

کاج



کنکور

حسابان جامع

مؤلفان: مهندس سجاد عظمتی - مهندس مجید رفعتی - علی احمدی قزل دشت - امیرحسام شکری

ویراست دوم

بانک
تست + پاسخ های
تشریحی

۳۵۰۰
تست جدید
و چالشی

۷ ۵ ۰
تست چالشی

۲۰۰۰۰
تست سطح بالاتر

۷ ۵ ۰
تست مفهومی

مقدمه

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

به کوشش توان کرد گیتی روان

به دانش توان یافت نیکو روان

(فردوسی)

● حسابان، برای بسیاری از دانش‌آموزان، درسی چالش‌برانگیز اما سرتوشت‌ساز در مسیر کنکور ریاضی است. «حسابان جامع آیکیو گاج» با هدف فراهم‌کردن یک مسیر روشن و مطمئن برای موفقیت در این درس طراحی شده‌است؛ رویکرد آن، ساده‌سازی مفاهیم دشوار، تقویت مهارت حل مسئله و ارائه پرسش‌هایی است که نه تنها سطح کنکور را پوشش می‌دهند، بلکه افق یادگیری را گسترش می‌دهند.

● اگرچه مسیر موفقیت آسان نیست، اما با برنامه‌ریزی، پشتکار و تکیه بر منابع مناسب، رسیدن به درصد بالا در حسابان کاملاً ممکن است. کتابی که در دست شماست، نه فقط یک منبع کمک‌درسی، بلکه همراهی مطمئن برای مسیر پرچالش کنکور است.

به شما اطمینان می‌دهیم، با بررسی دقیق تست‌های این کتاب، در کنکور ۱۴۰۵ و حتی بعد از آن، سوالی خارج از این کتاب و با سخت‌تر از این سوالات نخواهید دید.

● امید است با تلاش مستمر و بهره‌گیری از این منبع، گام‌های استواری به سوی موفقیت بردارید.

برای اینکه بتوانی به بهترین شکل ممکن از این کتاب استفاده کنی، اول باید بدونی که تست‌های این کتاب رو به ترتیب سطح‌بندی اون‌ها پاسخ بدی. پس اول توضیحات کاملی راجع به سطح‌بندی تست‌ها براتون انجام میدیم:

سطح‌بندی تست‌ها

تست‌های آبی	تست‌های قرمز	تست‌های چالشی	تست‌های جنجالی
			
در ابتدا باید تست‌هایی که با رنگ آبی مشخص شده رو جواب بدی. به زبان دیگه، حل تست‌های آبی در گام اول برای هر دانش‌آموزی واجبیه. تست‌های آبی، تست‌های مفهومی با محاسبات ساده هستن که اعتماد به نفس تو رو در ابتدا بالا میبرن.	تست‌هایی که با رنگ قرمز مشخص شده، تست‌های سطح بالاتر، ترکیبی و با محاسبات بیشتر بوده که برای تسلط بر زوایای مختلف مباحث برای تو طراحی شده‌اند. بعد از حل تست‌های آبی، تست‌های قرمز رو حل کن و خودت رو بیشتر به چالش بکش.	بعد از اینکه روی تست‌های آبی و قرمز کامل مسلط شدی، و می‌خواهی بیشتر تلاش کنی و درصد بالاتری به دست بیاری، میتونی سراغ تست‌های iq برو. این تست‌ها سخت، چالشی، ترکیبی و پرمحاسبه بوده و شما رو برای موفقیت در تست‌های سخت کنکور سراسری آماده میکنه. دقت کنید! تست‌های سخت و چالشی کنکورهای سراسری سال‌های قبل هم، جزء این تست‌ها هستن.	این تست‌ها برای دانش‌آموزانی هست که به فکر درصد بالای ۸۰ بوده و بسیار سخت‌کوش و علاقه‌مند به تست‌های بسیار چالشی هستن. پس این تست‌ها به هیچ عنوان برای همه دانش‌آموزان مناسب نیست. تست‌های TNT بسیار سخته، بسیار چالشی و بسیار پرمحاسبه و خلاقانه بوده و در سال‌های اخیر یک یا دو تست کنکور از این سطح تست‌ها می‌باشند. سوالات بسیار سخت کنکورهای اخیر باعث شد این سطح‌بندی رو براتون انجام بدیم تا رتبه‌های برتر کنکور هم، با دیدن این کتاب لذت ببرن.

معرفی ویژگی‌های کتاب



دام تستی

طراح‌های کنکور برای اینکه بفهمین روی مباحث مسلطی یا نه، میان در صورت سوال‌ها از عبارت‌هایی استفاده میکنن که تو حتی بعد از حل سوال، گزینه غلط رو جواب بدی. در برخی موارد هم گزینه‌ها رو به گونه‌ای قرار میدن که تو رو به اشتباه بدارن! این موارد رو با آیکون **دام تستی** براتون مشخص کردیم که روی همه جنبه‌های پنهان سوال‌ها هم مسلط بشی و روز کنکور، اشتباه نکنی.



عروش سریع‌تر

در حل برخی از سوال‌ها، در کار روش‌های تشریحی و تستی، میتونی از **عروش سریع‌تر** سوال رو حل کنی. پس سعی کردیم به‌روزترین و خاص‌ترین روش‌های میانبر و سریع‌تر در حل سوال‌ها رو برات بیان کنیم تا پاسخننامه این کتاب، نسبت به کتاب‌های مشابه، متفاوت باشه و جامع‌ترین و کامل‌ترین پاسخننامه رو ببینی.



یه جوره دیگه! طراح‌های کنکور سراسری، خواسته‌های سوال رو کمی عوض میکنن و در کنکورهای جدید ارزش استفاده میکنن! پس در پاسخننامه کتاب، هر وقت آیکون **یه جوره دیگه** رو دیدی، بدون میخوایم تو رو با تمام ایده‌ها و زوایای مختلف اون سوال آشنا کنیم.



هایلایت

درسنامه‌های کاربردی درسنامه‌ها و نکات مهم رو برات در پاسخننامه کتاب **هایلایت** کردیم. در درسنامه‌ها از بیان نکات بیهوده و اضافی پرهیز شده تا خوندن اون‌ها کاربردی‌تر بشه، دیدن جداول و کادربندی‌های به جا، خوندن درسنامه‌ها رو برات لذت‌بخش میکنه.



سرناخ

تا جای ممکن، سعی کردیم فصل‌ها رو به مباحث کوچکی تقسیم بکنیم، تا بتونی با دیدن هر تست، به زوایای مختلف و تیپ‌بندی در هر مبحث پی ببری. قبل شروع هر تیپ تست، برای اینکه بدونی قراره با چه مدل تستی روبه‌رو بشی، بهت **سرناخ** دادیم. اینجوری در هر آزمون، سرناخ هر تست رو به راحتی توی ذهنت پیدا میکنی.

تشکر و قدردانی:

- تشکر ویژه می‌کنم از اساتید عزیزی که در مراحل تالیف، همراه ما بودن به خصوص آقای نریمان فتح‌اللهی که تک‌تک تست‌ها رو با حوصله بررسی کردن و همچنین تشکر و قدردانی می‌کنیم از اساتید عزیزی که با نظرات و تجربه‌های ارزشمندشون، باعث شدند کتاب بهتری تالیف بشه.
- **اساتید:** معین کرمی، علی مقدم‌نیا، محمد مصطفی ابراهیمی، امید شیری‌نژاد، آرش عمید.

به امید موفقیت‌های بزرگت ...

سجاد عظمتی - مجید رفعتی - علی احمدی - امیرحسام شکری

sajad.azemati

معادله و تابع درجه دوم

درس اول: معادله درجه دوم

۱۵	مجموع ریشه‌ها، حاصل ضرب ریشه‌ها و ...
۱۶	علامت ریشه‌ها
۱۷	نوشتن معادله درجه دوم
۱۸	معادلات قابل تبدیل به درجه دوم

درس دوم: سهمی و ویژگی‌های آن

۱۹	ویژگی‌های سهمی
۲۰	بررسی سهمی
۲۱	نوشتن معادله سهمی
۲۲	وضعیت سهمی و خط یا وضعیت دو سهمی نسبت به هم
۲۳	گذر از نواحی

پاسخ‌نامه تشریحی ۴۰۹

معادله و نامعادله

درس اول: معادلات گویا و معادلات رادیکالی

۲۴	معادلات گویا
۲۵	مسائل کاربردی معادلات گویا و مستطیل طلایی
۲۶	معادلات گنگ
۲۷	حل معادله به روش هندسی

درس دوم: نامعادلات و تعیین علامت

۲۸	تعیین علامت
۲۹	حل نامعادله
۳۰	وضعیت دو منحنی

پاسخ‌نامه تشریحی ۴۳۵

قدرمطلق و جزء صحیح

درس اول: قدرمطلق

۳۱	تعریف و ویژگی‌های قدرمطلق
۳۲	معادلات قدرمطلق
۳۳	نامعادلات قدرمطلق
۳۴	نمودارهای قدرمطلق

درس دوم: جزء صحیح

۳۵	تعریف و ویژگی‌ها
۳۶	معادله و نامعادله شامل جزء صحیح
۳۷	نمودار توابع شامل جزء صحیح

پاسخ‌نامه تشریحی ۴۵۱

تابع

درس اول: مفاهیم تابع

۱	شناسایی تابع
۲	مقدار تابع
۳	دامنه و برد تابع
۴	تساوی دو تابع

درس دوم: انتقال و تبدیل نمودار تابع

۵	انتقال و قرینه‌یابی
۶	انبساط و انقباض نمودار

درس سوم: انواع تابع

درس چهارم: توابع صعودی و نزولی

درس پنجم: اعمال جبری روی توابع و ترکیب توابع

۷	مقداردهی به ترکیب توابع
۸	ضابطه ترکیب توابع
۹	دامنه و برد ترکیب توابع
۱۰	وضعیت صعودی و نزولی توابع مرکب

درس ششم: تابع یک به یک و تابع وارون

۱۱	تابع وارون
۱۲	محاسبه ضابطه تابع وارون
۱۳	برخورد f^{-1} و f و برخورد f^{-1} و g
۱۴	ترکیب تابع f و f^{-1} و ترکیب تابع f^{-1} و g

درس هفتم: تقسیم چند جمله‌ای‌ها و بخش پذیری

پاسخ‌نامه تشریحی ۳۳۸

حد و پیوستگی، مجانب

درس اول: مفاهیم اولیه و محاسبه حد توابع

۶۷	همسایگی	۱۷۰
۶۸	فرآیندهای حدی	۱۷۱
۶۹	قضایای حد	۱۷۴
۷۰	ابهام $\frac{0}{0}$	۱۷۷
۷۱	حد مثلثاتی	۱۸۳

درس دوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

۷۲	حد بی‌نهایت	۱۸۸
۷۳	حد در بی‌نهایت	۱۹۲

درس سوم: مجانب‌های قائم و افقی تابع

۷۴	مجانب قائم	۱۹۸
۷۵	یافتن مجانب افقی	۲۰۱
۷۶	سؤالات ترکیبی مجانب قائم و افقی	۲۰۲

درس چهارم: مفهوم پیوستگی

۷۷	مفهوم پیوستگی	۲۰۵
۷۸	ناپیوستگی ذاتی توابع	۲۱۰
۷۹	پیوستگی در بازه	۲۱۱

پاسخ‌نامه تشریحی ۵۶۸

مشتق

درس اول: مفهوم هندسی مشتق و ...

درس دوم: تابع مشتق و قوانین محاسبه مشتق

۸۰	قواعد مشتق‌گیری	۲۱۷
۸۱	تکنیک‌های مشتق‌گیری	۲۲۱
۸۲	مشتق تابع مرکب	۲۲۲
۸۳	مشتق مرتبه دوم	۲۲۶
۸۴	تعریف مشتق با ظاهری متفاوت	۲۲۷
۸۵	مشتق توابع مثلثاتی	۲۲۷
۸۶	معادله خط مماس	۲۳۲

درس سوم: مشتق چپ و راست و مشتق‌پذیری

۸۷	مشتق توابع چند ضابطه‌ای	۲۳۷
۸۸	مشتق توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح	۲۳۹
۸۹	نقاط مشتق‌ناپذیر، دامنه تابع مشتق و مشتق‌پذیری ...	۲۴۱
۹۰	نمودار تابع مشتق	۲۴۴

درس چهارم: آهنگ تغییر

پاسخ‌نامه تشریحی ۶۳۵

تابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی و ویژگی‌های آن

۳۸	تابع نمایی	۹۸
۳۹	معادلات و نامعادلات تابع نمایی	۹۸
۴۰	نمودارهای توابع نمایی	۱۰۰

درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

۴۱	مفهوم لگاریتم	۱۰۴
۴۲	قوانین لگاریتم	۱۰۴
۴۳	دامنه توابع لگاریتمی	۱۰۹
۴۴	نمودار تابع لگاریتمی	۱۱۰
۴۵	معادلات لگاریتمی	۱۱۳
۴۶	نامعادله لگاریتمی	۱۱۵
۴۷	حل معادلات نمایی به کمک لگاریتم	۱۱۶
۴۸	ضابطه وارون تابع نمایی و لگاریتمی	۱۱۶
۴۹	کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی	۱۱۷
۵۰	ترکیبی‌های لگاریتم	۱۱۸

پاسخ‌نامه تشریحی ۴۶۷

مثلثات

درس اول: مقدمات و مفاهیم اولیه مثلثات

۵۱	درجه و رادیان	۱۲۰
۵۲	نسبت‌های مثلثاتی مهم	۱۲۲
۵۳	دایره مثلثاتی	۱۲۶
۵۴	شیب خط و تانژانت	۱۲۹

درس دوم: اتحادها و روابط مثلثاتی

۵۵	روابط مثلثاتی مقدماتی	۱۳۰
۵۶	زاویه‌های متمم و مکمل	۱۳۲
۵۷	زاویه‌های ترکیبی $(\dots, \frac{\pi}{4} \pm \alpha, \pi \pm \alpha, \dots)$	۱۳۳
۵۸	روابط 2α	۱۳۶
۵۹	رابطه طلایی	۱۴۰
۶۰	کاربردها و نتایج روابط 2α	۱۴۱
۶۱	نسبت‌های مثلثاتی $\alpha + \beta$	۱۴۵

درس سوم: توابع متناوب و نمودار ...

۶۲	تابع $y = \tan x$	۱۵۹
----	-------------------	-----

درس چهارم: معادلات مثلثاتی

۶۳	حل معادلات مثلثاتی با کمک روابط 2α	۱۶۳
۶۴	معادلات مثلثاتی شامل کمان‌های $\alpha \pm \beta$	۱۶۴
۶۵	معادلات مثلثاتی کسری	۱۶۶
۶۶	مسائل ترکیبی و خواسته‌های خاص	۱۶۷

پاسخ‌نامه تشریحی ۴۹۷

توان گویا و عبارت جبری

درس اول: توان گویا و عبارت جبری

۱۱۰	ریشه و توان، ریشه n ام	۳۱۴
۱۱۱	توان های گویا	۳۱۵

درس دوم: عبارت های جبری

۱۱۲	اتحادها و تجزیه	۳۱۸
۱۱۳	ساده کردن عبارت رادیکالی با کمک اتحادها	۳۲۰
۱۱۴	گویا کردن	۳۲۲

۷۸۵	پاسخ نامه تشریحی
-----	------------------

کاربرد مشتق

درس اول: نقاط بحرانی و اکسترم های تابع

۹۱	ارتباط یکنوایی تابع با مشتق آن	۲۵۲
۹۲	نقاط بحرانی	۲۵۵
۹۳	اکسترم های نسبی تابع	۲۵۷
۹۴	اکسترم های مطلق	۲۶۳

درس دوم: بهینه سازی

۹۵	مسائل ترکیبی بهینه سازی	۲۷۳
----	-------------------------	-----

درس سوم: جهت تقعر، نقطه عطف و رسم نمودار توابع

۹۶	جهت تقعر تابع	۲۷۴
۹۷	نقطه عطف	۲۷۶
۹۸	نمودار شناسی	۲۸۰
۹۹	ارتباط نمودارهای f' و f''	۲۸۷

۶۹۰	پاسخ نامه تشریحی
-----	------------------

هندسه تحلیلی

درس اول: هندسه مختصاتی (تحلیلی)

۱۱۵	معادله خط	۳۲۶
۱۱۶	فاصله دو نقطه	۳۲۸
۱۱۷	فاصله نقطه از خط	۳۳۲
۱۱۸	فاصله دو خط موازی	۳۳۴

۸۰۱	پاسخ نامه تشریحی
-----	------------------

مجموعه، الگو و دنباله

درس اول: مجموعه های متناهی و نامتناهی

۱۰۰	معرفی مجموعه ها	۲۹۰
۱۰۱	بازه ها	۲۹۱
۱۰۲	قوانین مجموعه ها	۲۹۲
۱۰۳	تعداد اعضای مجموعه ها	۲۹۴

درس دوم: الگو و دنباله

۱۰۴	دنباله خطی و درجه ۲	۲۹۷
۱۰۵	چند دنباله خاص (دنباله بازگشتی، فیبوناچی و ...)	۲۹۹

درس سوم: دنباله های حسابی و هندسی

۱۰۶	دنباله حسابی	۳۰۱
۱۰۷	مجموع جملات دنباله حسابی	۳۰۴
۱۰۸	دنباله هندسی	۳۰۶
۱۰۹	مجموع جملات دنباله هندسی	۳۱۱

۷۵۰	پاسخ نامه تشریحی
-----	------------------



مرحله ۲۰
آزمون الکترونیکی



کتاب
الکترونیکی

iQ هیبرید یک کتاب نیست
یک دوره آموزشی کامل است



www.gajlive.ir

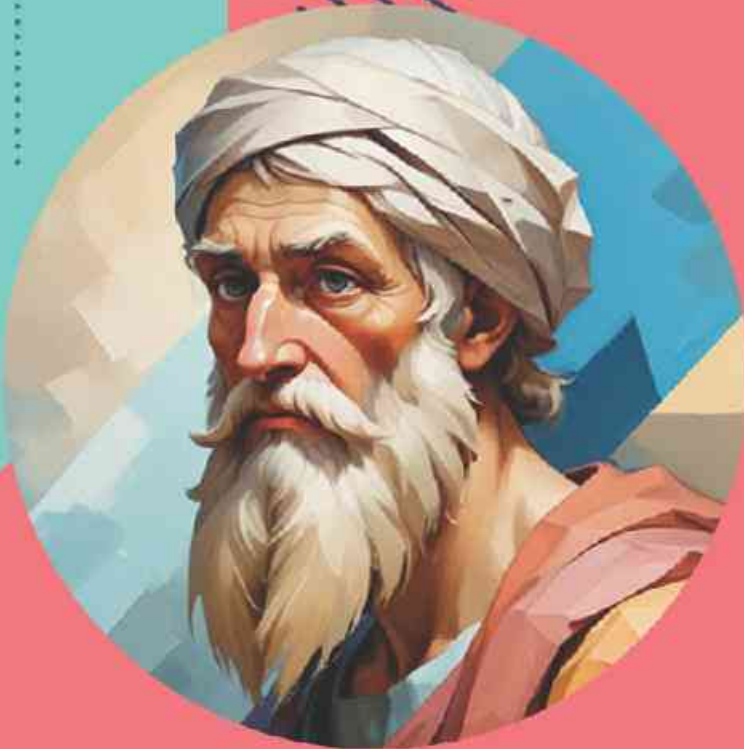
. فصل اول .

حسابان جامع

تابع

iq

Chapter One
Function



Pythagoras

فصل اول

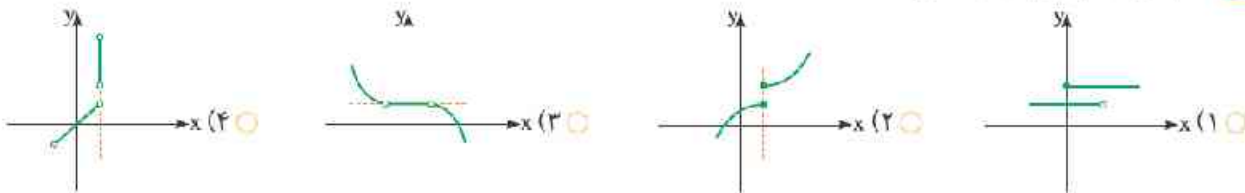
 درس اول:
مفاهیم تابع

CHAPTER 1

شناسایی تابع

مسرینغ سلام. به اولین بخش تابع خوش اومدید. بخش اول رو با شناسایی تابع شروع می‌کنیم.

۱ کدام نمودار زیر مربوط به یک تابع است؟


 ۲ اگر رابطه $f = \{(5, a-2b), (4, a+b), (4, -2), (5, 4a-b)\}$ نمایش یک تابع باشد، $a-b$ کدام است؟

- ۱ (۳) ۲ (۲) ۳ (۱) ۴ (۴)

 ۳ اگر رابطه $f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 5), (4, 9), (k+1, (k+2)^2)\}$ یک تابع نباشد، مجموع مقادیر k کدام است؟

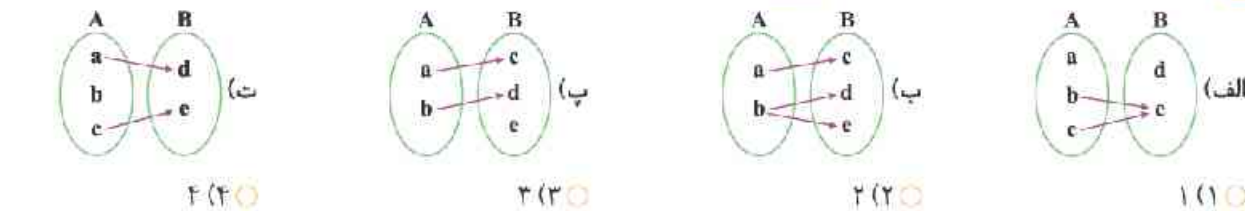
- ۱ (۲) ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۴)

(تجربیه نوبت دوم ۱۴۰۳)

 ۴ رابطه $f = \{(7, 1-3n^2), (1, -1), (2, n), (7, -2n), (\frac{1}{n}, 2)\}$ تابع است. مقدار تابع f در ۲، کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۵ چه تعداد از نمودارهای پیکانی زیر یک تابع نیست؟


 ۶ به ازای چند مقدار قابل قبول m ، نمودار پیکانی مقابل، تابع خواهد بود؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۷ چه تعداد از موارد زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟

الف) رابطه‌ای که به هر عدد مثبت، ریشه چهارم آن را نسبت دهد.

ب) رابطه‌ای که هر عدد را به عددی نسبت می‌دهد که ۳ واحد با آن اختلاف دارد.

پ) رابطه‌ای که به هر عدد فرد اول، مقسوم علیه‌های آن عدد را نسبت دهد.

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۸ کدام رابطه زیر تابع نیست؟

- ۱ (۱) $y^2 + |x| = 0$ ۲ (۲) $|x+3| + |y-1| = 0$ ۳ (۳) $[x] + [y] = 0$ ۴ (۴) $y = \sqrt{[x]^2 + 2[x] + 1}$

 ۹ با فرض $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ، چند تابع می‌توان از A به B نوشت که شامل زوج مرتب $(c, 4)$ باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

۱۰ در تابع $f(x) = \begin{cases} mx+n & ; x \geq 1 \\ 3 & ; x \leq 1 \end{cases}$ اگر $f(1) = 1$ باشد، مقدار m کدام است؟

- ۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{5}{3}$

(تجربى نوبت اول ۱۴۰۳)

۱۱ اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+3}+2a & ; |x| \leq 1 \\ ax^2+5 & ; |x| \geq 1 \end{cases}$ ضابطه تابع f باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟

- ۱) ۴۶ ۲) ۳۲ ۳) ۲۵ ۴) ۱۴

۱۲ اگر رابطه $y = \begin{cases} ax+b & ; x \leq 2 \\ bx^2+a & ; 2 \leq x \leq 3 \\ (a-b)x+8 & ; x \geq 3 \end{cases}$ نشان دهنده یک تابع باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

- ۱) $\frac{16}{3}$ ۲) $\frac{15}{4}$ ۳) $\frac{17}{3}$ ۴) $\frac{15}{7}$

۱۳ اگر m, a, b سه جمله متوالی دنباله حسابی و رابطه $f = \{(2, 5), (3, m^2), (m, 4), (3, m+2), (2, a+b)\}$ یک تابع باشد حاصل $a-b+m$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

(تجربى خارج ۱۴۰۲)

۱۴ حداقل چند عضو از مجموعه $f = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}, x = \frac{30}{y+|y|}\}$ حذف شود تا f یک تابع باشد؟

- ۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

مقدار تابع

برای تستای زیر، می‌خواهیم مقدار تابع رو تو نقاط مختلف پیدا کنیم.

۱۵ در تابع $f(x+3) = 3x+14$ مقدار $f(5)$ کدام است؟

- ۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۱۷ ۴) ۲۰

۱۶ اگر $2f(x+4) = f(4) + x^2 + 5(x+1) + 2$ باشد، مقدار $f(4)$ کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۱

۱۷ اگر $g(3x+1) = \begin{cases} x-2 & ; x \geq 2 \\ x^2 & ; x < 2 \end{cases}$ باشد، مقدار $g(4) + g(10)$ کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) ۱۰ ۳) ۲۴ ۴) ۵

۱۸ اگر $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 3\sqrt{3}$ باشد، آنگاه $f(\sqrt{3}+1)$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) $3\sqrt{3}$ ۳) ۱ ۴) $-3\sqrt{3}$

۱۹ اگر $f(x) + 3f(\frac{1}{x}) = 1 - x^2$ باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{9}{4}$ ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{9}{16}$ ۴) $\frac{21}{32}$

۲۰ اگر $4x^2 - mx + 3m - 1 = (x+2)f(x) - 3xf(x+2)$ باشد، مقدار $f(0)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{17}{4}$ ۲) ۵ ۳) $\frac{25}{4}$ ۴) $\frac{9}{2}$

۲۱ اگر $f(x) = \begin{cases} 4-f(x) & ; x \geq 1 \\ x+1 & ; x < 1 \end{cases}$ باشد، مقدار $f(1+f(-1))$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

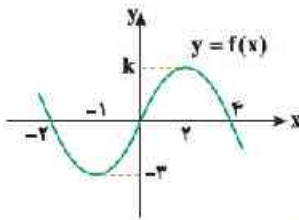
۲۲ ضابطه تابع قطعه‌ای f به صورت $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 7 & ; x \geq 1 \\ 2x - 1 & ; x < 1 \end{cases}$ است، برای چند مقدار a رابطه $f(1-a) = f(2+a)$ برقرار است؟

(ریاضی نوبت دوم ۱۴۰۳)

- ۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

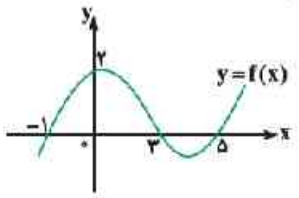
۲۳ تابع $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 12 & ; x < 0 \\ 2x - 4 & ; 0 \leq x < 3 \\ x^2 - x - 12 & ; x \geq 3 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. مجموع طول نقاط برخورد تابع f و محور x ها کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐



۲۴ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. اگر $g(x) = \begin{cases} 1 + f(x) & ; x > 0 \\ f^2(x) & ; x \leq 0 \end{cases}$ و $g(-1) + g(2) = 14$ باشد، مقدار k کدام است؟

- ۲ (۱) ☐ ۳ (۲) ☐ ۴ (۳) ☐ ۵ (۴) ☐



۲۵ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. اگر $g(x) = \begin{cases} f(x-2) & f(x-1) \\ f(1-x) & f(x+2) \end{cases}$ باشد، مقدار $g(1)$ کدام است؟

- ۴ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۰ (۳) ☐ -۲ (۴) ☐

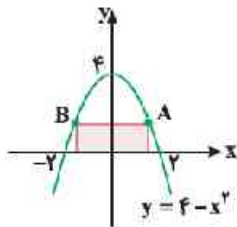
۲۶ مساحت مثلث متساوی الاضلاع را برحسب ارتفاع آن بیان می‌کند؟

- $S = \frac{\sqrt{3}}{4} h^2$ (۱) ☐ $S = \frac{\sqrt{3}}{2} h^2$ (۲) ☐ $S = \frac{\sqrt{3}}{2} h^2$ (۳) ☐ $S = \frac{\sqrt{3}}{4} h^2$ (۴) ☐

۲۷ طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. تابعی که مساحت مستطیل (S) را برحسب محیط آن (P) بیان کند، کدام است؟

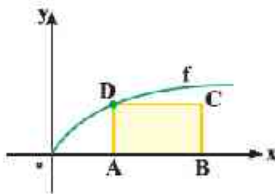
- $S(P) = \frac{P^2 + 36}{16}$ (۱) ☐ $S(P) = \frac{P^2 - 36}{4}$ (۲) ☐ $S(P) = P^2 + 36$ (۳) ☐ $S(P) = \frac{P^2 - 36}{16}$ (۴) ☐

۲۸ در شکل مقابل، مستطیلی که دو رأس آن روی نمودار تابع $y = 4 - x^2$ و دو رأس دیگر آن روی محور x ها قرار دارد، مشاهده می‌شود. مساحت مستطیل رنگی برحسب تابعی از x کدام است؟



- $f(x) = 4x - x^3$ (۱) ☐ $f(x) = 8x - 2x^3$ (۲) ☐ $f(x) = 4x - x^2$ (۳) ☐ $f(x) = 8x - 2x^2$ (۴) ☐

۲۹ مطابق شکل، رأس $A(x, 0)$ و $B(6, 0)$ از مستطیل $ABCD$ روی محور x ها و رأس D روی نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ قرار دارد. مساحت این مستطیل برحسب طول نقطه A کدام است؟



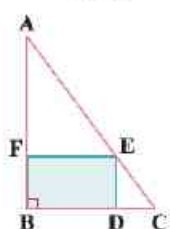
- $S(x) = 6 - \sqrt{x}$ (۱) ☐ $S(x) = 6\sqrt{x} - x$ (۲) ☐ $S(x) = 6\sqrt{x} - x\sqrt{x}$ (۳) ☐ $S(x) = 6x - \sqrt{x}$ (۴) ☐



۳۰ مطابق شکل، استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم‌دایره به شعاع x در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم 80π متر باشد، مساحت استادیوم برحسب تابعی از x کدام است؟

- $2\pi x(4 - x)$ (۱) ☐ $\pi x(4 - x)$ (۲) ☐ $2\pi x(80 - x)$ (۳) ☐ $2\pi x(4 - x)$ (۴) ☐

۳۱ در شکل مقابل، رأس F از مستطیل $BDEF$ روی وتر AC قرار دارد. اگر $AB = 8$ ، $BC = 4$ و $BF = x$ باشد، کدام تابع مساحت مستطیل $BDEF$ را برحسب x بیان می‌کند؟



- $f(x) = -\frac{x^2}{4} + 4x$ (۱) ☐ $f(x) = -\frac{x^2}{4} + 8x$ (۲) ☐ $f(x) = -\frac{x^2}{4} + 4x$ (۳) ☐ $f(x) = -\frac{x^2}{4} + 8x$ (۴) ☐

دامنه و برد و هم دامنه تابع

۳۳ دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + mx + n}$ به صورت $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$ است، مقدار $m + n$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۱ (۲) ☐ ۲ (۳) ☐ ۳ (۴) ☐

۳۴ دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2 - |x| + 2}{||x| - 1| - 2}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۳۵ دامنه تابع $f(x) = \frac{3x + 5}{x^2 - ax - 2}$ به صورت $\mathbb{R} - \{1, b\}$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۳۶ تابع $f(x) = \frac{ax + 4}{(a^2 - 9)x + 2a - 6}$ با دامنه $\mathbb{R}$ مفروض است. مقدار $f(4)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۳۷ دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2 + 3}{(a - 2)x^2 + (a + 1)x + 4}$ به صورت $\mathbb{R} - \{m\}$ است. مجموع مقادیر m کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۳۸ مجموع اعداد صحیح دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{6 + x - x^2}{x^2 - 2x + 1}}$ برابر کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۳۹ دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x - 2} + \sqrt{16 - 2x} + \sqrt[3]{x - 5}$ به صورت بازه $[a, b]$ است. مجموعه جواب نامعادله $|x - b| < a$ شامل چند

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

عدد طبیعی است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۴۰ در تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x + 2} + \sqrt[3]{6 - x}}{\sqrt{\frac{x + 1}{x - 3}}}$ ، مجموعه همه عضوهای صحیح دامنه کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۴۱ دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{40 - x^2}}{|x + 2| - 4}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۴۲ اگر $f(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$ باشد، دامنه تابع $g(x) = \frac{x^2 - 1}{[x] - f(x)}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۴۳ دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{|x + 2| - |x + 5|}}$ شامل چند عدد صحیح منفی نیست؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۴۴ اگر $f(x) = \sqrt{x + |x + 2|}$ باشد، دامنه تابع $f(-x)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۴۵ دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{[2x - 1]^2 - 1}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۴۶ به ازای چند مقدار صحیح m ، دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - (m + 1)x + 2 - m}$ برابر $\mathbb{R}$ است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

بی شمار

۴۷ دامنه تعریف تابع $f(x) = \sqrt{2 \sin x - 1}$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ (۲) $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ (۳) $[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}]$ (۴) $[\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}]$

۴۸ دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\sin(\pi|x|)}$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ (۲) $\mathbb{Z}$ (۳) $\mathbb{R}$ (۴) $\mathbb{R} - \mathbb{N}$

۴۹ اگر $f(x) = 3^x$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{f(x) - f(\frac{1}{x})}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\mathbb{R} - (-1, 1)$ (۲) $[-1, 0) \cup (0, 1]$ (۳) $[-1, 0) \cup [1, +\infty)$ (۴) $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$

۵۰ اگر $g(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$ باشد، دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{4^x - 2^{x-1}}}{1 - g(x)}$ کدام است؟

- (۱) $[-1, 0)$ (۲) $[-1, +\infty)$ (۳) $[-1, 0]$ (۴) $(-1, 1)$

(ریاضی ۹۳)

۵۱ اگر $f(x) = 1 - (\frac{1}{x})^x$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{x f(x)}$ کدام بازه است؟

- (۱) $[-1, 0]$ (۲) $(-\infty, 0)$ (۳) $(-\infty, +\infty)$ (۴) $(0, +\infty)$

۵۲ اگر $f(x) = 2^x - 2$ باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{x f(x)}{x - 2}}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

۵۳ دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{2x+5}}{1 - \log_7(3-x)}$ کدام است؟

- (۱) $[-\frac{5}{2}, 3] - (-1, 1)$ (۲) $[-\frac{5}{2}, 1) \cup (1, 3)$ (۳) $[-\frac{5}{2}, 3)$ (۴) $(-\frac{5}{2}, 3) - [-1, 1]$

(تجربی داخل ۱۴۰۰)

۵۴ دامنه تابع با ضابطه $\frac{\log_7(x^2 - x - 2)}{\sqrt{x^2 - 1} + 1}$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ (۲) $(-1, 2)$ (۳) $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ (۴) $(-2, 1)$

۵۵ دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x} \log(x^2 - 4)}{\sqrt[3]{|x| - 3}}$ کدام است؟

- (۱) $(2, +\infty)$ (۲) $(3, +\infty)$ (۳) $(2, 3) \cup (3, +\infty)$ (۴) $[2, 3) \cup (3, +\infty)$

۵۶ دامنه تابع $f(x) = \sqrt{2 - \log_7(x^2 - 8x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

(تجربی نوبت اول ۱۴۰۲)

۵۷ دامنه $f(x) = \frac{x}{\log_{\frac{1}{2}} x}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

سریع حالا بریم سراغ سوالات مربوط به بُرد تابع.

۵۸ اگر بُرد تابع $y = \frac{1}{x} + 1$ بازه $[0, \frac{5}{4}]$ باشد، دامنه آن شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۵۹ بُرد تابع $f(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x-4} + x^2 - 2x + 3$ کدام است؟

- (۱) $\{4, 1\}$ (۲) $\{1\}$ (۳) $\{0, 1\}$ (۴) $\emptyset$

۶۰ بُرد تابع $f(x) = \begin{cases} |x-1|+2 & ; -3 \leq x < 2 \\ -x^2+6x-5 & ; 2 \leq x \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) $[2, +\infty)$ (۲) $[2, 6]$ (۳) $(-\infty, 6]$ (۴) $(-\infty, 4]$

۶۱ دامنه و بُرد تابع $f(x) = \sqrt{x+|x|}$ کدام است؟

$R_f = [0, +\infty), D_f = [0, +\infty)$ (۲)

$R_f = \{0\}, D_f = [0, +\infty)$ (۱)

$R_f = [0, +\infty), D_f = \mathbb{R}$ (۴)

$R_f = \{0\}, D_f = \mathbb{R}$ (۳)

۶۲ بُرد تابع $f(x) = 2 + \sqrt{4x - x^2}$ به صورت بازه $[a, b]$ است. مقدار $b - a$ کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۶۳ بُرد تابع $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$ کدام است؟

$[-1, 9]$ (۴)

$[0, 3]$ (۳)

$(1, 9]$ (۲)

$(-\infty, 3]$ (۱)

۶۴ بُرد تابع $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$ کدام است؟

$(2, +\infty)$ (۴)

$[2, +\infty)$ (۳)

$(0, 2]$ (۲)

$(0, +\infty)$ (۱)

۶۵ بُرد تابع $f(x) = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$ شامل چند عدد طبیعی نیست؟

بی شمار (۴)

۲ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۶۶ بُرد تابع $f(x) = \frac{|x||x|}{\sqrt{x - x^2}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

بی شمار (۴)

۲ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۶۷ بُرد تابع $f(x) = 2^{\sqrt{-\cos^2 x}}$ شامل چند عضو صحیح است؟

بی شمار (۴)

۲ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۶۸ بُرد تابع $y = \frac{2}{|x|}(2x^2 - 3x)$ کدام است؟

$\mathbb{R} - [-6, -3]$ (۴)

$\mathbb{R}$ (۳)

$(-6, +\infty)$ (۲)

$[3, +\infty)$ (۱)

۶۹ بُرد تابع $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$ به صورت $\mathbb{R} - \{m\}$ است. بُرد تابع $g(x) = \frac{m}{m+\sqrt{x}}$ کدام است؟

$(0, 1)$ (۴)

$[1, +\infty)$ (۳)

$(-1, 1)$ (۲)

$(-\infty, 1)$ (۱)

سرنخ می‌دونی بُرد با هم دامنه چه فرقی داره؟!

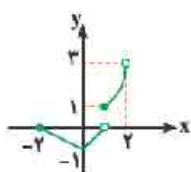
۷۰ شکل مقابل، نمودار تابع $f: [-2, 2] \rightarrow B$ است. مجموعه B کدام یک از مجموعه‌های زیر می‌تواند باشد؟

$[-1, 0) \cup (1, 3)$ (۲)

$[-1, 1]$ (۱)

$[-1, 5)$ (۴)

$[-1, 3) - (0, 1)$ (۳)



۷۱ تابع f به صورت $\begin{cases} f: A \rightarrow [1, 10) \\ f(x) = 1 + x^2 \end{cases}$ تعریف شده است. مجموعه A کدام نمی‌تواند باشد؟

$[0, 3]$ (۴)

$(-1, 2]$ (۳)

$[-2, 2]$ (۲)

$(-3, 3)$ (۱)

۷۲ اگر دامنه تابع $f(x) = x^2 - x$ بازه $[0, 2]$ باشد، کدام نمایش برای تابع f قابل قبول است؟

$\begin{cases} f: [0, 2] \rightarrow [0, 2] \\ f(x) = x^2 - x \end{cases}$ (۲)

$\begin{cases} f: \mathbb{R} \\ f(x) = x \end{cases}$ (۱)

$\begin{cases} f: [0, 2] \rightarrow [-\frac{1}{4}, +\infty) \\ f(x) = x^2 - x \end{cases}$ (۴)

$\begin{cases} f: [0, 2] \rightarrow [\frac{1}{4}, 0] \\ f(x) = x^2 - x \end{cases}$ (۳)

۷۳ کدام ضابطه برای تابع $f(x)$ با نمایش $\begin{cases} f: (-\infty, 0] \rightarrow (-\infty, 2] \\ y = f(x) \end{cases}$ قابل قبول است؟

$f(x) = \frac{1}{x+3}$ (۴)

$f(x) = 1 - \sqrt{2-x}$ (۳)

$f(x) = x^2 - 1$ (۲)

$f(x) = |x| + 1$ (۱)

۷۴ تابع f به صورت $f: [a-2, b+3] \rightarrow [7, 13]$ و $f(x) = -x + 5$ تعریف شده است. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

$\frac{5}{12}$ (۴)

$\frac{12}{5}$ (۳)

$\frac{5}{6}$ (۲)

$\frac{6}{5}$ (۱)

؟ تساوی دو تابع

 ۷۵ دو تابع f و g بر روی اعداد حقیقی تعریف شده‌اند. در کدام حالت، دو تابع مساوی هستند؟

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{|x|}, g(x) = 1 \quad (۲)$$

$$f(x) = 2 \log x, g(x) = \log x^2 \quad (۱)$$

$$f(x) = \frac{x}{|x|}, g(x) = \frac{|x|}{x} \quad (۴)$$

$$f(x) = (\sqrt{x})^2, g(x) = x^2 \quad (۳)$$

۷۶ چه تعداد از جفت توابع زیر با یکدیگر برابر هستند؟

$$g(x) = \frac{|x|}{x}, f(x) = \frac{x}{|x|} \quad (ت)$$

$$\begin{cases} f(x) = [x^2] \\ g(x) = [x]^2 \end{cases} \quad (ب)$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2} \\ g(x) = x\sqrt{x} \end{cases} \quad (پ)$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \\ g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}} \end{cases} \quad (الف)$$

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۷۷ چه تعداد از جفت توابع زیر با یکدیگر برابرند؟

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}, g(x) = x + 1 \quad (ب)$$

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x, g(x) = \tan x \cdot \cot x \quad (الف)$$

$$f(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}, g(x) = \cos x \quad (ب)$$

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

(تجربی خارج ۹۷)

 ۷۸ کدام یک از توابع زیر با تابع $y = \log \frac{x-2}{x}$ برابر است؟

$$2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 \quad (۳)$$

$$\log \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} \quad (۲)$$

$$\log(x-2) - \log x \quad (۱)$$

 ۷۹ اگر توابع $f(x) = 2x + 4$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + a}{x-2} & ; x \neq 2 \\ b & ; x = 2 \end{cases}$ مساوی باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۴

(۲) ۱۶

(۱) صفر

 ۸۰ اگر دو تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & ; x \neq 1 \\ b & ; x = 1 \end{cases}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ برابر باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟

(۴) ۲

(۳) ۳

(۲) ۱

(۱) ۱

 ۸۱ اگر تابع $f(x) = \frac{bx+2}{x^2+ax+4}$ و $g(x) = \frac{c}{x+2}$ برابر باشند، مقدار $a + b + c$ کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۶

(۲) ۴

(۱) ۳

 ۸۲ دو تابع $f(x) = \sqrt{x|x|}$ و $g(x) = \sqrt{|x|} \times \sqrt{|x|}$ با کدام دامنه با هم مساوی‌اند؟

 (۴) $(-\infty, 0]$

 (۳) $(0, +\infty)$

 (۲) $[-, +\infty)$

 (۱) $\mathbb{R}$

 ۸۳ به ازای چند مقدار a ، دو تابع $f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 2a}{x^2 + x - a}$ و $g(x) = a^2 - a + 2$ با هم مساوی هستند؟

(۴) ۲

(۳) ۳

(۲) ۱

(۱) صفر

 ۸۴ اگر توابع $f(x) = |2x^2 + ax + 1|$ و $g(x) = 2x^2 + ax + 1$ مساوی باشند، حدود a کدام است؟

 (۴) $[-2\sqrt{2}, 2]$

 (۳) $(-2, 2\sqrt{2})$

 (۲) $[-2, 2]$

 (۱) $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$

 ۸۵ اگر $f(x) = [x] + [-x]$ باشد، آن‌گاه تابع $f^2(x)$ با چه تعداد از توابع زیر، برابر است؟

 (ب) $f(-x)$

 (ب) $f(x)$

 (الف) $\sqrt{f(x)}$

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

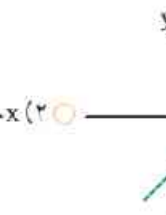
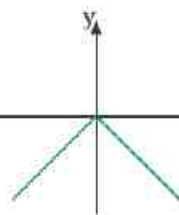
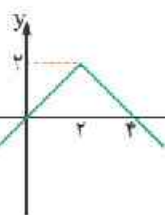
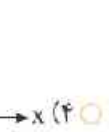
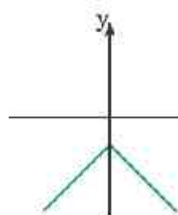
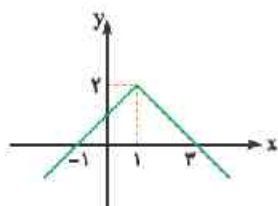
فصل اول

درس دوم: انتقال و تبدیل نمودار تابع

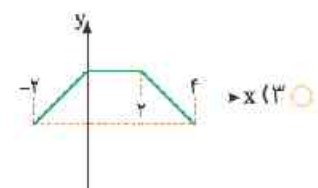
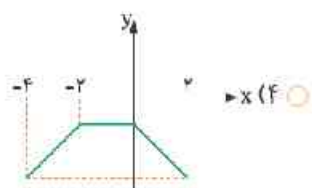
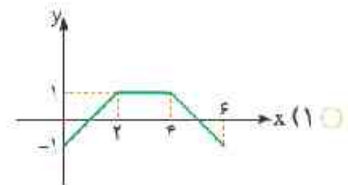
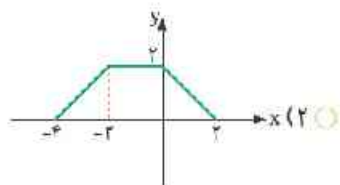
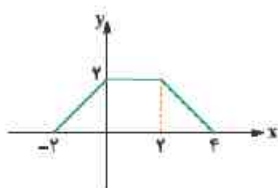
CHAPTER 1

انتقال و قرینه‌یابی

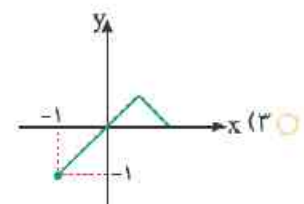
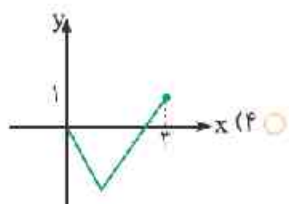
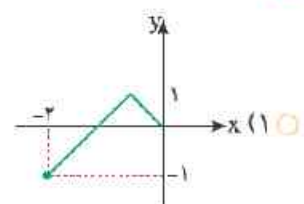
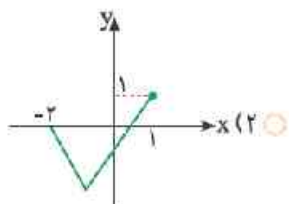
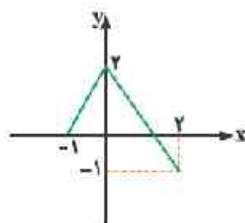
۸۶ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = f(x-1) - 2$ کدام است؟



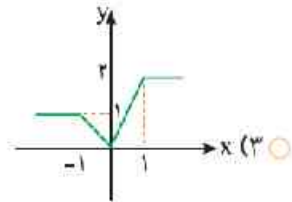
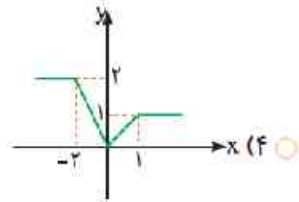
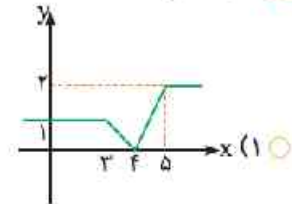
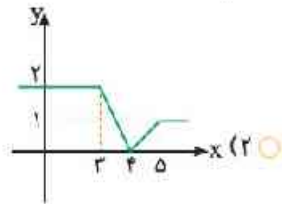
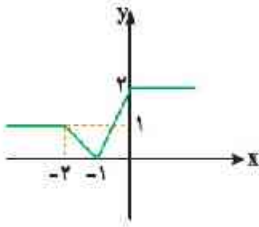
۸۷ نمودار تابع $y = f(x-2)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $f(x) - 3$ کدام است؟



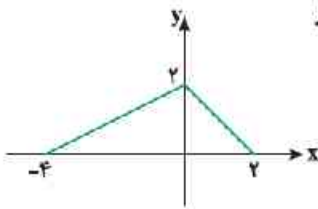
۸۸ نمودار تابع $y = -f(x-1)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = f(x)$ کدام است؟



۸۹ نمودار تابع $y = f(x-1)$ به شکل مقابل است. نمودار تابع $y = f(2-x)$ کدام است؟



۹۰ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. به ازای کدام مقدار k ، نمودار تابع $y = k + f(-x-1)$ از مبدأ مختصات عبور می‌کند؟

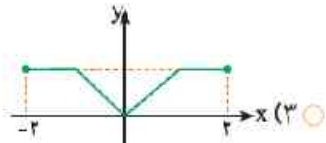
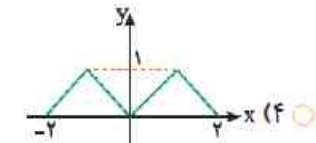
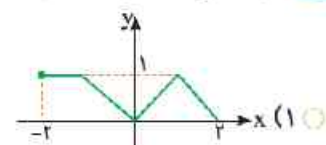
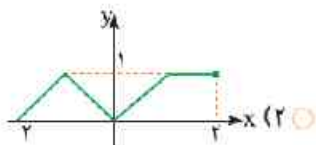
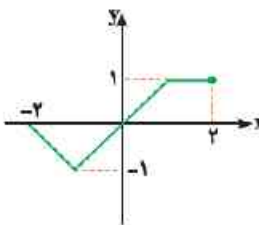


(۲) $-\frac{3}{2}$
(۴) ۱

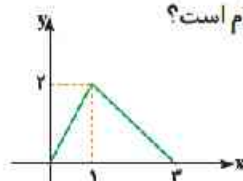
(۱) -۲
(۳) $\frac{4}{3}$

تو این بخش می‌خواهیم راجع به اثر قدر مطلق روی نمودار تابع حرف بزنیم و نمودارهای $|f(x)|$ و $f(|x|)$ رو بکشیم.

۹۱ نمودار تابع f به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = |f(x)|$ کدام است؟

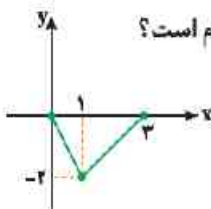


۹۲ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، مساحت محدود به نمودار تابع $y = f(|x+1|)$ و محور x ها کدام است؟



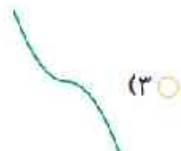
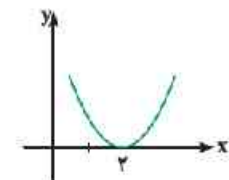
(۱) ۱
(۲) $\frac{2}{5}$
(۳) ۳
(۴) ۴

۹۳ با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل مقابل، مساحت محدود به نمودار تابع $y = |2f(x-3)|$ و محور x ها کدام است؟



(۱) ۲
(۲) $\frac{3}{5}$
(۳) ۵
(۴) ۶

۹۴ اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، کدام یک شکل تقریبی از $y = f(|x-2|) + 2$ است؟

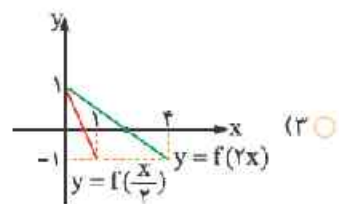
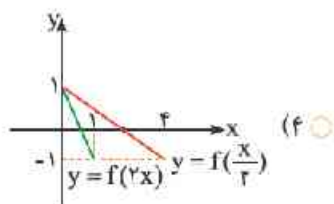
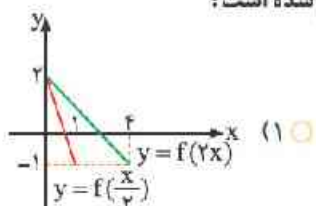
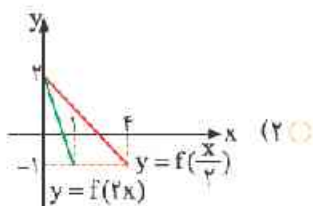
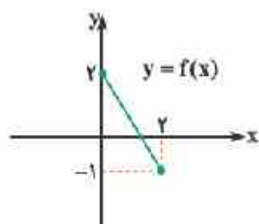


انقباض و انبساط نمودار

در سال دوازدهم یاد می‌گیریم که نمودار رو در راستای محورهای مختصات، کشیده یا فشرده کنیم؛ ساختن ضابطه تابع تو انبساط و انقباض خیلی مهمه.

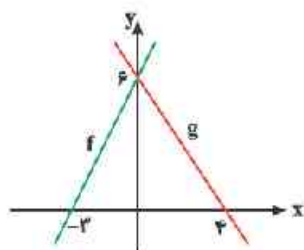
۹۵ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، توابع $y = f(\frac{x}{2})$ و $y = f(2x)$ در کدام گزینه به درستی

رسم شده است؟



۹۶ با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ در شکل مقابل، مساحت محدود به نمودار تابع $y = f(-x)$ ،

$y = g(\frac{x}{2})$ و محور x ها کدام است؟



۲۱ (۲)

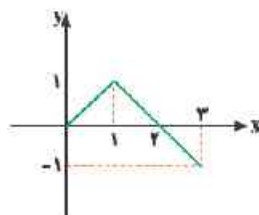
۱۸ (۱)

۲۷ (۴)

۲۴ (۳)

۹۷ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y = -2f(x+2)+1$ و خط $y = -\frac{1}{2}$ در

چند نقطه متقاطع‌اند؟



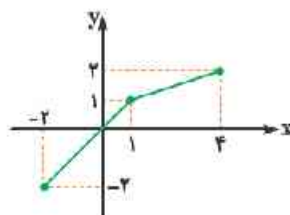
۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۹۸ با توجه به نمودار تابع f در شکل زیر، نمودار تابع $g(x) = f(2x) - 1$ در کدام بازه، زیر محور x ها است؟



$[-2, 0)$ (۲)

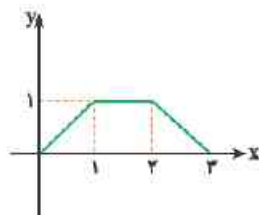
$[-1, 1)$ (۱)

$[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ (۴)

$[-1, \frac{1}{2})$ (۳)

۹۹ با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل مقابل، مساحت محدود به نمودار $y = f(-2x+1)$ و محور x ها

در ناحیه اول دستگاه مختصات کدام است؟



$\frac{1}{4}$ (۲)

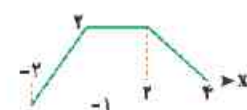
$\frac{1}{2}$ (۱)

$\frac{3}{8}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

۱۰۰ با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ مقابل، اگر دامنه تابع $y = 3f(2x-1)+1$ به صورت بازه $[a, b]$ باشد،

مقدار $b-a$ کدام است؟



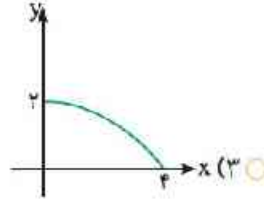
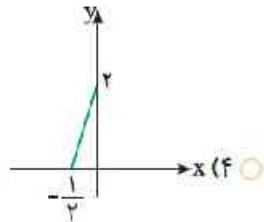
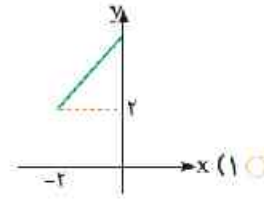
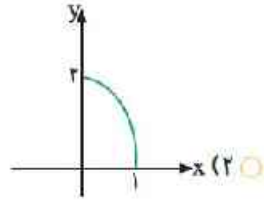
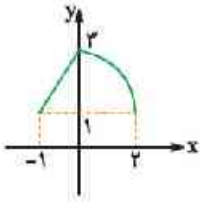
۱ (۱)

۲ (۲)

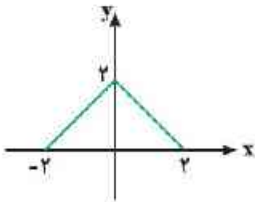
۳ (۳)

۴ (۴)

۱۵۱ نمودار تابع $y = 1 + f(2x)$ به صورت مقابل است. قسمتی از نمودار تابع $y = f(x)$ کدام است؟



۱۵۲ نمودار تابع $y = -\frac{1}{2}f(2x-1)$ به صورت مقابل است. مساحت ناحیه محصور بین نمودار $y = f(x)$ و محور x ها کدام است؟



۱۲ (۱)

۱۴ (۲)

۱۶ (۳)

۱۸ (۴)

۱۵۳ تابع $f(x) = \begin{cases} x+2 & ; -4 \leq x \leq 0 \\ 2 & ; 0 \leq x \leq 2 \\ -x+4 & ; 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. در بازه‌ای که نمودار تابع $y = 2f(x-1)$ بالای محور x ها قرار دارد، مساحت محدود

به نمودار و محور x ها کدام است؟

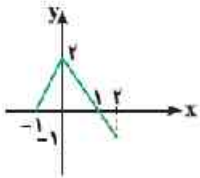
۱۲ (۱)

۱۶ (۲)

۲۴ (۳)

۳۲ (۴)

۱۵۴ نمودار تابع $y = -f(x+1)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $y = 2f(\frac{x+2}{3})$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟



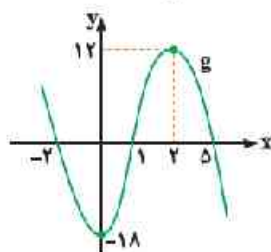
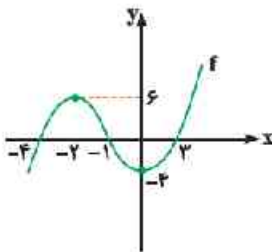
اول (۱)

دوم (۲)

سوم (۳)

چهارم (۴)

۱۵۵ نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $g(x) = \frac{1}{b}f(x-a)$ به صورت زیر است. مقدار $f(2a + \frac{2}{b})$ کدام است؟



۶ (۱)

-۴ (۲)

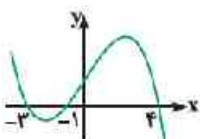
۱۸ (۳)

۱۲ (۴)

سریع توی سوالای زیر، برای پیدا کردن دامنه تابع، لازمه از انتقال نمودار استفاده کنیم.

۱۵۶ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x-2)$ است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{x}f(x)$ ، کدام است؟

(تجربی خارج ۹۴)



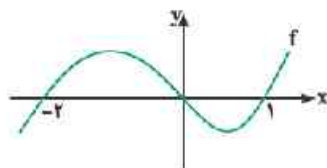
$[-1, 1] \cup [0, 6]$ (۱)

$[-3, 1] \cup [0, 2]$ (۲)

$[-5, -3] \cup [-1, 2]$ (۳)

$[-5, -3] \cup [0, 2]$ (۴)

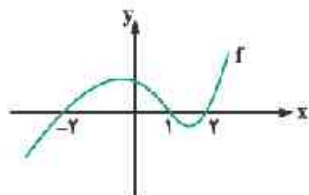
(تجربى نوبت دوم ۱۴۰۲)



۱۵۷ نمودار زیر، تابع f را نشان می‌دهد. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{f(x)}{f(x+1)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

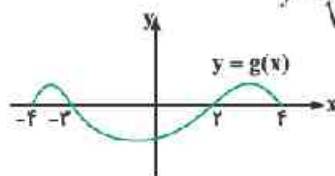
- ۱ (۱) ☐
۲ (۲) ☐
۳ (۳) ☐
۴ (۴) ☐

۱۵۸ نمودار زیر، تابع $y = f(x)$ را نشان می‌دهد. دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{xf(x) - 2f(x)}{f(x+1)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



- ۱ (۱) ☐
۲ (۲) ☐
۳ (۳) ☐
۴ (۴) بی‌شمار ☐

۱۵۹ اگر $f(x) = \log_2(x+3)$ و نمودار تابع $y = g(x)$ به صورت مقابل باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{g(x)}{2-f(x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



- ۱ (۱) ☐
۲ (۲) ☐
۳ (۳) ☐
۴ (۴) ☐

برخی مواقع، بدون داشتن شکل نمودار، باید راجع به تغییرات دامنه و برد تابع نظر بدیم.

۱۱۰ اگر دامنه $y = 2f(x) + 1$ بازه $[-1, 1]$ باشد، دامنه تابع $y = f(2x+1)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐
۲ (۲) ☐
۳ (۳) ☐
۴ (۴) ☐

۱۱۱ اگر دامنه تابع $y = 1 + f(2x)$ به صورت بازه $(-4, 6)$ باشد، دامنه تابع $y = 2 - f(\frac{x}{2} + 1)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐
۲ (۲) ☐
۳ (۳) ☐
۴ (۴) ☐

۱۱۲ دامنه تابع $y = f(x)$ و $y = f(kx)$ برابر $[b, c]$ است. اگر $k = 2a^2 - a - 5$ باشد، حاصل ضرب مقادیر a کدام است؟ (تجربى نوبت دوم ۱۴۰۳)

- ۱ (۱) ☐
۲ (۲) ☐
۳ (۳) ☐
۴ (۴) ☐

۱۱۳ اگر برد تابع $y = f(x)$ به صورت $[-4, 2]$ باشد، برد تابع $y = \frac{1}{2}f(2x-1) - 1$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱ (۱) ☐
۲ (۲) ☐
۳ (۳) ☐
۴ (۴) ☐

برخی توی تستای زیر، نقطه A روی نمودار f قرار داده و می‌خوایم نقطه نظیر A روی نمودار تبدیل یافته پیدا کنیم.

۱۱۴ نقطه $A(1, -4)$ روی نمودار تابع $y = 3 - f(x)$ قرار دارد. مختصات نقطه نظیر A روی نمودار تابع $y = \frac{1}{2}f(x-2)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐
۲ (۲) ☐
۳ (۳) ☐
۴ (۴) ☐

۱۱۵ اگر نقطه ای به طول ۱ روی منحنی $y = x^3 + 1$ باشد، تبدیل یافته آن روی $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$ چه نقطه ای است؟

- ۱ (۱) ☐
۲ (۲) ☐
۳ (۳) ☐
۴ (۴) ☐

۱۱۶ اگر نقطه $A(5, 1)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ باشد، نقطه متناظر آن روی تابع $y = |1 - 3f(2x-1)|$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐
۲ (۲) ☐
۳ (۳) ☐
۴ (۴) ☐

۱۱۷ نقطه $A(a, 1+b)$ روی نمودار تابع $y = 1 - f(x)$ قرار دارد و نقطه نظیر A روی تابع $y = f(\frac{x-1}{2})$ به صورت $A'(a, 3)$ است. نقطه

$B(b, a)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐
۲ (۲) ☐
۳ (۳) ☐
۴ (۴) ☐

فصل اول

 درس سوم:
انواع تابع

CHAPTER 1

سرخ توی اول از همه، بریم تابع خطی رو بررسی کنیم. توی این درس اطلاعات سال نهم، شامل نوشتن معادله خط، محاسبه شیب و ... خیلی به کارمون میاد.

۱۱۸ اگر $f(x)$ تابع خطی گذرنده از نقطه $(1, 1)$ و $f(-2) = 7$ باشد، مقدار اختلاف شیب و عرض از مبدأ تابع $f(x)$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

- ۲ (۱) ☐ ۳ (۲) ☐ ۴ (۳) ☐ ۵ (۴) ☐

۱۱۹ اگر $f = \{(1, m-1), (2, 0), (-3, m+3), (2m, -2)\}$ تابعی خطی باشد، m کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۱۲۰ نمودار تابع خطی f ، محور x را در نقطه‌ای به طول ۳ و محور y را در نقطه‌ای با عرض ۲ قطع می‌کند. اگر برد این تابع بازه $[-1, 8]$ باشد، دامنه آن کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $[-9, 4/5]$ ☐ ۲ (۲) ☐ $[-3, 1/5]$ ☐ ۳ (۳) ☐ $[-4/5, 9]$ ☐ ۴ (۴) ☐ $[-1/5, 3]$ ☐

۱۲۱ در یک تابع خطی، دامنه $[1, 3]$ و برد $[-4, -1]$ است. مقدار تابع در $x = \frac{4}{3}$ کدام می‌تواند باشد؟

- ۸ (۱) ☐ ۹ (۲) ☐ ۶ (۳) ☐ ۵ (۴) ☐

۱۲۲ اگر f تابعی خطی و $3x - 3 = f(x) + f(2x) + 3$ باشد، $f(0)$ کدام است؟

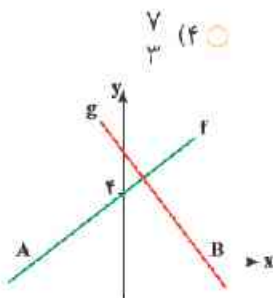
- ۶ (۱) ☐ ۱۲ (۲) ☐ ۱۵ (۳) ☐ ۱۸ (۴) ☐

۱۲۳ اگر $f(x) = (a-3)x^2 + 2ax + \frac{5}{a+1}$ تابعی خطی باشد، حاصل $f(1) + f(-2)$ کدام است؟

- ۵ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۷ (۴) ☐

۱۲۴ نمودار دو تابع خطی $f(x) = \frac{x+12}{a}$ و $g(x) = -ax + 6$ به صورت مقابل است. طول پاره خط AB کدام است؟

- ۱۱ (۱) ☐ ۱۳ (۳) ☐ ۱۲ (۲) ☐ ۱۴ (۴) ☐



۱۲۵ در تابع خطی f با شیب مثبت، اگر $f(f(x)+3) = x+5$ باشد، مقدار $f(6)$ کدام است؟

- ۷ (۱) ☐ ۸ (۲) ☐ ۹ (۳) ☐ ۱۰ (۴) ☐

سرخ توی این بخش دو نوع تابع خطی خاص رو بررسی می‌کنیم؛ خط افقی که بهش می‌گیم تابع ثابت و خط نیمساز ربع اول و سوم که بهش می‌گیم تابع همانی.

۱۲۶ اگر $f(x) = (m+2)x^2 + (n-3)x + mn$ تابعی ثابت باشد، حاصل $f(1/75)$ کدام است؟

- ۲ (۱) ☐ ۶ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

۱۲۷ اگر $f = \{(1, a+b), (5, a+2b), (b, 1-a)\}$ تابعی همانی باشد، $f(\sqrt{b^2+a^2})$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۴ (۲) ☐ ۵ (۳) ☐ ۶ (۴) ☐

۱۳۸ اگر f تابعی همانی، g تابعی ثابت و $fg^2(3) - f(5)g(5) + f(2) = 0$ باشد، حاصل $f(g(6)+1)$ کدام می‌تواند باشد؟

- ۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{7}{2}$

۱۳۹ دو تابع $f(x) = b - 3ax$ و $g(x) = c - (3b - 3)x$ ثابت هستند. اگر $f + g = 5$ باشد، حاصل bc چقدر است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

- ۱) -6 ۲) -4 ۳) 4 ۴) 6

۱۳۰ اگر $f(x) = (|a| - |b|)x$ تابع همانی، $g(x) = (b^2 - 1)x + (a^2 + 1)c$ تابعی ثابت و $(f - g)(x) = x + 5$ باشند، چند مقدار برای ac وجود دارد؟

- ۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۱۳۱ تابع با ضابطه $f(x) = c + (x+a)(bx+2) - 3x^2$ همانی است. حاصل $\left[\frac{a}{c}\right]$ کدام است؟

- ۱) 2 ۲) 1 ۳) 2 ۴) 1

۱۳۲ اگر $f(x) = (ax+2)(b-x) - 7x^2$ ضابطه یک تابع ثابت باشد، برد تابع f کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۱)

- ۱) $-\frac{2}{7}$ ۲) $\frac{2}{7}$ ۳) $-\frac{4}{7}$ ۴) $\frac{4}{7}$

۱۳۳ اگر f تابع همانی و g تابع ثابت بوده و $3 + 2x = g(3x) + 2f(3+x)$ باشد، مقدار $\frac{f(-1)}{g(4)}$ کدام است؟ (تجربی نوبت دوم ۱۴۰۴)

- ۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

۱۳۴ اگر تابع $f(x) = (a-b)x^2 + (b-2)x - c + h^2$ دارای برد تک‌عضو $\{1+2c\}$ و دامنه $[-1, 4]$ باشد، مساحت سطح زیر نمودار در این دامنه کدام است؟

- ۱) 5 ۲) 15 ۳) 10 ۴) 25

سرچ حالا که انواع مختلف تابع خطی رو بررسی کردیم به نگاهی به توابع چندجمله‌ای داشته باشیم.

۱۳۵ درجه کدام یک از توابع چندجمله‌ای زیر با سایر گزینه‌ها متفاوت است؟

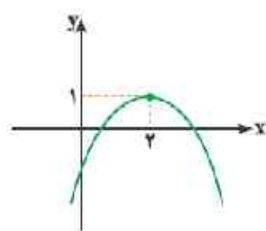
- ۱) $f(x) = x(x-2)^2 + (x^3-1)(x+2)$ ۲) $f(x) = (x-1)(x-2)(x)(x-3)$
۳) $f(x) = ((2x+7)(x-3))^2 + 3x^2 + x$ ۴) $f(x) = (x^3+8)(2) + (x-1)(x+2)x$

۱۳۶ تابع چندجمله‌ای f با ضابطه $f(x) = x^3 + x^{\frac{2n+3}{n}} - 2x^{n-3} + 1 + n$ را در نظر بگیرید، مقدار $f(3)$ کدام است؟

- ۱) 27 ۲) 54 ۳) 29 ۴) 56

سرچ در ادامه تابع‌های معروضی که در دبیرستان یاد گرفتیم رو بررسی می‌کنیم.

۱۳۷ شکل مقابل که از انتقال نمودار $y = x^2$ حاصل شده است، مربوط به کدام تابع می‌تواند باشد؟



۱) $y = (x+1)^2 + 2$

۲) $y = -(x-2)^2 + 1$

۳) $y = -(x-2)^2 - 1$

۴) $y = -(x+2)^2 + 1$

۱۳۸ نمودار تابع $y = x^3 - 3x - 10$ را حداقل چند واحد به طرف x ‌های مثبت انتقال دهیم، تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ‌ها غیرمنفی باشد؟

(تجربی خارج ۹۳) ۱) 1 ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) 2 ۴) 3

۱۳۹ نمودار منحنی $y = x^2 + 6x + 5$ را حداقل چند واحد به سمت راست حرکت دهیم تا طول دو نقطه مشترک آن با نمودار $y = |x|$ نامنفی باشد؟

- ۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 5

۱۴۰ نمودار تابع $f(x) = x^2 - 6x + 10$ را a واحد به سمت راست و b واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم تا روی نمودار تابع $g(x) = x^2 - 12x + 34$ قرار گیرد. مقدار $a + b$ کدام است؟

- ۱) 5 ۲) 6 ۳) 7 ۴) 8

۱۴۱ ابتدا قرینه نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را 4 واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.

طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

- ۱) $0, 2$ ۲) $-1, 1$ ۳) $-1, 2$ ۴) $-2, 1$

۱۴۲ اگر x_1 و x_2 صفرهای تابع $f(x) = x^2 + 8x - 1$ باشند، در کدام توابع زیر x_1 و x_2 صفرهای تابع هستند؟

- الف) $-3f(x)$ ب) $|f(x)|$ پ) $f(x+3)$ ت) $f(x)-3$
☐ الف و ب ☐ الف و ت ☐ ب و پ ☐ ب و ت

۱۴۳ نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 5$ را ۲ واحد به طرف x ‌های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف y ‌های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه بالای نیمساز ربع اول است؟

(ریاضی ۹۸)

- ☐ (۱) (۳، ۴) ☐ (۲) (۲، ۵) ☐ (۳) (۳، ۵) ☐ (۴) (۲، ۶)

۱۴۴ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 4x - x^2$ را در امتداد محور x ‌ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات کدام است؟

(تجربی ۱۴۰۱)

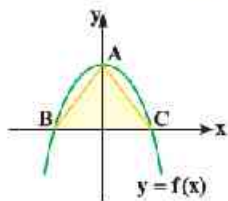
- ☐ (۱) ۱ ☐ (۲) ۲ ☐ (۳) $2\sqrt{5}$ ☐ (۴) $\sqrt{10}$

۱۴۵ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x$ ($x > 1$)، مفروض است. قرینه نمودار آن نسبت به محور x ‌ها را، ۱۶ واحد در امتداد محور y ‌ها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

- ☐ (۱) $4\sqrt{5}$ ☐ (۲) $6\sqrt{2}$ ☐ (۳) $5\sqrt{2}$ ☐ (۴) $2\sqrt{5}$

۱۴۶ نمودار تابع $y = (x+1)^2$ را ۲ واحد به طرف x ‌های مثبت انتقال می‌دهیم و سپس آن را با ضرب ۳ در راستای افقی منقبض می‌کنیم. نمودار حاصل و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع‌اند؟

- ☐ (۱) -۱، ۱ ☐ (۲) ۰، ۱ ☐ (۳) ۰، -۱ ☐ (۴) -۱، ۰، ۱

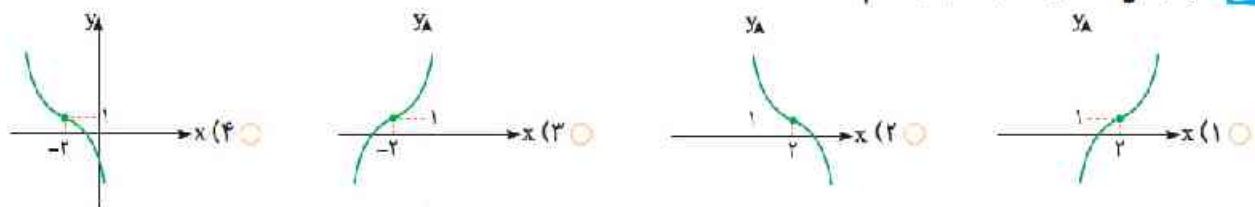


۱۴۷ در شکل مقابل، نمودار تابع $f(x) = mx^2 + (m+2)x + 18$ از انتقال و انبساط عمودی تابع $y = -x^2$ به دست آمده است. مساحت مثلث ABC کدام است؟

- ☐ (۱) ۳۶ ☐ (۲) ۵۴ ☐ (۳) ۱۲ ☐ (۴) ۴۸

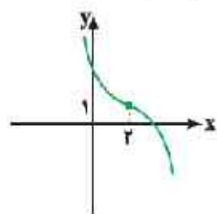
۱۴۸ توی کتاب حسابان ۲، بحث تابع درجه سوم به طور جداگانه باز شده، این قسمت درس به همین تابع اختصاص داده، رسم این تابع خیلی مهمه.

۱۴۸ نمودار تابع $f(x) = -(x-2)^3 + 1$ کدام است؟



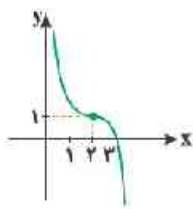
۱۴۹ نمودار تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ از کدام ناحیه مختصات نمی‌گذرد؟

- ☐ (۱) اول ☐ (۲) دوم ☐ (۳) سوم ☐ (۴) چهارم



۱۵۰ نمودار تابع $y = -(x-a)^3 + b$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = -hx^3 + a$ کدام است؟





۱۵۱ اگر نمودار تابع $y = m(x-n)^3 + P$ به صورت مقابل باشد، مقدار $\frac{mP}{n}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{5}$ ☐
۲) $-\frac{1}{5}$ ☐
۳) ۲ ☐
۴) -۲ ☐

۱۵۲ نمودار تابع $y = x^3$ را a واحد در راستای محور x ها به سمت چپ و b واحد در راستای محور y ها به بالا منتقل می‌کنیم تا بر نمودار تابع $y = (x^2 + 3)(x + 3) - 7$ منطبق شود. مقدار $a + b$ کدام است؟

- ۱) ۱ ☐ ۲) ۲ ☐ ۳) ۳ ☐ ۴) ۴ ☐

۱۵۳ به ترتیب با کدام انتقال‌ها، می‌توان نمودار $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ را به روی نمودار $y = x^3$ منطبق کرد؟

- ۱) ۱ واحد به سمت راست و ۱ واحد به سمت پایین ☐
۲) ۱ واحد به سمت راست و ۱ واحد به سمت بالا ☐
۳) ۱ واحد به سمت چپ و ۱ واحد به سمت بالا ☐
۴) ۱ واحد به سمت چپ و ۱ واحد به سمت پایین ☐

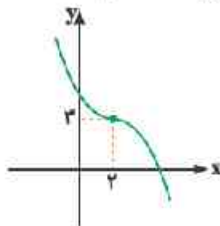
۱۵۴ به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - m$ از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند؟

- ۱) $(-\infty, 0]$ ☐ ۲) $[-8, 0]$ ☐ ۳) $(0, +\infty)$ ☐ ۴) $[8, +\infty)$ ☐

۱۵۵ نمودار تابع $y = x^3 - 6x^2 + 12x - m$ را ابتدا ۲ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم و سپس آن را ۲ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا به روی نمودار تابع $y = x^3 + 2$ منطبق شود. مقدار m کدام است؟

- ۱) ۸ ☐ ۲) -۸ ☐ ۳) ۶ ☐ ۴) -۴ ☐

۱۵۶ دو تابع $f(x) = ax + b$ و $g(x) = x^2 - 6x + c$ را در نظر بگیرید. اگر نمودار تابع $y = f(x) - xg(x)$ به صورت زیر باشد، مقدار $a + b - c$ کدام است؟



- ۱) ۱ ☐ ۲) -۱ ☐ ۳) ۲ ☐ ۴) -۲ ☐

۱۵۷ نمودار تابع $f(x) = x^2|x| + x^3 + 2$ و $g(x) = 3 - |x|$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟

- ۱) ۱ ☐ ۲) ۲ ☐ ۳) ۳ ☐ ۴) ۴ ☐

۱۵۸ معادله $x^3 + |x - 2| = 2$ چند جواب دارد؟

- ۱) ۱ ☐ ۲) ۲ ☐ ۳) ۳ ☐ ۴) ۴ ☐

۱۵۹ نمودار تابع $f(x) = (x^2 + 3)(x - 3)$ را ۷ واحد در راستای قائم به بالا منتقل می‌کنیم و آن را $g(x)$ می‌نامیم. نمودار تابع $y = g(|x|)$ در کدام بازه، زیر محور x قرار دارد؟

- ۱) $(-\infty, 2)$ ☐ ۲) $(0, 4)$ ☐ ۳) $(2, 2)$ ☐ ۴) $(2, +\infty)$ ☐

توی کتاب درسی، نمودار دو تابع $y = x^3$ و $y = x^2$ با همدیگر مقایسه شدن. تست‌های زیر مربوط به مقایسه این دو نموداره.

۱۶۰ در کدام بازه، نمودار تابع $y = -x^3$ بالاتر از نمودار تابع $y = x^2$ قرار می‌گیرد؟

- ۱) $(0, 1)$ ☐ ۲) $(-\infty, -1)$ ☐ ۳) $(-\infty, 1)$ ☐ ۴) $(0, +\infty)$ ☐

۱۶۱ در کدام بازه، نمودار تابع $y = |x^3|$ پایین‌تر از نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد؟

- ۱) $(1, +\infty)$ ☐ ۲) $(0, 1) \cup (-1, 0)$ ☐ ۳) $[-1, 1]$ ☐ ۴) $\mathbb{R} - [0, 1]$ ☐

۱۶۲ در کدام بازه، نمودار تابع $f(x) = x^2 + 4x + 4$ پایین‌تر از نمودار تابع $g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ قرار دارد؟

- (۱) $(-2, -1)$ (۲) $(-1, +\infty)$ (۳) $(-\infty, -2)$ (۴) $(-2, +\infty)$

۱۶۳ نمودار دو تابع $y = x^3$ و $y = x|x|$ در چند نقطه با هم برخورد می‌کنند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

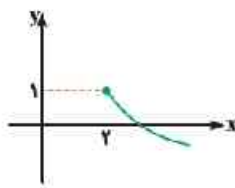
۱۶۴ به ازای چند مقدار صحیح k ، نمودار دو تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & ; x^3 > x^2 \\ (x-1)^3 & ; x^3 < x^2 \end{cases}$ و $g(x) = k$ فاقد نقطه برخورد هستند؟

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

تست‌های بعدی در مورد تابع‌های $\sqrt{x}$ و $|x|$ هستند.

۱۶۵ نمودار تابع مقابل از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به دست آمده است. ضابطه این تابع کدام است؟

(برگرفته از کتاب درسی)



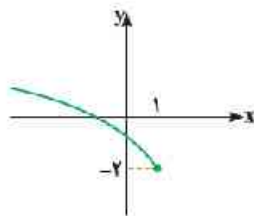
(۱) $y = 1 + \sqrt{2-x}$

(۲) $y = 1 - \sqrt{x-2}$

(۳) $y = 1 - \sqrt{-x+2}$

(۴) $y = 1 - \sqrt{-x-2}$

۱۶۶ نمودار تابع $f(x) = a + \sqrt{-x+b}$ به صورت مقابل است. مقدار $a \times b$ کدام است؟



(۱) -۲

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۱

۱۶۷ به ترتیب با کدام تبدیل‌ها، نمودار $y = \sqrt{x+1}$ به روی نمودار $y = -\sqrt{2-x}$ منطبق می‌شود؟

(۱) انتقال یک واحد به راست - قرینه نسبت به محور y ها (۲) انتقال یک واحد به چپ - قرینه نسبت به مبدأ مختصات

(۳) قرینه نسبت به محور y ها - انتقال یک واحد به راست (۴) قرینه نسبت به مبدأ مختصات - انتقال یک واحد به چپ

۱۶۸ قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم. منحنی

(ریاضی ۹۹)

اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

(۱) $x = 1$ (۲) $x = 1/5$ (۳) $x = 2$ (۴) $x = 2/5$

۱۶۹ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت مثبت

(تجربی ۹۹)

انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات کدام است؟

(۱) $4\sqrt{15}$ (۲) $6\sqrt{7}$ (۳) $2\sqrt{17}$ (۴) $6\sqrt{10}$

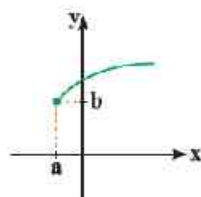
۱۷۰ نمودار تابع $y = 3 - \sqrt{2x}$ را ابتدا یک واحد در امتداد محور x ها در جهت منفی و سپس قرینه آن نسبت به محور x ها را ۵ واحد در امتداد

(تجربی نوبت اول ۱۴۰۴)

محور y ها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. طول نقطه برخورد نمودار تابع جدید با تابع ثابت $f(x) = \frac{7}{4}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{16}$

۱۷۱ نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x+5} + 4\sqrt{x+1}$ به صورت مقابل است. مقدار $a \times b$ کدام است؟



(۱) ۱

(۲) -۱

(۳) ۲

(۴) -۲

۱۷۲ مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع‌های $y = |x-2|$ ، $y = |x+2|$ و $y = |x|$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) $2/5$ (۳) ۳ (۴) $3/5$

۱۷۳ نمودار تابع $y = |x - 2| + 4$ را واحد به طرف x های منفی و یک واحد به طرف y های مثبت انتقال می دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع اند؟

(تجربی ۹۳)

- ۱) $3/5$ ☐ ۲) 3 ☐ ۳) $2/5$ ☐ ۴) 2 ☐

۱۷۴ نمودار تابع $y = |x| + 1$ را واحد به سمت چپ انتقال داده و با ضریب ۲ در راستای محور y منبسط می کنیم. سپس آن را نسبت به محور y ها قرینه می کنیم. معادله منحنی جدید کدام است؟

- ۱) $y = 2|x + 1|$ ☐ ۲) $y = 2|x| + 1$ ☐ ۳) $y = 2|1 - x|$ ☐ ۴) $y = 2|x - 1|$ ☐

۱۷۵ به ترتیب با کدام تبدیل ها، نمودار تابع $y = -|x|$ به روی نمودار $y = -\frac{1}{4}|2x + 1|$ منطبق می شود؟

۱) انتقال ۱ واحد به چپ - نصف کردن طول و عرض تمام نقاط

۲) انتقال $\frac{1}{4}$ واحد به راست - نصف کردن طول و عرض تمام نقاط

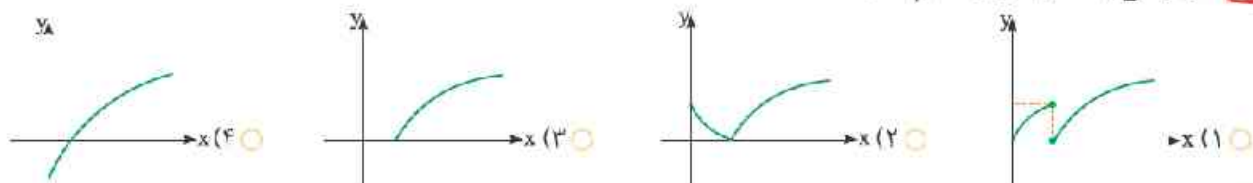
۳) انتقال ۱ واحد به چپ - قرینه نسبت به محور x ها

۴) انتقال $\frac{1}{4}$ واحد به چپ - قرینه نسبت به محور x ها

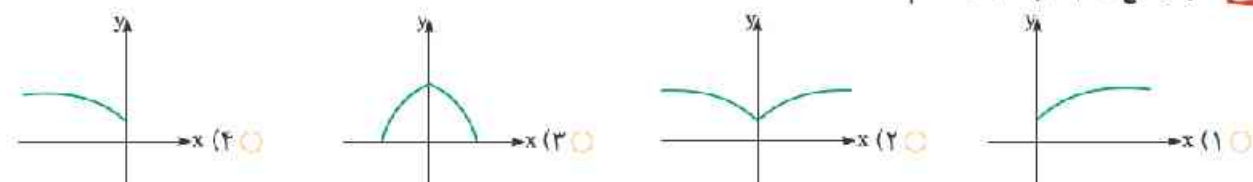
۱۷۶ نمودار توابع $f(x) = \sqrt{x + 2}$ و $g(x) = |x - 1| - 2$ در چند نقطه متقاطع اند؟

- ۱) 1 ☐ ۲) 2 ☐ ۳) 3 ☐ ۴) متقاطع نیستند. ☐

۱۷۷ نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x} - 1$ کدام است؟



۱۷۸ نمودار تابع $f(x) = \sqrt{|x| + 1}$ کدام است؟



تسريع بعضی وقتا بعد از رسم نمودار تابع، باید از قوانین هندسه تحلیلی، فاصله نقطه از خط، فاصله دو نقطه یا... رو محاسبه کنیم.

۱۷۹ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x + 3}$ را در امتداد محور x ها، b واحد در جهت مثبت انتقال می دهیم. اگر کمترین فاصله بین عرض از مبدأ نمودار حاصل تا خط $y = x$ ، برابر با یک واحد باشد، $f(b)$ کدام است؟

- ۱) 1 ☐ ۲) 2 ☐ ۳) 3 ☐ ۴) 4 ☐

۱۸۰ نقطه A ، نقطه برخورد تابع $y = \sqrt{x + 2}$ با محور عرض ها است. کم ترین فاصله نقطه A از منحنی $y = x + |x|$ کدام است؟ (تجربی نوبت اول ۱۴۰۴)

- ۱) $1/\sqrt{10}$ ☐ ۲) $1/\sqrt{5}$ ☐ ۳) $2/\sqrt{10}$ ☐ ۴) $2/\sqrt{5}$ ☐

۱۸۱ نقطه A روی محور x ها را در نظر بگیرید. اگر کمترین فاصله نقطه A از نمودار تابع $f(x) = x + |x - 1|$ برابر $\sqrt{5}$ باشد، فاصله نقطه A از عرض از مبدأ تابع f کدام است؟

- ۱) 1 ☐ ۲) $\sqrt{5}$ ☐ ۳) 3 ☐ ۴) $\sqrt{10}$ ☐

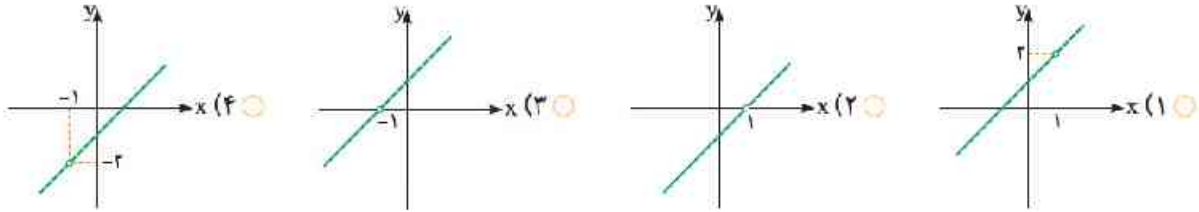
تسريع نوبت میرسه به بررسی تابع گویا، توی این بخش روی دامنه، برد و رسم این تابع تمرکز می کنیم.

۱۸۲ چه تعداد از توابع زیر، تابعی گویا هستند؟

الف) $y = \frac{5x}{x^2 - 1}$ ☐ ب) $y = \frac{x + 2}{x - 3}$ ☐ پ) $y = \frac{x\sqrt{x + 3}}{3x + 1}$ ☐

- ۱) 1 ☐ ۲) 2 ☐ ۳) 3 ☐ ۴) صفر ☐

۱۸۳ نمودار تابع $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ کدام است؟

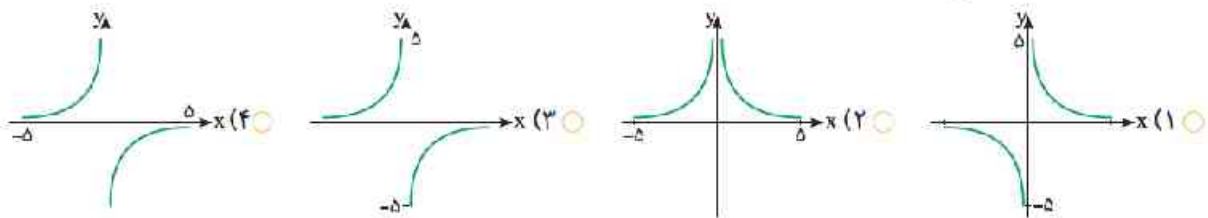


۱۸۴ اگر تابع $f(x) = \frac{k\sqrt{x} + x^2}{x - 2}$ یک تابع گویا باشد، $f(f(1) + 4)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۹ (۴) -۹

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۸۵ نمودار تابع یا ضابطه $f(x) = \frac{-1}{x}$ در دامنه $D_f = [-5, 5] - \{0\}$ کدام است؟

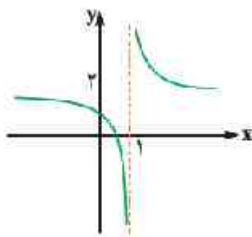


۱۸۶ برد تابع یا ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ در بازه $[-3, 3] - \{0\}$ کدام است؟

- (۱) $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ (۲) $\mathbb{R} - (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ (۳) $\mathbb{R} - [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ (۴) $[-3, 3]$

۱۸۷ نمودار تابع $f(x) = \frac{2x - 3}{x - 1}$ از کدام ناحیه مختصات نمی‌گذرد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم



۱۸۸ نمودار تابع $f(x) = \frac{mx - 1}{x - n}$ به صورت مقابل است، mn کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۸۹ نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱ واحد در جهت مثبت و سپس قرینه آن نسبت به محور x ها را در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f از مبدأ مختصات کدام است؟

(تجربی خارج ۱۴۰۱)

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۳) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

۱۹۰ نمودار $\frac{1}{f}$ را در امتداد محور x ها، a واحد در جهت مثبت انتقال داده و آن را g می‌نامیم. سپس تابع $|g|$ را در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. طول نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f برابر $\frac{1}{|f|}$ است. اگر f تابع همانی باشد، اختلاف مقادیر در تساوی

(تجربی نوبت اول ۱۴۰۲)

$f(x + a) = 3$ کدام است؟

- (۱) $2 + \sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $2 - \sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

۱۹۱ برد تابع $f(x) = \frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 - 16}$ کدام است؟

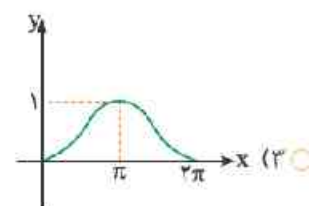
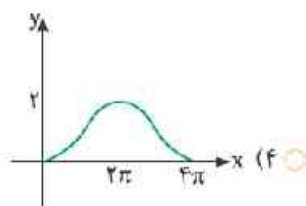
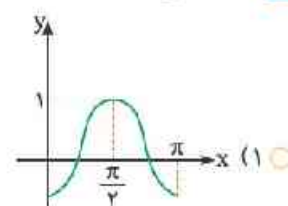
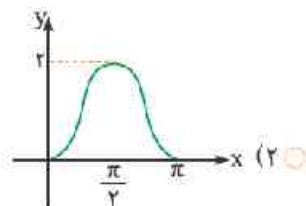
- (۱) $\mathbb{R} - \{1\}$ (۲) $\mathbb{R} - \{\frac{1}{8}, 1\}$ (۳) $\mathbb{R} - \{\pm 4\}$ (۴) $\mathbb{R}$

۱۹۲ اگر $f(x) = \frac{2x+5}{x+1}$ باشد، برد تابع $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $[0, +\infty)$ (۲) $(2, 5]$ (۳) $(3, 5]$ (۴) $(4, +\infty)$

سوال سریع: سؤال‌های زیر مربوط به تبدیل نمودار توابع مثلثاتی که به طور مفصل تو فصل‌های بعدی یاهاشون کار داریم.

۱۹۳ نمودار تابع $f(x) = 1 - \cos 2x$ کدام است؟



۱۹۴ نمودار تابع $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ را به اندازه $\frac{3\pi}{4}$ به طرف‌های منفی انتقال داده، سپس آن را نسبت به محور y ها قرینه کرده و در نهایت ۲ واحد

به طرف‌های مثبت انتقال می‌دهیم. ضابطه تابع حاصل کدام است؟

- (۱) $y = 2 + \sin x$ (۲) $y = 2 + \cos(\frac{\pi}{4} + x)$ (۳) $y = 2 - \cos x$ (۴) $y = -2 - \cos(\frac{\pi}{4} + x)$

۱۹۵ نمودار دو تابع $f(x) = |\log_2 x|$ و $g(x) = |\sin x|$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟

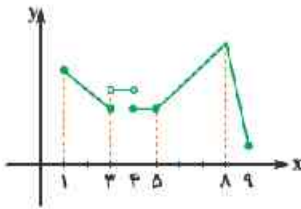
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) متقاطع نیستند.

یادداشت:

فصل اول

 درس چهارم:
توابع صعودی و نزولی

CHAPTER 1



سبزه اولین بخش این درس به شناسایی توابع صعودی و نزولی اختصاص داده.

 ۱۹۶ در نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل، بازه‌های $[a, b]$ و $[c, d]$ به ترتیب بزرگ‌ترین بازه صعودی و بزرگ‌ترین بازه نزولی هستند. $a+d$ کدام است؟ ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}$)

- ۱۲ (۱) ☐ ۱۵ (۲) ☐
 ۷ (۳) ☐ ۱۱ (۴) ☐

 ۱۹۷ تابع $f(x) = 2x^2 - 8x - 3$ را در نظر بگیرید. در کدام بازه زیر برای هر $x_1, x_2 \in D_f$ که $x_2 > x_1$ ، آنگاه $f(x_2) < f(x_1)$ برقرار است؟

- ۱ (۱) ☐ ۱ (۲) ☐ ۲ (۳) ☐ ۳ (۴) ☐

 ۱۹۸ به ازای چند مقدار صحیح m ، تابع $f = \{(0, m^2 - 1), (-2, 1), (1, m - 2)\}$ نزولی است؟

- ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) ☐

 ۱۹۹ به ازای چند مقدار صحیح m ، تابع $f = \{(-5, 4 - m), (2, 2m + 3), (10, -10), (3, m - 2)\}$ نزولی است؟

(تجربی نوبت دوم ۱۴۰۴)

- ۴ (۱) ☐ ۵ (۲) ☐ ۶ (۳) ☐ ۷ (۴) ☐

 ۲۰۰ دو تابع $f = \{(-1, 2), (1, |a|), (2, -1)\}$ و $g = \{(-2, 0), (-1, 3), (1, 1), (2, 4)\}$ را در نظر بگیرید. اگر تابع $f + g$ اکیداً نزولی باشد، محدوده a کدام است؟

- ۳ (۱) ☐ ۳ (۲) ☐ ۲ (۳) ☐ ۲ (۴) ☐

 ۲۰۱ تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & ; x \geq 0 \\ \frac{1}{x} & ; x < 0 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی چگونه است؟

- ۱ (۱) ☐ یک به یک - نزولی ☐ ۲ (۲) ☐ یک به یک - صعودی ☐
 ۳ (۳) ☐ غیر یک به یک - غیر یکنوا ☐ ۴ (۴) ☐ غیر یک به یک - غیر یکنوا ☐

 ۲۰۲ تابع با ضابطه $f(x) = |x + 2| + |x - 1|$ در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

- ۱ (۱) ☐ $(-\infty, -2)$ ☐ ۲ (۲) ☐ $(1, +\infty)$ ☐ ۳ (۳) ☐ $(-2, 1)$ ☐ ۴ (۴) ☐ $(-\infty, 1)$ ☐

 ۲۰۳ تابع $f(x) = x + |x - 1|$ در بازه $[a, +\infty)$ اکیداً صعودی است. کم‌ترین مقدار a کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ -۱ ☐ ۲ (۲) ☐ صفر ☐ ۳ (۳) ☐ ۱ ☐ ۴ (۴) ☐ ۲ ☐

(تجربی نوبت اول ۱۴۰۳)

 ۲۰۴ تابع $y = (x - 1)|x|$ در بازه (a, b) اکیداً نزولی است. مقدار $a + b$ کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ ۲ (۲) ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ ۳ (۳) ☐ $\frac{3}{4}$ ☐ ۴ (۴) ☐ $\frac{3}{2}$ ☐

 ۲۰۵ کدام گزینه در مورد تابع با ضابطه $f(x) = x \left(|x| + \frac{1}{x} \right)$ صحیح است؟

- ۱ (۱) ☐ همواره نزولی ☐ ۲ (۲) ☐ همواره صعودی ☐
 ۳ (۳) ☐ ابتدا صعودی، سپس نزولی ☐ ۴ (۴) ☐ ابتدا نزولی، سپس صعودی ☐

۲۰۶ تابع با ضابطه $f(x) = |x^2 - 2x - 2|$ در چه تعداد از بازه‌های زیر، اکیداً نزولی است؟

- الف) $(1, 2)$ ب) $(-2, -1)$ پ) $(0, 1)$
☐ ۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴
 صفر

۲۰۷ بُرد تابع $f(x) = \left| \frac{1}{x} + 3 + x \right|$ در بازه‌ای که نزولی نیست، کدام است؟

- الف) $(2, +\infty)$ ب) $(0, 4)$ ج) $(3, 4) \cup (4, +\infty)$ د) $(4, +\infty)$

۲۰۸ کدام یک از گزینه‌های زیر، راجع به صعودی و نزولی بودن تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 1$ صحیح است؟

- ۱) در بازه $[2, 3]$ اکیداً صعودی است.
 ۲) در بازه $[1, 2]$ اکیداً صعودی است.
 ۳) در بازه $[3, 4]$ اکیداً نزولی است.
 ۴) در بازه $[0, 2]$ اکیداً نزولی است.

۲۰۹ دو تابع $f(x) = x\sqrt{x^2}$ و $g(x) = 2x - 1$ را در نظر بگیرید. اگر تابع $y = (f - g)(x)$ در بازه (a, b) اکیداً نزولی باشد، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- الف) $1/5$ ب) $2/5$ ج) $3/5$ د) $4/5$

۲۱۰ در بازه‌ای که تابع با ضابطه $f(x) = |x - 2| + x - 3$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x) = 2x^2 - x - 10$ در چند نقطه مشترک هستند؟

(تقریب ۹۷)

- الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ فاقد نقطه مشترک هستند.

۲۱۱ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & ; x \leq 1 \\ \log_2 x & ; x > 1 \end{cases}$ در کدام بازه زیر اکیداً صعودی است؟

- الف) $(-\infty, +\infty)$ ب) $(0, 2)$ ج) $(-5, 1)$ د) $(4, +\infty)$

۲۱۲ در کدام بازه زیر با افزایش طول نقاط، مقدار عرض تابع $f(x) = \frac{x}{x-1}$ کاهش می‌یابد؟

- الف) $[0, 2]$ ب) $[2, -]$ ج) $[2, 2]$ د) $(-\infty, +\infty)$

۲۱۳ تابع اکیداً نزولی f با دامنه $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. مجموعه جواب نامعادله $f(|x| + x) > f(x + 2)$ شامل چند عدد صحیح است؟

- الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴

۲۱۴ اگر f تابعی اکیداً نزولی با دامنه $\mathbb{R}$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{f(3x - 4) - f(x + 3)}$ چند عدد صحیح را شامل می‌شود؟

- الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴

توجه: تنها تابعی که هم صعودی و هم نزولی، تابع ثابت.

۲۱۵ تابع $f(x) = mx^2 - nx - k$ در هر بازه، هم صعودی و هم نزولی است. اگر مجموعه زیر، تابع باشد، مقدار $f(\sqrt{5})$ کدام است؟ (داخل ۱۴۰۱)

$$\{(m, n - 1), (0, k), (n - 1, m^2 + 2m - 1), (3k + 2, 2k + 1)\}$$

- الف) $\sqrt{5}$ ب) $-\sqrt{5}$ ج) ۱ د) -1

۲۱۶ اگر $f = \{(-1, 2a), (3, b + 3), (c, a - c), (b, 2a + c), (a, 4)\}$ تابعی هم صعودی و هم نزولی باشد، $|a| + |b| + |c|$ کدام است؟

- الف) ۵ ب) ۷ ج) ۴ د) ۶

۲۱۷ اگر تابع $f(x) = (m - 1)x^2 + (n - 2)x + m + n$ بر روی $\mathbb{R}$ ، هم صعودی و هم نزولی باشد، آنگاه وضعیت صعودی و نزولی بودن تابع

$$g(x) = (m + n)x + (m - n) + (m - n)x + (m + n)$$
 چگونه است؟

- ۱) ابتدا صعودی سپس نزولی
 ۲) ابتدا نزولی سپس صعودی
 ۳) همواره صعودی
 ۴) همواره نزولی

توجه: توی تستای زیر باید وضعیت یکنوایی تابع رو تحلیل کنین تا بتونین پارامتر خواسته شده رو پیدا کنین.

۲۱۸ به ازای کدام مقادیر m ، تابع $y = x^2 - mx + 3$ در بازه $[1, +\infty)$ اکیداً صعودی است؟

- الف) $(-\infty, -2]$ ب) $[2, +\infty)$ ج) $(-2, +\infty)$ د) $(-\infty, 2]$

(تجربی ۱۴۰۱)

 ۲۱۹ تابع $f(x) = (-9 + k^2)x^3 + 5$ اکیداً نزولی است. مجموع مقادیر صحیح k چقدر است؟

- ☐ ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۳ (۳) ☐ ۴ (۴) صفر

 ۲۲۰ اگر تابع $f(x) = -2x^2 + (m^2 - 1)x - 3$ در بازه $[-3, 2]$ غیریکنوا باشد، محدوده m کدام است؟

- ☐ ۱ (۱) $|m| < \sqrt{3}$ ☐ ۲ (۲) $|m| < 3$ ☐ ۳ (۳) $|m| > 2$ ☐ ۴ (۴) $|m| > 1$

 ۲۲۱ اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع $y = -5x^2 + ax - 8$ در آن اکیداً صعودی است، بازه $[-\infty, 2/5)$ باشد، عرض رأس سهمی کدام است؟

(ریاضی نوبت دوم ۱۴۰۳)

- ☐ ۱ (۱) $13/75$ ☐ ۲ (۲) $14/25$ ☐ ۳ (۳) $23/25$ ☐ ۴ (۴) $24/75$

 ۲۲۲ دو تابع $f(x) = 2x + 6$ و $g(x) = \frac{x}{4} - a$ مفروض است. اگر بازه $[-\frac{5}{4}, +\infty)$ وسیع‌ترین بازه‌ای باشد که تابع $f \times g$ در آن اکیداً صعودی است، a کدام است؟

- ☐ ۱ (۱) ☐ ۲ (۲) -1 ☐ ۳ (۳) $1/5$ ☐ ۴ (۴) $-1/5$

 ۲۲۳ به ازای کدام مقادیر a ، تابع $f(x) = ax + 2|x - 3|$ اکیداً صعودی است؟

- ☐ ۱ (۱) $a > 2$ ☐ ۲ (۲) $a < -2$ ☐ ۳ (۳) $|a| > 2$ ☐ ۴ (۴) $-2 < a < 2$

 ۲۲۴ تابع $f(x) = |x - k| + 2$ در بازه $[-1, 2]$ اکیداً یکنوا است. مقادیر k کدام است؟

- ☐ ۱ (۱) $[-1, 2]$ ☐ ۲ (۲) $(-1, 2)$ ☐ ۳ (۳) $\mathbb{R} - (-1, 2)$ ☐ ۴ (۴) $\mathbb{R} - [-1, 2]$

 ۲۲۵ به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & ; x < 1 \\ (m+1)x - 3m + 3 & ; x \geq 1 \end{cases}$ روی تمام دامنه‌اش اکیداً صعودی است؟

(شبه‌ساز نوبت اول ۱۴۰۴)

- ☐ ۱ (۱) $(-\infty, 3/5)$ ☐ ۲ (۲) $(-1, 3/5]$ ☐ ۳ (۳) $(-\infty, 1/5]$ ☐ ۴ (۴) $(-1, 1/5]$

 ۲۲۶ تابع $f(x) = \begin{cases} |x+2|+1 & ; x < -2 \\ 5m - mx & ; x > -2 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ نزولی است. اگر بازه $[a, b]$ ، حدود مقادیر m باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟ (تجربی نوبت اول ۱۴۰۴)

- ☐ ۱ (۱) $\frac{1}{3}$ ☐ ۲ (۲) $\frac{1}{4}$ ☐ ۳ (۳) $\frac{1}{6}$ ☐ ۴ (۴) $\frac{1}{7}$

 ۲۲۷ اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & ; x \leq 2 \\ 2x - 4 & ; x > 2 \end{cases}$ تابعی اکیداً صعودی باشد، مقدار $f(2a)$ به ازای حداقل مقدار a کدام است؟

- ☐ ۱ (۱) 12 ☐ ۲ (۲) 14 ☐ ۳ (۳) 16 ☐ ۴ (۴) 18

 ۲۲۸ اگر $g(x) = (a-2)x^2 + x^b + c$ تابعی همانی باشد، وضعیت صعودی و نزولی بودن تابع $f(x) = 4ax^2 - 12bx^2 + 6x + c$ چگونه است؟

- ☐ ۱ (۱) اکیداً صعودی ☐ ۲ (۲) اکیداً نزولی ☐ ۳ (۳) ابتدا اکیداً صعودی و سپس اکیداً نزولی ☐ ۴ (۴) ابتدا اکیداً نزولی و سپس اکیداً صعودی

 ۲۲۹ نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ، فقط در نقطه $(-3, -1)$ بر خط به موازات محور x مماس است. اگر تابع $y = |f(x)|$ در بازه $(k, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد، کمترین مقدار k کدام است؟

- ☐ ۱ (۱) -4 ☐ ۲ (۲) -3 ☐ ۳ (۳) -1 ☐ ۴ (۴) -2

 ۲۳۰ تابع درجه سوم و اکیداً نزولی f را در نظر بگیرید. اگر نمودار آن از مبدأ مختصات بگذرد و یک خط افقی در نقطه $(2, -1)$ بر آن مماس باشد،

 آنگاه نمودار تابع f و خط $y = 1$ در نقطه با کدام طول متقاطع‌اند؟

- ☐ ۱ (۱) $-2 + 2\sqrt{2}$ ☐ ۲ (۲) $2 + 2\sqrt{2}$ ☐ ۳ (۳) $-2 - 2\sqrt{2}$ ☐ ۴ (۴) $2 - 2\sqrt{2}$

طرح چند تا سؤال زیر هم در مورد یکنوایی تابع‌های مثلثاتی.

 ۲۳۱ تابع $f(x) = \sin(2x)$ در کدام بازه زیر یکنواست؟

- ☐ ۱ (۱) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ☐ ۲ (۲) $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ ☐ ۳ (۳) $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ ☐ ۴ (۴) $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

۲۳۲ تابع با ضابطه $f(x) = 1 + 2 \cos(2\pi x - \pi)$ در کدام بازه زیر اکیداً صعودی است؟

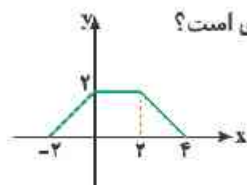
- (۱) $[0.5, 1]$ (۲) $[1, 1.5]$ (۳) $[0, 1]$ (۴) $[1, 2]$

۲۳۳ تابع با ضابطه $f(x) = 2 \cos^2(x + \frac{\pi}{6})$ در کدام بازه زیر اکیداً صعودی است؟

- (۱) $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$ (۲) $(0, \frac{\pi}{3})$ (۳) $(-\frac{2\pi}{3}, 0)$ (۴) $(-\pi, 0)$

سریع حالا می‌خواهیم اثر تبدیل نمودارها، روی صعودی و نزولی بودن تابع رو بررسی کنیم. همچنین یکنوایی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو تابع رو نیز بررسی می‌کنیم.

۲۳۴ نمودار تابع $y = f(x-1)$ به صورت مقابل است، نمودار تابع $y = 1 + 2f(\frac{x}{3} + 2)$ در کدام بازه اکیداً صعودی است؟



- (۱) $[0, 9]$ (۲) $[-15, -9]$

- (۳) $[-6, 0]$ (۴) $[-3, 0]$

۲۳۵ تابع اکیداً نزولی $y = f(x)$ با دامنه $[-2, 5]$ را در نظر بگیرید. تابع $y = 1 - 3f(2-x)$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟

- (۱) $[-0, 7]$ (۲) $[-7, 0]$ (۳) $[-4, 3]$ (۴) $[-3, 4]$

۲۳۶ دو تابع f و g روی $\mathbb{R}$ پیوسته هستند. اگر f تابعی اکیداً صعودی و g تابعی اکیداً نزولی باشد، کدام تابع زیر قطعاً اکیداً صعودی است؟

- (۱) $f(x+1) + g(x-1)$ (۲) $f(x) - g(-x)$ (۳) $2f(x) - g(x+3)$ (۴) $f(x) \times g(-x)$

۲۳۷ تابع $f(x) = \sqrt{x-2} + x^2 - 4x$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

- (۱) همواره صعودی (۲) همواره نزولی
(۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

۲۳۸ $f(x) = \sqrt{4-x} - \sqrt{x} + 4$ به صورت کدام بازه است؟

- (۱) $[0, 4]$ (۲) $[2, 6]$ (۳) $[2, 4]$ (۴) $[0, 6]$

سریع توی سؤالای زیر بهتره به تابع فرضی f با توجه به شرایط مسئله و وضعیت یکنوایی گفته شده، رسم کنید.

۲۳۹ تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است. اگر $f(3) = 0$ باشد، دامنه $g(x) = \sqrt{x^2 f(x)}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۱)

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۴۰ تابع پیوسته $y = f(x)$ روی مجموعه اعداد حقیقی اکیداً صعودی و $f(3) = 0$ است. دامنه تابع $y = \sqrt{f(x)f(-3x)}$ کدام است؟

- (۱) $[3, \infty)$ (۲) $[1, 3]$ (۳) $[3, 1]$ (۴) $[1, 3]$

۲۴۱ تابع اکیداً صعودی f با دامنه $(-\infty, 4]$ را در نظر بگیرید. اگر $f(2) = 0$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{(x-1)f(|x|)}$ کدام است؟

- (۱) $[2, 4]$ (۲) $[-2, 1]$ (۳) $[-2, 1] \cup [2, 4]$ (۴) $\mathbb{R}$

۲۴۲ نمودار تابع پیوسته و اکیداً صعودی $y = f(x)$ با دامنه $\mathbb{R}$ از دو نقطه $A(-2, 1)$ و $B(2, 4)$ می‌گذرد. مجموعه جواب نامعادله

$$\frac{f^2(x) - 5f(x) + 4}{x} \geq 0$$

کدام است؟

- (۱) $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ (۳) $[2, 0) \cup [2, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

یادداشت:

فصل آخر.

حسابان جامع پاسخ‌های تشریحی

iq

Descriptive
Answers



Paul Dirac

فصل اول: تابع

۳ ۱

نمودار موجود در گزینه «۳»، خود نمایانگر یک تابع است.

هایلایت

تابع و تشخیص آن

اگر یک رابطه به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌های (x, y) باشد، هنگامی این رابطه یک تابع محسوب می‌شود که هیچ دو زوج مرتب متمایزی، دارای مؤلفه اول یکسان نباشند؛ یعنی اگر دو زوج مرتب دارای مؤلفه اول یکسان باشند، آنگاه مؤلفه دوم آن‌ها نیز باید یکسان باشد.

۲ ۲

برای این که رابطه داده شده نمایانگر یک تابع باشد، باید در زوج مرتب‌های $(5, 4a - b)$ و $(5, a - 2b)$ مؤلفه‌های دوم با هم برابر باشند. همچنین در زوج مرتب‌های $(4, -2)$ و $(4, a + b)$ باید مؤلفه‌های دوم با هم برابر باشند.

$$\begin{cases} 4a - b = a - 2b \\ a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$

 بنابراین حاصل $a - b = 1 - (-3) = 4$ است.

۴ ۳

برای این که رابطه‌ای تابع نباشد، باید حالتی ایجاد کنیم که ورودی یکسان اما خروجی متفاوت باشد. یعنی:

$$k = 0 \rightarrow f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 5), (4, 9), (1, 4)\}$$

$$k = 1 \rightarrow f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 5), (4, 9), (2, 9)\}$$

$$k = 2 \rightarrow f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 5), (4, 9), (3, 16)\}$$

$$k = 3 \rightarrow f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 5), (4, 9), (4, 25)\}$$

پس مقادیر قابل قبول k برای این که f تابع نباشد، برابر است با:

$$k = \{1, 2, 3\} \Rightarrow k = 6 = \text{مجموع مقادیر } k$$

۱ ۴

برای این که رابطه داده شده نمایانگر یک تابع باشد، باید در زوج مرتب‌های $(7, -2n)$ و $(7, 1 - 3n^2)$ مؤلفه‌های دوم با هم برابر باشند:

$$1 - 3n^2 = -2n \Rightarrow 3n^2 - 2n - 1 = 0 \Rightarrow (n - 1)(3n + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

اکنون با جای گذاری $n = 1$ و $n = -\frac{1}{3}$ ، رابطه f را بازنویسی می‌کنیم:

$$n = 1: f = \{(7, -2), (1, -1), (2, 1), (1, 2)\} \quad \times$$

$$n = -\frac{1}{3}: f = \{(7, \frac{2}{3}), (1, -1), (2, -\frac{1}{3}), (3, 2)\} \quad \checkmark$$

بنابراین تنها به ازای $n = -\frac{1}{3}$ رابطه f نمایانگر یک تابع است و حاصل $f(2)$ برابر $-\frac{1}{3}$ است.

۳ ۵

به بررسی نمودارها می‌پردازیم:

الف) و ب) از عضو a در نمودار (الف) و از عضو b در نمودار (ب) پیکانی خارج نشده؛ پس تابع نیستند.

ب) از عضو b ، ۲ پیکان خارج شده است؛ پس تابع نیست.

پ) از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک پیکان خارج شده است؛ پس تابع است.

۱ ۶

برای این که نمودار پیکانی داده شده، نمایانگر یک تابع باشد، باید

$$6 - 3m = 3m - 2 \quad \text{و} \quad m^2 - 5m + 6 = 12 - m^2 \quad \text{باشد؛}$$

$$\begin{cases} m^2 - 5m + 6 = 12 - m^2 \\ 6 - 3m = 3m - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2 - 5m + 6 = 12 - m^2 \\ 3m - 6 = 12 - m^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m = 3 \end{cases}$$

از اشتراک مقادیر به دست آمده، تنها مقدار $m = 3$ قابل قبول است.

۴ ۷

به بررسی موارد داده شده می‌پردازیم:

الف) چون هر عدد مثبت، دارای ۲ ریشه چهارم است، پس این رابطه تابع نیست.

ب) این رابطه بیانگر یک تابع نیست، زیرا برای هر عددی، دو عدد با اختلاف ۳ واحد می‌توان نسبت داد.

پ) می‌دانیم هر عدد فرد اول، دارای ۲ مقسوم‌علیه است. پس این رابطه تابع نیست.

۳ ۸

می‌دانیم یک رابطه، زمانی یک تابع است که به ازای یک ورودی x ، تنها یک خروجی y حاصل شود. در گزینه «۳» برای $x = 0$ بی‌شمار خروجی y داریم.

$$[x] + [y] = 0 \xrightarrow{x=y} [0] + [y] = 0 \rightarrow [y] = 0 \rightarrow 0 \leq y < 1$$

پس این رابطه تابع نیست. باقی روابط موجود در گزینه‌ها، نمایانگر یک تابع هستند.

۳ ۹

تابع از A به B ، شامل زوج مرتب‌هایی است که مؤلفه‌های اول آن‌ها، اعضای مجموعه A و مؤلفه‌های دوم آن‌ها، اعضای مجموعه B هستند. می‌توان این تابع را به صورت زیر نمایش داد:

$$\{(a, \text{●}), (b, \text{■}), (c, \text{▲})\}$$

چون طبق سوال، این تابع باید حتماً شامل زوج مرتب $(c, 4)$ باشد، داریم:

$$\{(a, \text{●}), (b, \text{■}), (c, 4)\}$$

با توجه به تابع بالا، به جای مؤلفه دوم‌های ■ و ● ، هر ۴ عضو مجموعه B می‌توانند قرار بگیرند. پس در کل $4 \times 4 = 16$ تابع مختلف با این شرایط می‌توان نوشت.

۱۴ ۱

ابتدا باید اعضای مجموعه f را پیدا کنیم. x و y هر دو عددی صحیح هستند. برای آن که x عددی صحیح باشد، باید معجز عبارت $x = \frac{3}{1+|y|}$ یعنی $1+|y|$ برابر یکی از مقسوم علیه های 3 باشد، پس:

$$1+|y|=3 \Rightarrow x=1, y=\pm 2 \Rightarrow (1, 2), (1, -2) \in f$$

$$1+|y|=1 \Rightarrow x=2, y=\pm 1 \Rightarrow (2, 1), (2, -1) \in f$$

$$1+|y|=1 \Rightarrow x=3, y=\pm 0 \Rightarrow (3, 0), (3, -0) \in f$$

$$1+|y|=6 \Rightarrow x=5, y=\pm 5 \Rightarrow (5, 5), (5, -5) \in f$$

$$1+|y|=5 \Rightarrow x=6, y=\pm 4 \Rightarrow (6, 4), (6, -4) \in f$$

$$1+|y|=3 \Rightarrow x=10, y=\pm 2 \Rightarrow (10, 2), (10, -2) \in f$$

$$1+|y|=2 \Rightarrow x=15, y=\pm 1 \Rightarrow (15, 1), (15, -1) \in f$$

$$1+|y|=1 \Rightarrow x=30, y=0 \Rightarrow (30, 0) \in f$$

پس مجموعه f به شکل زیر خواهد بود:

$$f = \{(1, 2), (1, -2), (2, 1), (2, -1), (3, 0), (3, -0), (5, 5), (5, -5), (6, 4), (6, -4), (10, 2), (10, -2), (15, 1), (15, -1), (30, 0)\}$$

حالا برای آن که مجموعه f یک تابع باشد، باید از بین هر دو عضوی که دامنه یکسان دارند، حداقل یکی را حذف کنیم. پس حداقل باید y عضو را حذف کنیم.

۱۵ ۴

برای پیدا کردن $f(5)$ باید در ضابطه داده شده $x=2$ قرار دهیم:

$$f(x+3) = 3x+14 \xrightarrow{x=2} f(5) = 20$$

هابلت

مقدار تابع

می توانیم تابع را مانند ماشینی در نظر بگیریم که یک ورودی را دریافت می کند و به ازای آن یک خروجی تحویل می دهد. **هر چند ممکن است چند ورودی دارای خروجی های یکسان باشند.**

x (متغیر مستقل)
ورودی



منظور از $f(a)$ ، مقدار تابع f در نقطه $x=a$ است. بنابراین برای محاسبه مقدار تابع در $x=a$ ، باید در ضابطه تابع x را برداریم و به جای آن a قرار دهیم.

اگر نمودار تابع f موجود باشد، $f(a)$ نشان دهندۀ عرض نقطه ای روی نمودار تابع f با طول $x=a$ است.

۱۶ ۲

در ضابطه داده شده، به جای x ، صفر قرار می دهیم:

$$2f(x+4) = f(4) + x^2 + 5(x+1) + 2 \xrightarrow{x=0} 2f(4) = f(4) + 7 \Rightarrow f(4) = 7$$

۱۷ ۲

چون با توجه به صورت سؤال، رابطه داده شده یک تابع می باشد و $x=1$ عضو دامنه هر دو ضابطه می باشد، باید مقدار هر دو ضابطه به ازای $x=1$ با هم برابر باشد:

$$f(1) = 1 \Rightarrow m+n=1$$

$$f(1) = 1 \Rightarrow \frac{3}{2m-n-1} = 1 \Rightarrow 2m-n-1=3$$

از حل دو معادله بالا، داریم:

$$\begin{cases} m+n=1 \\ 2m-n=4 \end{cases} \Rightarrow 3m=5 \Rightarrow m=\frac{5}{3}$$

۱۸ ۲

به ازای $x=1$ ، مقدار تابع از ضابطه بالا و ضابطه پایین باید برابر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+3}+2a & ; |x| \leq 1 \\ ax^2+5 & ; |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x=1} \sqrt{4}+2a=a+5 \Rightarrow a=3$$

حالا برای پیدا کردن $f(3)$ سراغ ضابطه پایینی می رویم:

$$f(3) = 3 \times 3^2 + 5 = 32$$

۱۹ ۱

برای این که رابطه داده شده نمایانگر یک تابع باشد، باید مقدار ضابطه های $ax+b$ و bx^2+a در نقطه $x=2$ با هم برابر باشند. همچنین مقدار ضابطه های bx^2+a و $(a-b)x+8$ نیز باید در $x=3$ با هم برابر باشند:

$$\begin{cases} a(2)+b=b(2)^2+a \\ b(2)^2+a=(a-b)(3)+8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=4b+a \\ 4b+a=3a-3b+8 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=4 \end{cases}$$

بنابراین حاصل $a+b$ برابر است با:

$$a+b=4+\frac{4}{3}=\frac{12+4}{3}=\frac{16}{3}$$

۲۰ ۱

چون رابطه داده شده یک تابع است، پس باید مؤلفه دوم زوج مرتب های $(3, m)$ و $(3, m^2)$ و همچنین $(2, a+b)$ و $(2, 5)$ برابر باشند.

$$\begin{cases} m^2=m+2 \Rightarrow m^2-m-2=0 \Rightarrow m=1, m=2 \\ 5=a+b \end{cases}$$

اگر $m=2$ باشد، شرط تابع بودن رابطه برقرار نمی باشد پس $m=1$ قابل قبول است.

از طرفی a, b, m سه جمله متوالی دنباله حسابی هستند پس شرط تشکیل دنباله حسابی را می نویسیم:

$$a = m+b \Rightarrow \text{جمله سوم} = \text{جمله اول} + \text{جمله وسط}$$

$$\rightarrow 2a = m+b \xrightarrow{m=1} 2a-b=-1$$

با حل دستگاه بین دو معادله شامل a و b مقادیر آن ها نیز معین می گردد.

$$\begin{cases} a+b=5 \\ 2a-b=-1 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{4}{3}, b=\frac{11}{3}$$

پس $a-b+m$ برابر $\frac{-1}{3}$ می باشد.

۱۷ ۱

برای پیدا کردن $g(4)$ در تابع $g(3x+1)$ به جای x ، ۱ قرار می‌دهیم. پس باید سراغ ضابطه پایینی برویم:

$$x < 2: g(3x+1) = x^2 \xrightarrow{x=1} g(4) = 1^2 = 1$$

حالا برای پیدا کردن $g(10)$ در تابع $g(3x+1)$ به جای x ، ۳ قرار می‌دهیم. پس باید سراغ ضابطه بالایی برویم:

$$x \geq 2: g(3x+1) = x - 2 \xrightarrow{x=3} g(10) = 1$$

بنابراین $g(4) + g(10) = 2$ است.

۱۸ ۱

با اضافه و کم کردن عدد ۱ به تابع f ، آن را به صورت مکعب کامل می‌نویسیم:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 - 3\sqrt{3} \Rightarrow f(x) = (x-1)^3 + 1 - 3\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow f(\sqrt{3}+1) &= (\sqrt{3}+1-1)^3 + 1 - 3\sqrt{3} = (\sqrt{3})^3 + 1 - 3\sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{3} + 1 - 3\sqrt{3} = 1 \end{aligned}$$

۱۹ ۴

با جای گذاری $x=2$ و $x=\frac{1}{x}$ در تساوی $f(x) + 3f(\frac{1}{x}) = 1 - x^2$ داریم:

$$x=2: f(2) + 3f(\frac{1}{2}) = -3$$

$$x=\frac{1}{2}: f(\frac{1}{2}) + 3f(2) = \frac{3}{4}$$

ضابطه پایینی را در -3 ضرب می‌کنیم و دستگاه دو معادله دو مجهولی را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(2) + 3f(\frac{1}{2}) = -3 \\ -9f(2) - 3f(\frac{1}{2}) = -\frac{9}{4} \end{cases} \rightarrow -8f(2) = -\frac{21}{4} \rightarrow f(2) = \frac{21}{32}$$

۲۰ ۳

در ضابطه $(x+2)f(x) - 3xf(x+2) = 4x^2 - mx + 3m - 1$ یک بار $x=0$ و یک بار $x=-2$ قرار می‌دهیم:

$$x=0: 2f(0) - 0 = 3m - 1 \Rightarrow f(0) = \frac{3m-1}{2}$$

$$x=-2: -6f(0) - 16 = 2m + 3m - 1 \Rightarrow f(0) = \frac{15+\Delta m}{6}$$

حالا این دو مقدار را با هم برابر قرار می‌دهیم تا m به دست آید:

$$\frac{3m-1}{2} = \frac{15+\Delta m}{6} \rightarrow 9m-3 = 15+\Delta m \rightarrow 4m = 18$$

$$\Rightarrow m = \frac{9}{2}$$

$$\text{بنابراین } f(0) = \frac{3m-1}{2} = \frac{\frac{27}{2}-1}{2} = \frac{25}{4}$$

دامتستی ممکنه عجله کنی و بزنی گزینه ۴، ولی سوال مقدار m رو خواسته!

۲۱ ۲

با توجه به ضابطه پایینی تابع، مقدار $f(-1)$ را پیدا می‌کنیم:

$$x < 1: f(x) = x + 1 \rightarrow f(-1) = 0$$

پس $f(1) = f(1 + f(-1)) = f(1)$ است. با توجه به ضابطه بالایی تابع داریم:

$$x > 1: f(x) = 4 - f(x) \xrightarrow{x=1} f(1) = 4 - f(1)$$

$$\Rightarrow 2f(1) = 4 \Rightarrow f(1) = 2$$

۲۲ ۳

چون $|a| > 1$ است، برای به دست آوردن $f(2+|a|)$ از ضابطه بالایی و چون $|a| < 1$ است، برای به دست آوردن $f(1-|a|)$ از ضابطه پایینی استفاده می‌کنیم:

$$f(1-|a|) = f(2+|a|)$$

$$\Rightarrow 2(1-|a|) - 1 = (2+|a|)^2 - (2+|a|) - 2$$

$$\rightarrow -2|a| + 1 = |a|^2 + 3|a| - 5 \rightarrow |a|^2 + 5|a| - 6 = 0$$

$$\rightarrow (|a|+6)(|a|-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} |a| = -6 & \times \\ |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \end{cases}$$

۲۳ ۴

برای پیدا کردن طول نقاط برخورد با محور x ها، باید مشخص کنیم در چه نقاطی، $f(x) = 0$ است:

$$x < 0: f(x) = 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{x < 0} x = -2$$

$$0 \leq x < 3: f(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x \geq 3: f(x) = x^2 - x - 12 = 0 \rightarrow (x-4)(x+3) = 0$$

$$\xrightarrow{x \geq 3} x = 4$$

پس مجموع طول نقاط برخورد برابر $4 = -2 + 2 + 4$ است.

۲۴ ۳

با توجه به نمودار تابع f در صورت سؤال $f(-1) = 2$ و $f(2) = k$ است. پس با توجه به ضابطه تابع g داریم:

$$g(x) = \begin{cases} 1+f(x) & ; x > 0 \\ f^2(x) & ; x \leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} g(2) = 1+f(2) = 1+k \\ g(-1) = f^2(-1) = 9 \end{cases}$$

حالا با توجه به رابطه $g(-1) + g(2) = 14$ داریم:

$$9 + 1 + k = 14 \rightarrow k = 4$$

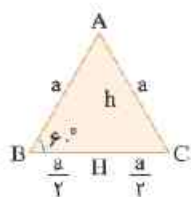
۲۵ ۴

با جای گذاری $x=1$ در دترمینان داده شده و با توجه به نمودار داریم:

$$g(1) = \frac{f(-1) - f(0)}{f(0) - f(3)} = \frac{2 - 0}{0 - 9} = -\frac{2}{9} = -\frac{4}{9}$$

۲۶ ۳

ابتدا در مثلث قائم الزاویه AHC با کمک $\sin 60^\circ$ داریم:



$$\sin 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow a = \frac{2h}{\sqrt{3}}$$

در ضمن می‌دانیم مساحت یک مثلث

$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \text{ برابر } a \text{ ضلع به ضلع } a \text{ متساوی الاضلاع}$$

است، پس:

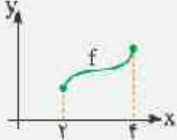
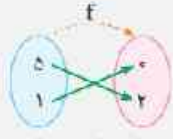
$$S = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{2h}{\sqrt{3}}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4h^2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3} h^2$$

مجموعات

دامنه تابع

به مجموعه ورودی‌های تابع f ، دامنه تابع f می‌گویند و آن را با D_f نشان می‌دهند.

مشخص کردن دامنه تابع

 $D_f = [2, 4]$	نمودار در دستگاه مختصات، تصویر نمودار روی محور x‌ها
 $D_f = \{1, 5\}$	نمودار ون (پیکانی)، مجموعه‌ای که از اعضای آن، پیکان خارج شده
$f = \{(1, 2), (5, 4)\} \Rightarrow D_f = \{1, 5\}$	زوج مرتبی؛ مجموعه همه مؤلفه‌های اول

دامنه توابع معکوس

برای تعیین دامنه تابع f با داشتن ضابطه آن، به موارد زیر توجه کنید:

۱ دامنه تابع چندجمله‌ای $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a$ برابر $\mathbb{R}$ است.

$$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - x - 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

۲ چون عبارت‌های کسری به ازای ریشه مخرج، تعریف نشده هستند؛ پس دامنه آن‌ها برابر است با:

$$D = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

۳ در رادیکال‌های یا فرجه زوج، باید عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.

$$y = \sqrt{4-x} \rightarrow 4-x \geq 0 \rightarrow x \leq 4 \rightarrow D_f = (-\infty, 4]$$

۴ چون $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ است، پس باید شرط $\cos x \neq 0$ برقرار باشد، بنابراین:

$$D = \mathbb{R} - \{x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})\}$$

$$y = x + \tan x \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$$

۵ چون $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ است، پس باید شرط $\sin x \neq 0$ برقرار

$$D = \mathbb{R} - \{x = k\pi\} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$y = 5 - 2 \cot x \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x = k\pi\}$$

۱ ۲۷

اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y فرض کنیم، داریم:

$$x = y + 3 \Rightarrow y = x - 3$$

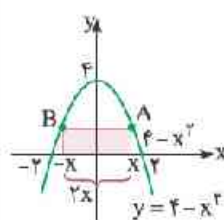
$$P = 2(x + y) = 2(x + x - 3) = 4x - 6 \Rightarrow x = \frac{P+6}{4}$$

در ضمن مساحت مستطیل برابر $S = xy$ است، پس:

$$S = xy = x(x - 3) \Rightarrow S(P) = \left(\frac{P+6}{4}\right)\left(\frac{P+6}{4} - 3\right)$$

$$\Rightarrow S(P) = \left(\frac{P+6}{4}\right)\left(\frac{P-6}{4}\right) = \frac{P^2 - 36}{16}$$

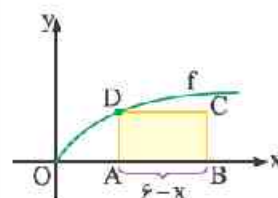
۲ ۲۸



با توجه به شکل، نقاط $A(x, 4 - x^2)$ و $B(-x, 4 - x^2)$ دو رأس مستطیل هستند. پس یک ضلع مستطیل برابر $2x$ و یک ضلع دیگر $4 - x^2$ است. بنابراین مساحت مستطیل برابر است با:

$$f(x) = 2x(4 - x^2) = 8x - 2x^3$$

۳ ۲۹



با توجه به این که طول نقطه A برابر x و طول نقطه B برابر $\sqrt{x}$ است. پس $AB = 6 - x$ است. در ضمن نقطه D به طول x روی تابع $f(x) = \sqrt{x}$ قرار دارد. پس $AD = \sqrt{x}$ است.

بنابراین مساحت مستطیل برابر است با:

$$S(x) = AD \times AB = \sqrt{x}(6 - x) = 6\sqrt{x} - x\sqrt{x}$$

۱ ۳۰

اگر شعاع نیم‌دایره‌ها را x و طول مستطیل را L در نظر بگیریم آن جایی که محیط استادیوم برابر 80π است، پس:

$$2L + 2\pi x = 80\pi$$

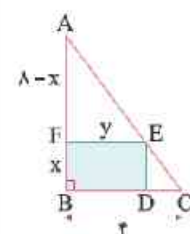
$$\rightarrow L = 40\pi - \pi x$$

حالا مساحت استادیوم را بر حسب x به دست می‌آوریم:

$$S = L(2x) + \pi x^2 = (40\pi - \pi x)(2x) + \pi x^2 = \pi x(80 - x)$$

۲ ۳۱

با توجه به قضیه تالس داریم:



$$\frac{AF}{AB} = \frac{FE}{BC} \Rightarrow \frac{8-x}{8} = \frac{y}{4}$$

$$\rightarrow y = \frac{x}{2} + 4$$

از طرفی مساحت مستطیل $BDEF$

$$S = xy = x\left(\frac{x}{2} + 4\right) = \frac{x^2}{2} + 4x$$

۴ ۳۲

چون دامنه تابع f برابر $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$ است، پس $x = -1$ و $x = 2$ ریشه‌های مخرج کسر هستند:

$$\begin{cases} x = -1 : 1 - m + n = 0 \Rightarrow m - n = 1 \\ x = 2 : 4 + 2m + n = 0 \Rightarrow 2m + n = -4 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = -2 \end{cases} \rightarrow m + n = -3$$

حالت ۲ اگر مخرج کسر عبارتی درجه دوم باشد، آن گاه باید مربع کامل باشد، یعنی دلتای مخرج کسر باید صفر باشد:

$$(a-2)x^2 + (a+1)x + 4 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} \Delta = (a+1)^2 - 4(a-2)(4) = 0$$

$$\rightarrow a^2 - 14a + 33 = 0 \rightarrow (a-3)(a-11) = 0 \rightarrow \begin{cases} a=11 \\ a=3 \end{cases}$$

حالا دامنه تابع را به ازای $a=11$ و $a=3$ تعیین می‌کنیم:

$$a=3: f(x) = \frac{x^2+3}{(x+2)^2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$a=11: f(x) = \frac{x^2+3}{(3x+2)^2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-\frac{2}{3}\}$$

بنابراین مجموعه مفادیر m به صورت $\{2, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\}$ است که حاصل جمع آن‌ها برابر با -4 است.

۳۷ ۲

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال، باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد. در ضمن به مخرج کسر نیز توجه کنید:

$$\frac{6+x-x^2}{x^2-2x+1} \geq 0 \rightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{(x-1)^2} \geq 0$$

x	-2	1	3
$P(x)$	$-$	$+$	$-$

دامنه این تابع به صورت بازه $(1, 3] \cup [-2, 1)$ است که شامل اعداد صحیح $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ است. مجموع این اعداد صحیح برابر با 2 است.

۳۸ ۱

باید عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد و مخرج کسرها نیز صفر نباشد:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{-2}{x(x+2)} \geq 0$$

$$\Rightarrow x(x+2) < 0 \Rightarrow -2 < x < 0$$

پس دامنه این تابع فقط شامل عدد صحیح -1 است.

۳۹ ۲

عبارت زیر هر یک از رادیکال‌های فرجه زوج را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$1) x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow D_f = [2, 8]$$

$$2) 16-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 8$$

پس $a=2$ و $b=8$ است. حالا مجموعه جواب نامعادله $|x-8| < 2$ را پیدا می‌کنیم:

$$-2 < x-8 < 2 \Rightarrow 6 < x < 10 \xrightarrow{\text{اعداد طبیعی}} x = 7, 8, 9$$

دامتستی ممکنه عبارت زیر رادیکال با فرجه ۳ رو هم نامنفی در نظر بگیریم و به گزینه ۴ برسیم.

۴۰ ۲

عبارت زیر هر یک از رادیکال‌های فرجه زوج (رادیکال‌های صورت کسر) باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$1) x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

$$2) 6-x \geq 0 \Rightarrow 6 \geq x$$

۶ در توابع لگاریتمی، باید عبارت جلوی لگاریتم مثبت و مبنای لگاریتم مثبت و مخالف یک باشد.

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{1}{2} \neq 1 \end{cases}$$

$$y = \log_{(2-x)}(x-1) \rightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ 2-x > 0 \Rightarrow x < 2 \rightarrow D_f = (1, 2) \cup (2, 3) \\ 2-x \neq 1 \Rightarrow x \neq 1 \end{cases}$$

هنگام یافتن دامنه، نباید ضابطه تابع را ساده کنید.

در توابع چندضابطه‌ای، دامنه تابع از اجتماع دامنه همه ضابطه‌ها به دست می‌آید.

۳۳ ۲

ریشه‌های مخرج کسر را پیدا می‌کنیم:

$$||x| - 1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} |x| - 1 = 2 \Rightarrow |x| = 3 \\ |x| - 1 = -2 \Rightarrow |x| = -1 \end{cases} \rightarrow x = \pm 3$$

پس دامنه تابع f به صورت $D_f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$ است، یعنی دو عدد صحیح -3 و 3 در دامنه تابع حضور ندارند.

۳۴ ۲

$x=1$ و $x=b$ ریشه‌های مخرج کسر هستند، پس مخرج کسر را به صورت $(x-1)(x-b)$ در نظر می‌گیریم:

$$(x-1)(x-b) = x^2 - (1+b)x + b$$

حالا این عبارت را با $x^2 - ax - 2$ مقایسه می‌کنیم. نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} b = 2 \\ 1+b = a \Rightarrow a = -2+1 = -1 \end{cases} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{2}{-1} = -2$$

۳۵ ۱

برای آن که دامنه تابع f برابر $\mathbb{R}$ باشد، باید مخرج تابع فاقد ریشه حقیقی باشد، پس باید ضریب x مخرج برابر صفر باشد، بنابراین:

$$a^2 - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -3 \end{cases}$$

حالا چون به ازای $a=3$ مخرج تابع برابر صفر می‌شود، پس $a=-3$ قابل قبول است و داریم:

$$f(x) = \frac{-3x+4}{-12} \Rightarrow f(4) = \frac{-12+4}{-12} = \frac{2}{3}$$

۳۶ ۴

چون دامنه تابع به صورت $\mathbb{R} - \{m\}$ است، پس مخرج کسر فقط یک ریشه دارد. حالا باید دو حالت در نظر بگیریم:

حالت ۱ اگر مخرج کسر عبارتی درجه اول باشد، آن گاه ضریب x^2 باید صفر باشد، پس:

$$a-2=0 \Rightarrow a=2: f(x) = \frac{x^2+3}{3x+4} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-\frac{4}{3}\}$$

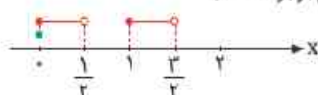
۳ ۴۵

به دلیل وجود $\sqrt{x}$ در صورت کسر، باید $x \geq 0$ باشد. حالا ریشه‌های مخرج کسر را به دست می‌آوریم و آن‌ها را کنار می‌گذاریم:

$$[2x-1]^2 - 1 = 0 \Rightarrow [2x-1]^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} [2x-1] = -1 \\ [2x-1] = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 \leq 2x-1 < 0 \Rightarrow 0 \leq 2x < 1 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 < 2x-1 < 2 \Rightarrow 2 < 2x < 3 \Rightarrow 1 < x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

بنابراین دامنه تابع برابر است با:



$$\Rightarrow D_f = \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

۳ ۴۶

عبارت زیررادیكال يك سه‌جمله‌ای است که باید همواره نامنفی باشد، یعنی دلتای عبارت $x^2 - (m+1)x + 2 - m$ کوچکتر یا مساوی صفر است:

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow (m+1)^2 - 4(1)(2-m) \leq 0$$

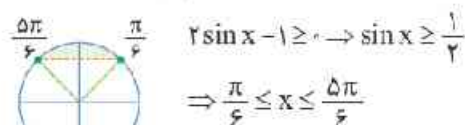
$$\Rightarrow m^2 + 6m - 7 \leq 0 \Rightarrow (m-1)(m+7) \leq 0 \Rightarrow -7 \leq m \leq 1$$

پس به ازای ۹ مقدار صحیح m دامنه تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

اگر حالت $\Delta = 0$ رو حساب نکنی به گزینه ۱ می‌رسی.

۲ ۴۷

چون $2 \sin x - 1 \geq 0$ زیررادیكال با فرجه ۲ قرار دارد، پس:



$$\Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$$

بنابراین $D_f = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ است.

۳ ۴۸

حاصل $[x]$ همواره عددی صحیح است. بنابراین عبارت زیررادیكال

یعنی $\sin(\pi[x]), \sin 0, \sin \pi, \sin 2\pi, \dots$ به صورت

است که همواره برابر صفر است. بنابراین به ازای همه اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ ، عبارت زیررادیكال برابر صفر می‌شود و $f(x) = 0$ است.

۳ ۴۹

چون $f(x) = 2^x$ است؛ پس $f\left(\frac{1}{x}\right) = 2^{\frac{1}{x}}$ بوده و برای تعیین دامنه تابع

$$y = \sqrt{f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0 \Rightarrow 2^x \geq 2^{\frac{1}{x}} \Rightarrow x \geq \frac{1}{x} \Rightarrow x - \frac{1}{x} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x} \geq 0 \Rightarrow D_f = [-1, 0) \cup [1, +\infty)$$

پس گزینه‌های «۲» و «۴» حذف می‌شوند. در ضمن $x = -2$ در تابع صدق نمی‌کند؛ پس گزینه «۱» نیز حذف می‌شود.

در ضمن عبارت $\frac{x+1}{x-3}$ زیررادیكال فرجه ۳ قرار دارد که شرطی برای دامنه ایجاد نمی‌کند. حالا ریشه مخرج کسرها را پیدا می‌کنیم و از دامنه کنار می‌گذاریم:

$$1) \frac{x+1}{x-3} \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

$$2) x \neq 3$$

پس دامنه تابع به صورت $D_f = [-2, 6] - \{-1, 3\}$ است که مجموع عضوهای صحیح آن برابر است با:

$$(2) - 1 + 1 + 2 + 4 + 5 + 6 = 16$$

اگر از ریشه‌های مخرج تابع غافل بشی به گزینه ۱ می‌رسی.

۲ ۴۹

عبارت زیررادیكال با فرجه زوج باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد، پس:

$$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{4} \Rightarrow -\sqrt{4} \leq x \leq \sqrt{4}$$

$$\Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

حالا باید ریشه‌های مخرج تابع را به دست آورده و از دامنه کنار بگیریم:

$$|x+2| - 4 \neq 0 \Rightarrow |x+2| \neq 4 \Rightarrow \begin{cases} x+2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2 \\ x+2 \neq -4 \Rightarrow x \neq -6 \end{cases}$$

پس دامنه تابع برابر $D_f = [-2\sqrt{0}, 2\sqrt{0}] - \{2, -6\}$ است که شامل ۱۱ عدد صحیح می‌باشد.

۳ ۴۲

باید ریشه‌های مخرج کسر را پیدا کنیم:

$$[x] - f(x) = 0 \Rightarrow [x] = f(x)$$

حالا با توجه به محدوده x داریم:

$$x > 0, [x] = 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2$$

$$x = 0, [x] = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x < 0, [x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x < 0$$

پس دامنه تابع f به صورت بازه $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup [2, +\infty)$ است که شامل ۳ عدد صحیح $x = 1, 0, -1$ نیست.

۳ ۴۳

چون رادیكال در مخرج کسر قرار دارد، پس عبارت زیررادیكال باید مثبت باشد (اذا صفر نمی‌تواند باشد):

$$|x+2| - |x+5| > 0 \Rightarrow |x+2| > |x+5|$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 + 4x + 4 > x^2 + 10x + 25$$

$$6x < -21 \Rightarrow x < -\frac{21}{6} \Rightarrow x < -3\frac{1}{2}$$

دامنه تابع شامل سه عدد صحیح منفی $x = -3, -2, -1$ نیست.

۳ ۴۴

ابتدا تابع $f(-x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(-x) = \sqrt{-x+|x+2|} = \sqrt{-x+|x-2|}$$

برای تعیین دامنه تابع f ، باید عبارت زیررادیكال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$$-x + |x-2| \geq 0 \Rightarrow |x-2| \geq x$$

در ضمن می‌دانیم مجموعه جواب نامعادله $|U| \geq a$ از حل دو نامعادله $U \geq a$ و $U \leq -a$ به دست می‌آید:

$$|x-2| \geq x \Rightarrow \begin{cases} x-2 \geq x \Rightarrow -2 \geq 0 \text{ تناقض} \\ x-2 \leq -x \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

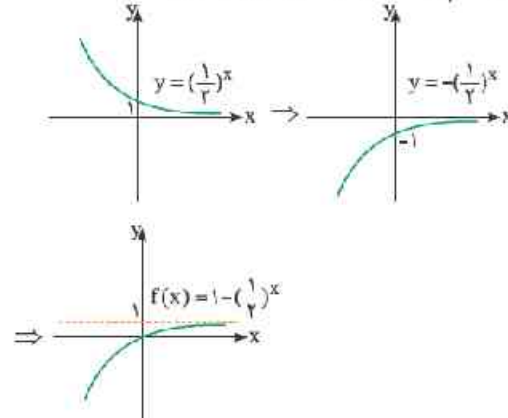
۳ ۵۵

عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$$4^x - 2^{x-1} > 0 \Rightarrow 2^{2x} > 2^{x-1} \Rightarrow 2x > x-1 \Rightarrow x > -1$$

در ضمن مخرج کسر نباید صفر باشد، به ازای $x > 0$ تابع $g(x)$ برابر ۱ است که باعث می شود مخرج کسر برابر صفر شود، پس آن را از دامنه تابع کنار می گذاریم، پس: $D_f = [-1, 0]$

۳ ۵۶

 ابتدا نمودار تابع $f(x) = 1 - (\frac{1}{2})^x$ را رسم می کنیم:


عبارت زیر رادیکال را به صورت $x \times f(x)$ در نظر می گیریم و آن را تعیین علامت می کنیم. حال با توجه به نمودار $f(x) = 1 - (\frac{1}{2})^x$ داریم:

x	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$
$x \times f(x)$	$+$	$+$

پس دامنه تابع برابر بازه $(-\infty, +\infty)$ است.

پروش سرخ چون $x = -2$ و $x = 2$ در تابع صدق می کنند؛ پس گزینه «۳» درست است.

۴ ۵۲

عبارت زیر رادیکال را به صورت

$$\frac{x}{x-2} \times f(x)$$

آن را تعیین علامت می کنیم، با توجه

به این که نمودار تابع $f(x) = 2^x - 2$ داریم:

$$g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2} \times f(x)} \Rightarrow \frac{x}{x-2} \times f(x) \geq 0$$

$\frac{x}{x-2}$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{x}{x-2} \times f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

پس دامنه تابع به صورت بازه $(2, +\infty) \cup [0, 1]$ می باشد که شامل بی شمار عدد طبیعی می باشد.

۲ ۵۳

عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد:

$$3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$$

عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$$2x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{2}$$

حالا ریشه مخرج کسر را پیدا می کنیم و از دامنه کنار می گذاریم:

$$1 - \log_2(3 - x) = 0 \Rightarrow \log_2(3 - x) = 1 \Rightarrow 3 - x = 2 \Rightarrow x = 1$$

پس دامنه تابع به صورت $(-\frac{5}{2}, 1) \cup (1, 3)$ است.

۱ ۵۴

 عبارت جلوی لگاریتم $\log_2(x^2 - x - 2)$ باید مثبت باشد:

$$x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) > 0 \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 2$$

از طرفی عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1$$

در ضمن مخرج کسر یعنی $\sqrt{x^2 - 1} + 1$ همواره مثبت است و فاقد ریشه حقیقی است. از اشتراک بازه های به دست آمده، دامنه تابع به صورت بازه $(2, +\infty) \cup (-\infty, -1)$ است.

۳ ۵۵

به اجزای مختلف تابع توجه می کنیم:

(۱) به دلیل وجود $\sqrt{x}$ در صورت کسر، باید $x \geq 0$ باشد.

(۲) به دلیل وجود $\log(x^2 - 4)$ داریم:

$$x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow |x| > 2 \Rightarrow x < -2 \text{ یا } x > 2$$

(۳) مخرج کسر نیز نباید صفر باشد:

$$\sqrt{|x|} - 2 \neq 0 \Rightarrow |x| \neq 4 \Rightarrow |x| \neq 2 \Rightarrow x \neq \pm 2$$

بنابراین از اشتراک جواب های به دست آمده نتیجه می شود دامنه تابع به صورت $(3, +\infty) \cup (3, 3)$ است.

۳ ۵۶

عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$$1) 2 - \log_3(x^2 - 8x) \geq 0 \Rightarrow \log_3(x^2 - 8x) \leq 2$$

$$\Rightarrow \log_3(x^2 - 8x) \leq \log_3 9 \Rightarrow x^2 - 8x \leq 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x - 9 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 9$$

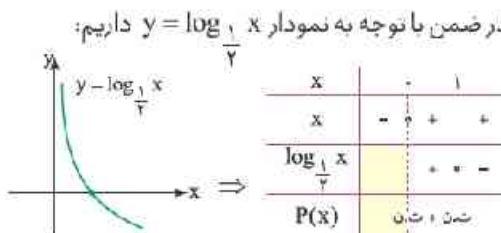
در ضمن عبارت مقابل لگاریتم باید مثبت باشد، پس:

$$2) x^2 - 8x > 0 \Rightarrow x < 0 \text{ یا } x > 8$$

حالا با اشتراک بازه های به دست آمده دامنه تابع f برابر بازه $(8, 9) \cup (-1, 0)$ است که شامل ۲ عدد صحیح است.

۱ ۵۷

چون $P(x) = \frac{x}{\log_2 x}$ زیر رادیکال با فرجه زوج قرار دارد، پس باید نامنفی باشد، در ضمن با توجه به نمودار $y = \log_2 x$ داریم:



پس دامنه تابع $f(x)$ بازه $(-1, 1)$ می باشد که فاقد عدد صحیح است.

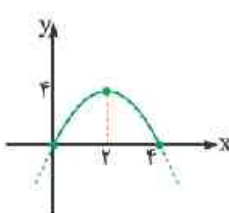
دامتستی گزینه ۲ رو انتخاب کردی؟ درسته که $x = 0$ صورت کسر رو صفر می کند اما عبارت جلوی لگاریتم رو هم صفر می کنه.

۶۲ ۲

عبارت زیر رادیکال یعنی $4x - x^2$ باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$4x - x^2 \geq 0 \rightarrow x(4 - x) \geq 0 \rightarrow 0 \leq x \leq 4$$

حالا به منحنی $y = 4x - x^2$ در بازه $0 \leq x \leq 4$ نگاه کنید:



با توجه به این که محدوده بُرد $y = 4x - x^2$

در بازه $0 \leq x \leq 4$ برابر $0 \leq y \leq 4$ است.

پس $2 \leq \sqrt{4x - x^2} \leq 4$ است. بنابراین:

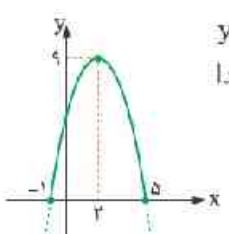
$$2 \leq 2 + \sqrt{4x - x^2} \leq 4$$

$$\rightarrow R_f = [2, 4] \rightarrow b - a = 2$$

۶۳ ۳

ابتدا دامنه تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$x^2 + 4x + 5 > 0 \Rightarrow (x+1)(x+5) > 0 \Rightarrow 1 < x < 5$$



حالا عبارت زیر رادیکال یعنی $y = x^2 + 4x + 5$

را در دامنه $[1, 5]$ رسم می‌کنیم و بُرد آن را پیدا

می‌کنیم:

$$x \rightarrow \text{بُرد} = [0, 9]$$

حالا چون در تابع $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$ عبارت درجه دوم

$y = -x^2 + 4x + 5$ زیر رادیکال قرار دارد، پس بُرد تابع f برابر است با:

$$R_f = [0, \sqrt{9}] = [0, 3]$$

۶۴ ۳

دامنه تابع برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ است. حالا ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

با توجه به این که $x^2 > 0$ است، پس $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ است و بُرد تابع f برابر $[2, +\infty)$ است.

هشدار

جمع هر عبارت حقیقی با معکوسش به صورت زیر است:

$$\text{۱} \quad x > 0 \rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \text{۲} \quad x < 0 \rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2$$

۱. به دوره دیکه! بُرد تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ را می‌خواهیم؟

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$

جواب:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \geq 2 \rightarrow \frac{1}{x^2} \geq 1 \Rightarrow 0 < x^2 \leq 1 \Rightarrow R_f = (0, 1]$$

۶۵ ۱

ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

چون $\sqrt{x^2 + 1} > 0$ است، پس $\sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$ است و بُرد

تابع f به صورت بازه $[2, +\infty)$ است که شامل عدد طبیعی $x = 1$ نیست.

۵۸ ۴

بُرد تابع $y = \frac{1}{x} + 1$ برابر بازه $[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}]$ است، پس:

$$1 \leq \frac{1}{x} + 1 \leq \frac{9}{4} \rightarrow 0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{5}{4} \rightarrow -2 \leq x \leq 3$$

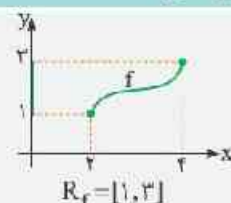
دامنه تابع شامل ۶ عدد صحیح $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ است.

هشدار

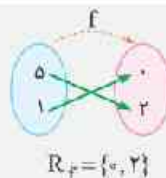
۱. برد تابع

به مجموعه خروجی‌هایی که از قرار دادن عضوهای دامنه در تابع f به دست می‌آید، بُرد تابع f می‌گویند و آن را با R_f نشان می‌دهند.

مشخص کردن بُرد تابع



نمودار در دستگاه مختصات:
تصویر نمودار روی محور y ها



نمودار ون (بیگانی):
مجموعه‌ای که به
اعضای آن بیگان وارد شده

$$f = \{(1, 0), (5, 2)\} \rightarrow R_f = \{0, 2\}$$

زوج مرتبی:
مجموعه همه مؤلفه‌های دوم

۵۹ ۲

ابتدا دامنه تابع را پیدا می‌کنیم:

$$\sqrt{4-x} : 4-x \geq 0 \rightarrow 4 \geq x \rightarrow D_f = \{4\}$$

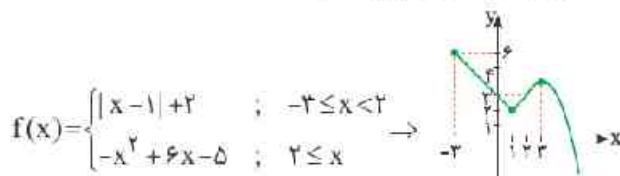
$$\sqrt{x-4} : x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$$

پس تنها عضو دامنه تابع $\{4\}$ است. حالا بُرد تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(4) = 0 + 0 + 16 - 8 + 3 = 11$$

۶۰ ۳

ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



بنابراین بُرد تابع f برابر $(-\infty, 6]$ است.

۶۱ ۴

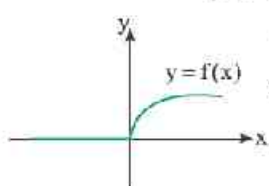
ابتدا تابع را به صورت دو ضابطه‌ای نوشته، سپس آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x+|x|} = \begin{cases} \sqrt{x+x} & ; x > 0 \\ \sqrt{x-x} & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x} & ; x > 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

بنابراین با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$.

دامنه تابع برابر $D_f = \mathbb{R}$ و بُرد تابع برابر

$$R_f = [0, +\infty)$$



۴ ۷۱

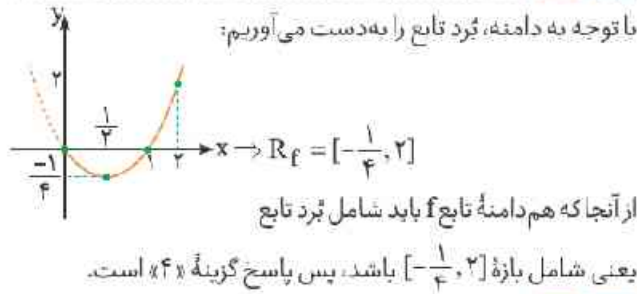
ما توجه به اینکه بُرد تابع زیرمجموعه هم دامنه، یعنی بازه $(1, 0)$ است، داریم:

$$1 \leq 1 + x^2 < 10 \rightarrow 0 \leq x^2 < 9 \rightarrow |x| < 3 \rightarrow -3 < x < 3$$

همواره برقرار

پس دامنه تابع یعنی مجموعه A برابر بازه $(-3, 3)$ یا هر زیرمجموعه از این بازه است. در بین گزینه‌ها بازه $[0, 3]$ زیرمجموعه این بازه نمی‌باشد پس نمی‌تواند دامنه این تابع باشد.

۴ ۷۲



۳ ۷۳

ضابطه‌ای برای تابع f پذیرفته است که اولاً دامنه آن $A = (-\infty, 0]$ یا هر مجموعه شامل A باشد. ثانیاً بُرد آن $B = (-\infty, 2]$ یا هر زیرمجموعه‌ای از B باشد. در بین گزینه‌ها فقط گزینه «۳» با دامنه $(-\infty, 2]$ و بُرد $(-\infty, 1]$ دارای این ویژگی است.

۱ ۷۴

چون تابع $f(x) = -x + 5$ یک تابع اکیدا نزولی است، پس داریم:

$$f(b+3) = 7 \rightarrow -(b+3) + 5 = 7 \rightarrow b = -5$$

$$f(a-2) = 13 \rightarrow -(a-2) + 5 = 13 \rightarrow a = -6$$

پس $\frac{a}{b} = \frac{6}{5}$ است.

۴ ۷۵

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

- ۱) $D_f = (+\infty, +\infty)$, $D_g = \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow f \neq g$
- ۲) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, $D_g = \mathbb{R} \Rightarrow f \neq g$
- ۳) $D_f = [0, +\infty)$, $D_g = \mathbb{R} \Rightarrow f \neq g$
- ۴) $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow f = g$

هتایلات

برابری دو تابع

- در حالت کلی دو تابع f و g برابری ندارند، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:
- ۱) دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند.
 - ۲) برای هر x از این دامنه یکسان، $f(x) = g(x)$ باشد.

۱ ۷۶

به بررسی موارد می‌پردازیم:

$$\text{الف) } \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{cases} \rightarrow D_f = (1, +\infty) \\ g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}} \Rightarrow \frac{x}{x-1} \geq 0 \Rightarrow D_g = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

۱ ۶۶

ابتدا دامنه تابع f را می‌یابیم:

$$x - x^2 > 0 \Rightarrow x(1-x) > 0 \Rightarrow 0 < x < 1$$

چون $0 < x < 1$ است، پس حاصل $[x]$ برابر صفر است.

حالا ضابطه تابع f را بازنویسی می‌کنیم:

$$0 < x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{0 \cdot x |x|}{\sqrt{x-x^2}} = 0$$

بنابراین مجموعه بُرد این تابع برابر $\{0\}$ است.

۱ ۶۷

می‌دانیم $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ است. در ضمن عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$$-\cos^2 x \geq 0 \Rightarrow \cos^2 x \leq 0$$

پس نتیجه می‌گیریم فقط $\cos^2 x = 0$ قابل قبول است. بنابراین:

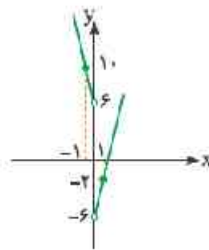
$$f(x) = 2\sqrt{-\cos^2 x} = 2 \cdot 0 = 0$$

پس بُرد تابع f شامل یک عضو صحیح است: $R_f = \{0\}$

۲ ۶۸

ابتدا تابع را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y = \begin{cases} \frac{4x^2 - 6x}{x}; & x > 0 \\ \frac{-4x^2 + 6x}{x}; & x < 0 \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} 4x - 6; & x > 0 \\ 4x + 6; & x < 0 \end{cases}$$



حال نمودار هر قسمت را رسم می‌کنیم تا بُرد تابع مشخص شود. با توجه به نمودار بُرد این تابع برابر $(-\infty, +\infty)$ است.

۲ ۶۹

می‌دانیم در تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ دامنه تابع $\mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$ و بُرد آن $\mathbb{R} - \{-\frac{a}{c}\}$ است.

پس بُرد تابع $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$ برابر $\mathbb{R} - \{1\}$ است. حالا بُرد تابع

$$g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x} \geq 0 \rightarrow 1 + \sqrt{x} \geq 1 \rightarrow 0 < \frac{1}{1+\sqrt{x}} \leq 1$$

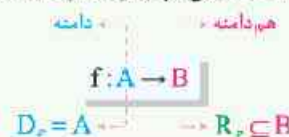
پس بُرد این تابع به صورت بازه $(0, 1]$ است.

۴ ۷۰

بُرد تابع به صورت $R_f = [-1, 0] \cup [1, 3]$ است. مجموعه هم دامنه، یعنی B ، باید شامل بُرد f باشد. در میان گزینه‌ها فقط بازه $[1, 5]$ شامل R_f است.

هتایلات

وقتی می‌گوییم تابع f از A تعریف شده است $(f: A \rightarrow B)$ یعنی دامنه تابع f برابر A است. ولی بُرد زیرمجموعه‌ای از B می‌باشد.



۳۸۱

دامنه تابع $g(x) = \frac{c}{x+2}$ برابر $\mathbb{R} - \{-2\}$ است. در نتیجه دامنه تابع

$f(x) = \frac{bx+2}{x^2+ax+4}$ نیز باید برابر $\mathbb{R} - \{-2\}$ باشد. پس $x = -2$ ریشه مخرب تابع f نیز هست:

$$x = -2 \rightarrow (-2)^2 + a(-2) - 4 = -2a + 8 = 0 \rightarrow a = 4$$

از طرفی $x = -2$ باید ریشه صورت کسر تابع f نیز باشد تا صورت کسر تابع f نیز مانند تابع g برابر عدد ثابت باشد. پس:

$$x = -2 \rightarrow b(-2) + 2 = 0 \rightarrow b = 1 \rightarrow f(x) = \frac{x+2}{x^2+4x+4} = \frac{x+2}{(x+2)^2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x+2}$$

حال برای آن که دو تابع $f(x) = \frac{1}{x+2}$ و $g(x) = \frac{c}{x+2}$ برابر باشند باید $c = 1$ باشد. پس $a+b+c = 4+1+1 = 6$ است.

۳۸۲

در تابع f چون $|x|$ زیر رادیکال یا فرجه ۲ قرار دارد، پس:

$$x|x| \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow D_f = [0, +\infty)$$

نامفی

دامنه تابع g نیز برابر $\mathbb{R}$ است. حال ضابطه این دو تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x|x|} \xrightarrow{x \geq 0} f(x) = \sqrt{x^2} = |x| \xrightarrow{x \geq 0} f(x) = x; x \geq 0$$

$$g(x) = \sqrt{|x|} \times \sqrt{|x|} = \sqrt{|x|^2} = |x|$$

به ازای $x \geq 0$ ، ضابطه g برابر $g(x) = x$ می‌شود. پس این دو تابع به ازای دامنه $[0, +\infty)$ با هم مساوی‌اند.

۳۸۳

دامنه تابع ثابت g برابر $\mathbb{R}$ است. بنابراین دامنه تابع f هم باید برابر $\mathbb{R}$ باشد. پس مخرب کسر تابع f ، نباید ریشه حقیقی داشته باشد:

$$x^2 + x - a = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 4a < 0 \Rightarrow a < -\frac{1}{4}$$

از طرفی ضابطه دو تابع هم باید برابر باشد:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2(x^2+x-a)}{x^2+x-a} = 2 \\ g(x) = a^2 - a + 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow 2 = a^2 - a + 2$$

$$\Rightarrow a(a^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \times \\ a = 1 \times \\ a = -1 \checkmark \end{cases}$$

۳۸۴

برای این که $|2x^2+ax+1| = 2x^2+ax+1$ باشد، لازم است که عبارت $2x^2+ax+1$ نامنفی باشد، یعنی دلتای آن کوچک‌تر یا مساوی صفر باشد ($\Delta \leq 0$).

$$\Delta < 0 \Rightarrow a^2 - 4(2)(1) < 0 \Rightarrow a^2 < 8 \Rightarrow 2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$$

$$\text{ب) } \begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2} \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \rightarrow D_f = D_g = [0, +\infty) \\ g(x) = x\sqrt{x} \Rightarrow x > 0 \end{cases}$$

در مورد «ب» دامنه هر دو تابع برابر $\mathbb{R}$ است، اما مقدار تابع به ازای x های یکسان، تفاوت دارد:

$$\text{ب) } \begin{cases} f(\sqrt{2}) = [\sqrt{2}] = 2 \\ g(\sqrt{2}) = [\sqrt{2}]^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{ت) } \begin{cases} f(x) = \frac{x}{[x]} \Rightarrow [x] \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\} \\ g(x) = \frac{[x]}{x} \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\} \end{cases}$$

۴۷۷

$$\text{الف) } D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R} - \{x \mid x = \frac{k\pi}{2}\}$$

$$\text{ب) } f(x) = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|, g(x) = x+1$$

$$\text{پ) } f(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|, g(x) = \cos x$$

۴۷۸

دامنه تابع $f(x) = \log(\frac{x-2}{x})$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x-2}{x} > 0 \Rightarrow \begin{matrix} x & -\infty & - & 2 & +\infty \\ f & + & - & - & + \end{matrix} \Rightarrow (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

حال دامنه هر یک از گزینه‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$۱) y = \log(x-2) \Rightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 2$$

$$۲) y = \log \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)} \Rightarrow D_y = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) - \{-2\}$$

$$۳) y = \frac{1}{2} \log(\frac{x-2}{x})^2 \Rightarrow D_y = \mathbb{R} - \{0, 2\}$$

$$۴) y = 2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}} \Rightarrow D_y = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

پس در $x = -2$ در تابع f صدق می‌کند، اما در «۱» و «۲» صدق نمی‌کند از طرفی $x = 1$ در «۳» صدق می‌کند، اما در f صدق نمی‌کند.

۴۷۹

برای این که دو تابع f و g مساوی باشند، باید:

۱) به ازای هر مقدار x با هم برابر باشند. پس به ازای $x = 2$ داریم:

$$f(2) = g(2) \Rightarrow 2(2) + 4 = b \Rightarrow b = 8$$

۲) ضابطه هر دو تابع یکسان باشد. پس:

$$\frac{2x^2+a}{x-2} = 2x+4 \Rightarrow 2x^2+a = 2(x+2)(x-2) \Rightarrow a = -8$$

بنابراین $a+b = 0$ است.

۳۸۵

برای این که دو تابع f و g مساوی باشند، باید:

به ازای هر مقدار x دارای مقادیر y یکسان باشند. چون $x = 1$ در

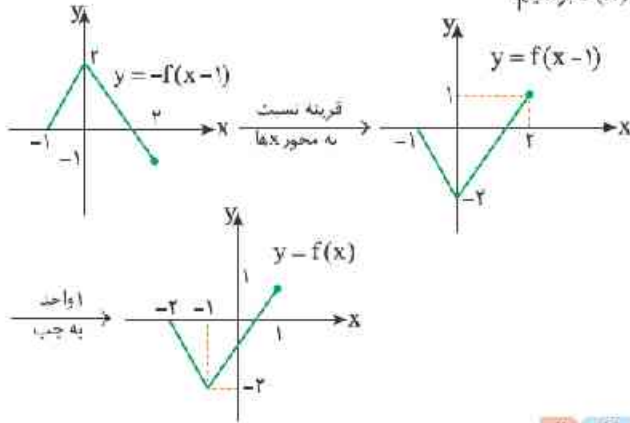
دامنه ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ وجود ندارد. پس $a = 1$ بوده و به ازای

$$x = 1 \text{ داریم: } f(1) = g(1) \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2} \rightarrow a+b = \frac{3}{2}$$

۲ ۸۸

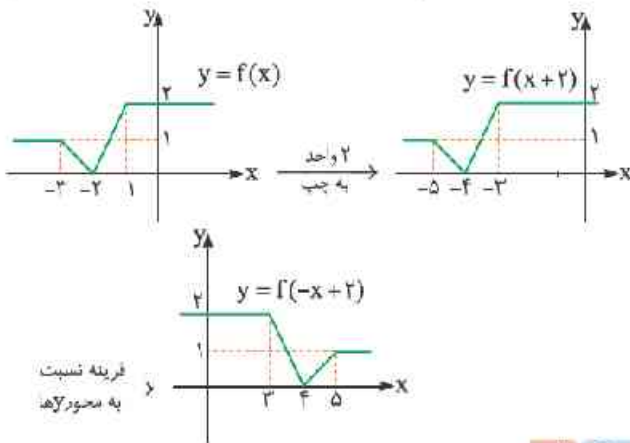
ابتدا نمودار را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = f(x-1)$ پدید آید.

سپس آن را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا به نمودار $y = f(x)$ برسیم:



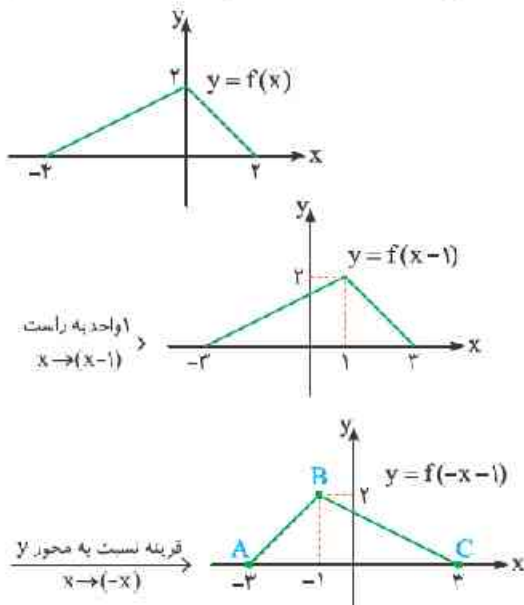
۲ ۸۹

ابتدا نمودار تابع $y = f(x-1)$ را ۱ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا به نمودار $y = f(x)$ برسیم، سپس تغییرات را به ترتیب زیر اعمال می‌کنیم.



۲ ۹۰

با داشتن نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودار تابع $y = f(x-1)$ را رسم می‌کنیم:



۴ ۸۵

می‌دانیم $f(x) = [x] + [-x]$ به ازای مقادیر صحیح برابر صفر و به ازای مقادیر غیر صحیح برابر ۱ است، پس:

$$f^2(x) = ([x] + [-x])^2 = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ 1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

حال همه ضابطه‌ها را ساده می‌کنیم:

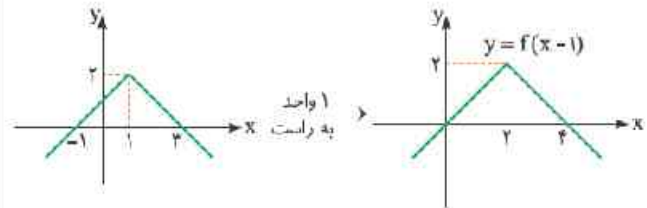
الف) $\sqrt{f(x)} = \sqrt{[x] + [-x]} = 0 ; x \in \mathbb{Z}$

ب) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{[x] + [-x]} = -1 ; x \notin \mathbb{Z}$

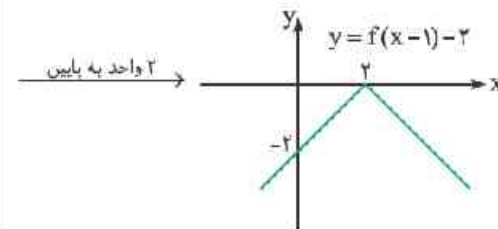
پ) $f(-x) = [-x] + [x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

۱ ۸۶

ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به راست منتقل می‌کنیم تا تابع $y = f(x-1)$ به دست آید.

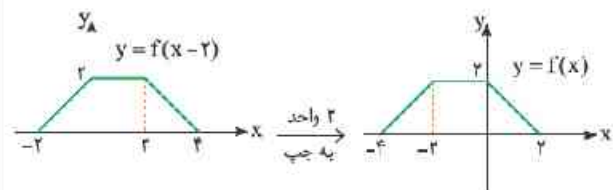


سپس نمودار حاصل را ۲ واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار $y = f(x-1) - 2$ به دست آید:

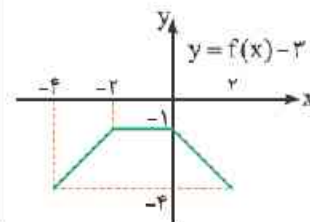


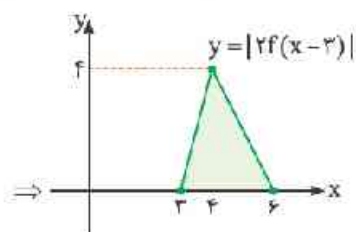
۴ ۸۷

ابتدا نمودار $y = f(x-2)$ را ۲ واحد به چپ می‌بریم تا نمودار $y = f(x)$ به دست آید:



حالا نمودار $y = f(x)$ را ۳ واحد به پایین می‌بریم تا نمودار تابع $y = f(x) - 3$ به دست آید:



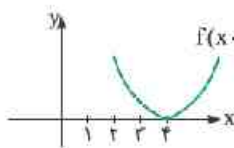


مساحت ناحیه هاشورخورده به صورت زیر است:

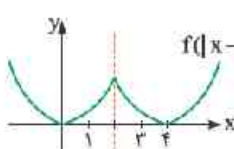
$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$

۹۴ ۲

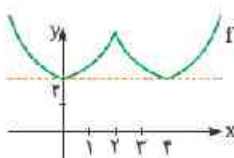
ابتدا به کمک نمودار داده شده،



نمودار تابع $f(x-2)$ را رسم می‌کنیم. کافیت نمودار داده شده را ۲ واحد به سمت راست منتقل کنیم:



سپس با حذف قسمت سمت چپ خط $x=2$ ، قرینه قسمت باقی‌مانده در سمت راست را به آن اضافه می‌کنیم:



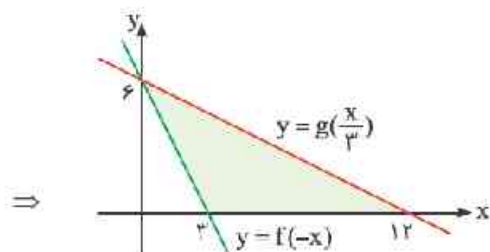
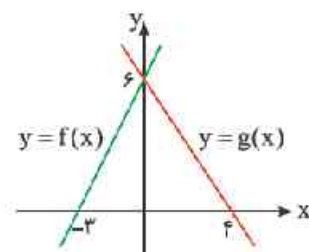
اکنون با ۲ واحد انتقال به سمت بالا، نمودار تابع $f(|x-2|)+2$ حاصل می‌شود:

۹۵ ۲

برای رسم نمودار تابع $y=f(\frac{x}{2})$ باید طول تمام نقاط را دو برابر و برای رسم نمودار $y=f(2x)$ باید طول تمام نقاط را نصف کنیم. پس نمودارهای گزینه (۲) به درستی رسم شده‌اند.

۹۶ ۴

نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور y قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=f(-x)$ به دست آید و طول نقاط $y=g(x)$ را ۳ برابر می‌کنیم تا نمودار $y=g(\frac{x}{3})$ به دست آید:



مساحت ناحیه رنگی برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \times 9 \times 6 = 27$$

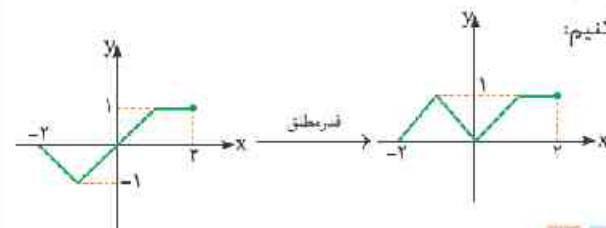
حالا معادله پاره خط BC را پیدا می‌کنیم تا محل برخورد آن با محور y ها مشخص شود:

$$m_{BC} = \frac{2-0}{-1-3} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \text{معادله BC: } y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

این نمودار محور y ها را در نقطه‌ای با عرض $\frac{3}{4}$ قطع می‌کند. بنابراین اگر آن را در راستای عمودی به اندازه $\frac{3}{4}$ به پایین منتقل کنیم، از مبدأ مختصات عبور می‌کند. پس $k = -\frac{3}{4}$ است.

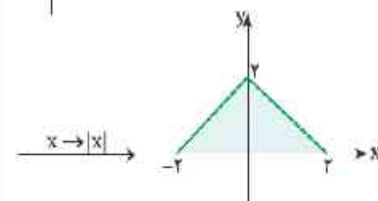
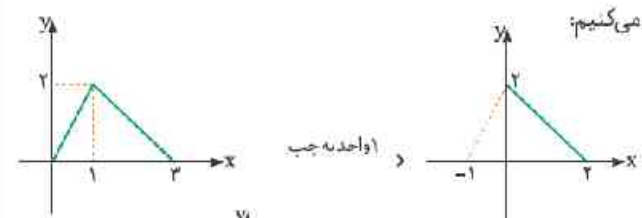
۹۱ ۲

قسمتی از نمودار که زیر محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم:



۹۲ ۴

ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار $y=f(x+1)$ به دست آید. سپس قسمت‌هایی از نمودار که در سمت راست محور x قرار دارند را نگه داشته و قرینه آن نسبت به محور y ها را به آن اضافه می‌کنیم:

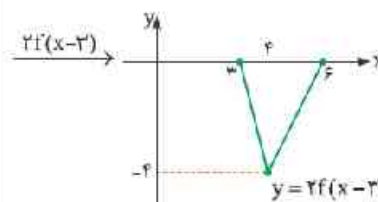
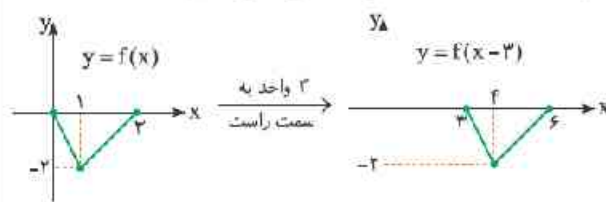


ناحیه محدود به محور x ها و نمودار یک مثلث به قاعده ۴ واحد و ارتفاع ۲ واحد است و مساحت آن برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$

۹۳ ۴

ابتدا تابع $f(x)$ را ۳ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم، سپس عرض تمام نقاط آن را ۲ برابر کرده و قسمت‌هایی از نمودار که زیر محور x ها قرار دارند را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:



۳ ۱۰۰

ابتدا به نمودار، دامنه تابع $y=f(x)$ به صورت بازه $[-2, 4]$ است، پس برای به دست آوردن دامنه $y=3f(2x-1)+1$ داریم:

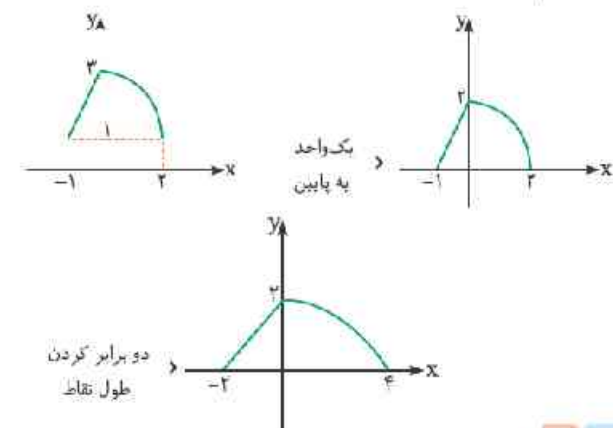
$$-2 \leq 2x-1 \leq 4 \Rightarrow -1 \leq 2x \leq 5 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

بنابراین دامنه این تابع به صورت بازه $[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$ است و مقدار a برابر است با:

$$\frac{5}{2} - (-\frac{1}{2}) = 3$$

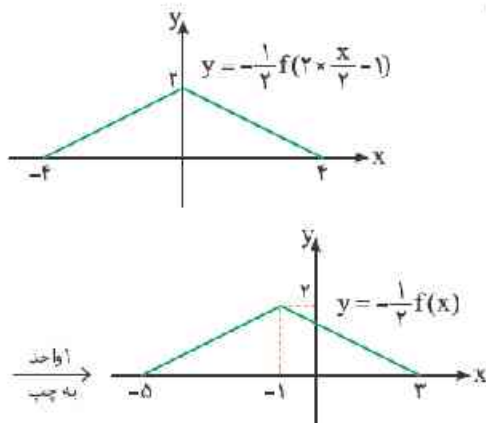
۳ ۱۰۱

ابتدا نمودار تابع $y=1+f(2x)$ را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا به نمودار $y=f(2x)$ برسیم و سپس طول تمام نقاط را دو برابر می‌کنیم (x را به $\frac{x}{2}$ تبدیل می‌کنیم) تا نمودار $y=f(x)$ به دست آید:

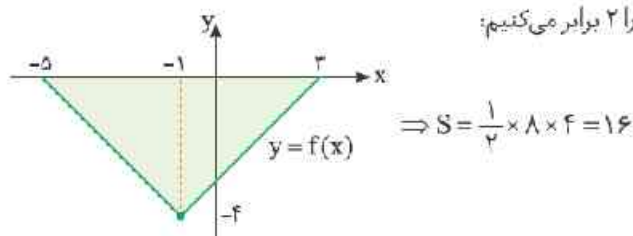


۳ ۱۰۲

ابتدا در تابع $y=\frac{1}{2}f(2x-1)$ طول تمام نقاط را دو برابر می‌کنیم (به جای x عبارت $\frac{x}{2}$ قرار می‌دهیم)، سپس نمودار تابع حاصل را ۱ واحد به چپ می‌بریم (به جای x عبارت $x+1$ قرار می‌دهیم) و خواهیم داشت:

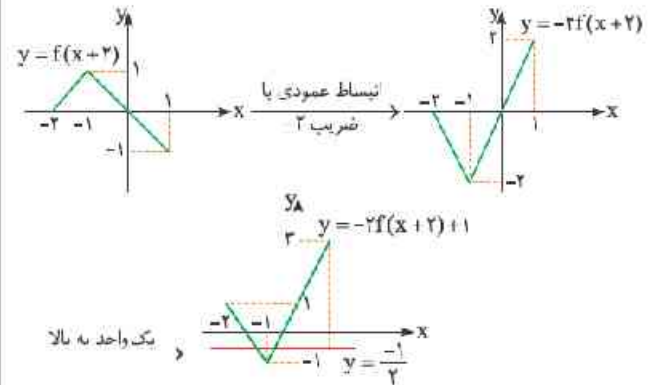


حالا نمودار حاصل را نسبت به محور x قریه کرده و سپس عرض نقاط را ۲ برابر می‌کنیم:



۲ ۹۷

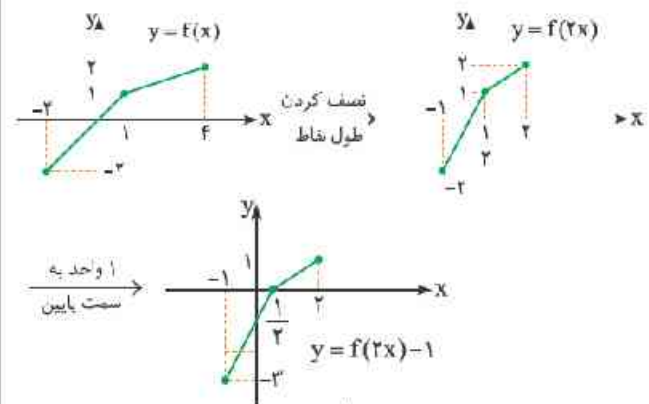
ابتدا به کمک انتقال از روی نمودار $y=f(x)$ ، نمودار داده شده را رسم می‌کنیم:



پس نمودار $y=-\frac{1}{2}f(x+2)+1$ و $y=-2f(x+2)+1$ در نقطه متقاطع اند.

۳ ۹۸

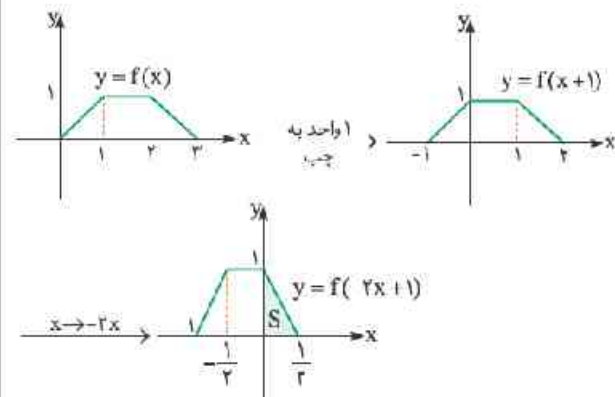
برای رسم نمودار تابع $g(x)$ ، کافی است x های تمام نقاط تابع f را $\frac{1}{2}$ برابر کنیم و نمودار را ۱ واحد به سمت پایین انتقال دهیم:



با توجه به نمودار، تابع در بازه $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ زیر محور x ها قرار دارد.

۲ ۹۹

ابتدا نمودار را ۱ واحد به چپ منتقل می‌کنیم و سپس تغییرات را مرحله به مرحله مطابق شکل‌های زیر اعمال می‌کنیم:



در ناحیه اول دستگاه مختصات، یک مثلث قائم الزاویه با اضلاع قائم $\frac{1}{2}$ و ۱ ایجاد شده که مساحت آن برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$$