتز، تابع را به صورت زیر بنویسیم:

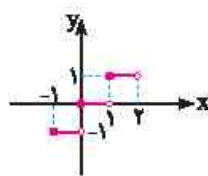
$$f(x) = -(-x+2)^3 - 4 \Rightarrow f(x) = (x-2)^3 - 4$$

حال برای رسم تابع، ابتدا تابع $y = x^3$ را دو واحد به سمت راست و سپس چهار واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم:



۲۱ | نادرست

توضیح: نمودار تابع $y = [x]$ در این بازه به شکل روبه‌رو است:
تابع در این بازه صعودی است (یکنوا است) ولی اکیداً یکنوا نیست.



۲۲ | نادرست

توضیح: ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = 2 - (1-x)^3 = 2 - (-(x-1))^3 = 2 + (x-1)^3$$

این تابع، از انتقال افقی و عمودی تابع $y = x^3$ به دست آمده است، پس اکیداً صعودی است.

۲۳ | درست

توضیح: اگر دو تابع f و g اکیداً نزولی باشند، تابع $f + g$ نیز اکیداً نزولی است. اگر دو تابع f و g اکیداً صعودی باشند، تابع $f + g$ نیز اکیداً صعودی است.

۲۴ | $\mathbb{R}$

توضیح: دامنه توابع چند جمله‌ای تمام اعداد حقیقی را شامل می‌شود.

۲۵ | صفر

توضیح: اگر $a = 0$ باشد، تابع به صورت $f(x) = b$ می‌شود که تابعی ثابت است. می‌دانیم تابع ثابت، هم صعودی و هم نزولی می‌باشد.

۲۶ | اکیداً یکنوا

توضیح: اگر تابع f در بازه‌ای اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، می‌گوییم در این بازه اکیداً یکنوا است.

۲۷ | ثابت

توضیح: تابعی که در یک بازه هم صعودی و هم نزولی باشد، تابع ثابت $(y = k)$ نامیده می‌شود.

۲۸ | اکیداً نزولی

توضیح: اگر در تابعی با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش یابد، آن‌گاه آن تابع را اکیداً نزولی می‌نامیم و داریم: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

۲۹ | صعودی

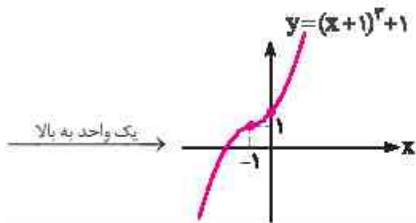
توضیح: ضریب $(x+1)^3$ مثبت است، پس این تابع در دامنه تعریف خود صعودی است.

۳۰ | اکیداً صعودی

توضیح: در توابع نمایی $y = a^x$ ، اگر $a > 1$ باشد، تابع اکیداً صعودی است.

۳۱ | نزولی - صعودی

توضیح: در توابع نمایی $y = a^x$ ، اگر $0 < a < 1$ باشد تابع نزولی و اگر $a > 1$ باشد تابع صعودی است و در توابع لگاریتمی $y = \log_a x$ ، اگر $0 < a < 1$ باشد نزولی و اگر $a > 1$ باشد صعودی است.



۳۷ | با توجه به نمودار تابع، می‌دانیم تابع موردنظر $y = mx^3$ است

($m < 0$) ۲ واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا انتقال

یافته است، پس: $y = m(x-2)^3 + 1$

نتیجه می‌شود که: $P=1, n=2$

حال با جایگذاری نقطه $(3, 0)$ ، m را به دست می‌آوریم:

$$0 = m(3-2)^3 + 1 \Rightarrow m = -1$$

۳۸ | ابتدا ضابطه تابع را با استفاده از نمودار به دست می‌آوریم و سپس

با ضابطه داخل صورت سؤال مقایسه می‌کنیم: $y = a(x+1)^3 + 1$

با جایگذاری نقطه $(0, -1)$ ، a را به دست می‌آوریم:

$$-1 = a(0+1)^3 + 1 \Rightarrow a = -2$$

$$y = -2(x+1)^3 + 1 = -2x^3 - 6x^2 - 6x - 1$$

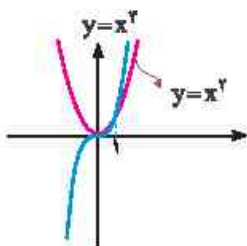
با جایگذاری $x=1$ ، $f(1)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$y = -2(1+1)^3 + 1 = -2(8) + 1 = -15$$

$$f(1) = -15$$

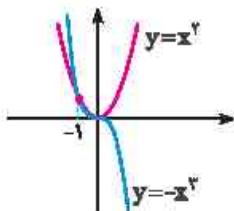
۳۹ | از شکل کتاب درسی می‌دانیم نمودار $y = x^3$ و $y = x^2$ در یک

دستگاه به فرم روبه‌رو است:



حال نمودار تابع $y = x^3$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا

$y = -x^3$ به دست آید:



مشاهده می‌شود که در بازه $(-\infty, -1)$ نمودار تابع $y = -x^3$ بالاتر از

نمودار تابع $y = x^3$ قرار می‌گیرد.

۴۰ | ابتدا به کمک اتحادها توابع را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y_1 = x^2 + 4x + 4 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} y_1 = (x+2)^2$$

$$y_2 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \xrightarrow{\text{اتحاد مکعب دوجمله‌ای}} y_2 = (x+2)^3$$

با توجه به نمودار تابع، دامنه و برد آن هر دو برابر با بازه $(-\infty, +\infty)$ است.

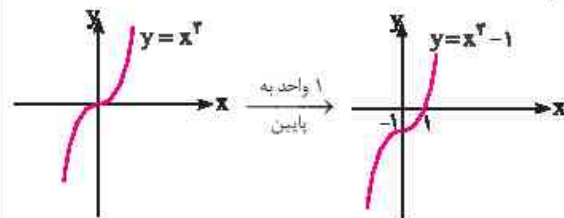
ب) با استفاده از اتحاد چاق و لاغر، ضابطه تابع را به صورت زیر بازنویسی

می‌کنیم:

$$f(x) = (x-1)(x^2 + x + 1) \Rightarrow f(x) = x^3 - 1$$

حال برای رسم، نمودار تابع $y = x^3$ را یک واحد به سمت پایین انتقال

می‌دهیم:



با توجه به نمودار تابع، دامنه و برد تابع هر دو برابر با بازه $(-\infty, +\infty)$ است.

۳۵ | ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

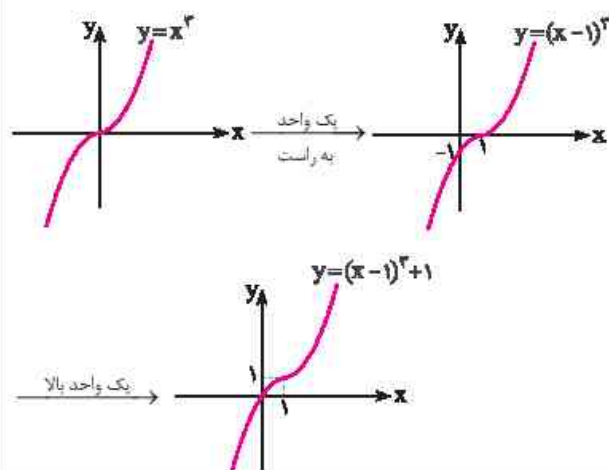
$$y = x(x^2 - 4x + 3) + x^2 = x^3 - 4x^2 + 3x + x^2 = x^3 - 3x^2 + 3x$$

در ضمن می‌دانیم $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ ، در نتیجه تابع را

می‌توان به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$y = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 1 = (x-1)^3 + 1$$

برای رسم این تابع، از انتقال $y = x^3$ استفاده می‌کنیم:



۳۶ | ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

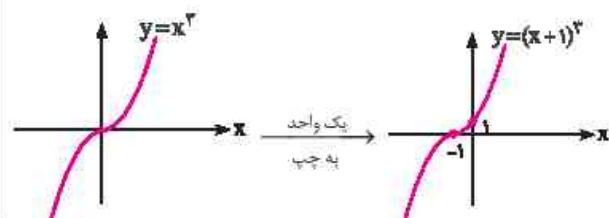
$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 9 - 7 = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$

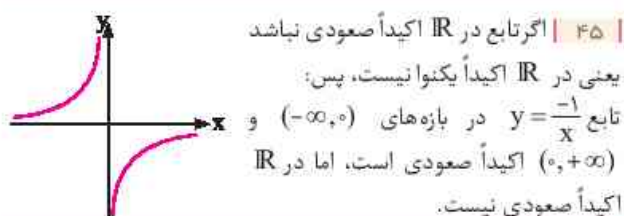
از طرفی می‌دانیم $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ، در نتیجه $f(x)$ را

می‌توان به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 1 = (x+1)^3 + 1$$

برای رسم این تابع، از انتقال $y = x^3$ استفاده می‌کنیم:

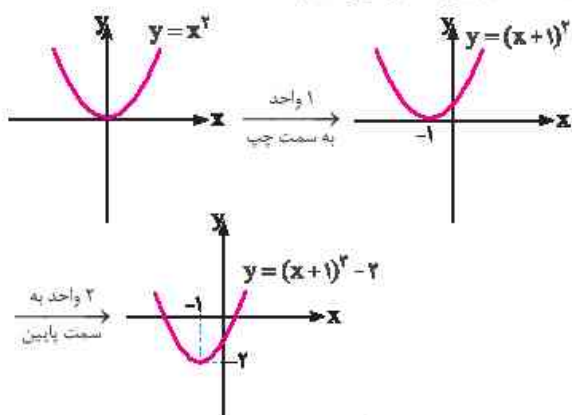




۴۶ | می‌دانیم تنها تابع هم صعودی هم نزولی، تابع ثابت است، پس باید ضریب x و ضریب x^2 صفر باشد:
 $a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$
 $b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2$
 پ با جای‌گذاری a و b ، ضابطه $f(x)$ به شکل زیر است: $f(x) = -1$ بنابراین $f(1) = -1$ است.

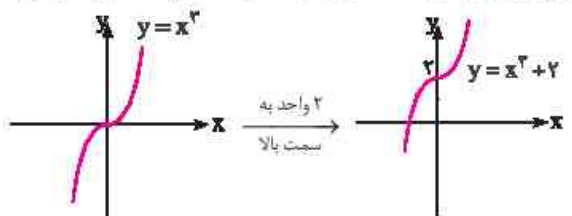
۴۷ | این تابع از انتقال عمودی و قرینه کردن تابع $y = x^2$ به دست آمده، پس وقتی نزولی است که ضریب x^3 منفی باشد: $k - 1 < 0 \Rightarrow k < 1$

۴۸ | ابتدا تابع را با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای به فرم زیر می‌نویسیم:
 $f(x) = x^2 + 2x - 1 \Rightarrow f(x) = (x+1)^2 - 2$
 برای رسم تابع، تابع $y = x^2$ را ابتدا یک واحد به سمت چپ و سپس دو واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.



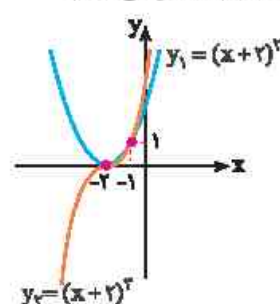
(می‌توان تابع را با پیدا کردن رأس سهمی و ریشه نیز رسم نمود.)
 با توجه به نمودار تابع، در بازه $(-\infty, -1]$ تابع نزولی و در بازه $[-1, +\infty)$ تابع صعودی است.

پ برای رسم تابع، تابع $y = x^3$ را ۲ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.



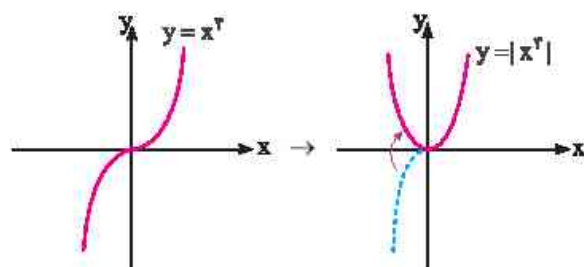
با توجه به نمودار تابع، تابع در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

برای رسم تابع $y_1 = x^2$ ، تابع $y = x^2$ را دو واحد به سمت چپ و برای رسم تابع $y_2 = x^2$ ، تابع $y = x^2$ را دو واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم:

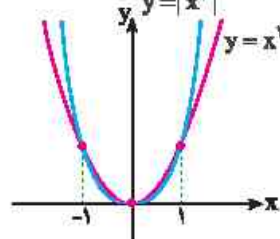


با توجه به نمودار دو تابع، در بازه $(-1, +\infty)$ تابع y_2 بالاتر از y_1 قرار دارد.

۴۹ | ابتدا نمودار تابع $y = x^3$ را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. سپس قسمت‌هایی از نمودار که زیر محور x قرار دارد را، نسبت به محور x قرینه می‌کنیم:



حالا با توجه به نمودار دو تابع $y = x^2$ و $y = x^3$ ، نمودار دو تابع $y = x^2$ و $y = |x^3|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:
 با توجه به شکل مقابل، در بازه‌های $(0, 1)$ و $(-1, 0)$ نمودار تابع $y = |x^3|$ پایین‌تر از نمودار $y = x^2$ قرار دارد.



۴۲ | در بازه‌های $[4, 6]$ و $[-6, 2]$ با افزایش مقدار x ، مقدار y نیز افزایش می‌یابد یا ثابت است؛ پس تابع در این بازه‌ها صعودی است.

در بازه $[0, 2]$ مقدار تابع همواره ثابت است و در این بازه هم صعودی و هم نزولی است. در بازه‌های $[0, 4]$ و $[6, 8]$ با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش می‌یابد یا ثابت است، پس تابع در این بازه‌ها نزولی است.

پ در بازه‌های $(-\infty, 1)$ و $(1, 3)$ و $(3, +\infty)$ با افزایش مقدار x ، مقدار y نیز افزایش می‌یابد یا ثابت است؛ پس تابع در این بازه‌ها صعودی است. در بازه $(1, 2)$ تابع مقدار ثابتی دارد و در این بازه هم صعودی و هم نزولی است.

۴۳ | گزینه ۲ از ستون B یعنی بازه $(2, +\infty)$.

پ گزینه ۱ از ستون B یعنی بازه $(-\infty, -4)$.

پ گزینه ۴ از ستون B یعنی بازه $(-4, 2)$.