

راهنمای استفاده از کتاب

■ برای کسب بهترین نتیجه در امتحانات مدرسه و کنکور گام‌های زیر را به ترتیب برای هر فصل طی کنید. ■

فیلم آموزشی

گام

اول

۱. هر فصل به تعدادی جلسه تقسیم شده است.
۲. برای استفاده از فیلم‌های آموزشی هر جلسه QR-Code های صفحه بعد را اسکن کنید.
۳. در هر جلسه مطالب کتاب درسی درس به درس تدریس شده است.
۴. تمرین‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی به صورت کامل تدریس شده است.

درسنامه آموزشی

گام

دوم

۱. هر فصل به تعدادی قسمت تقسیم شده است.
۲. در هر قسمت آموزش کاملی به همراه مثال و تست ارائه شده است.
۳. سطح تست‌ها عموماً کمی بالاتر از مثال‌ها است. اگر دانش‌آموز وقت کافی ندارد یا می‌خواهد فقط در سطح امتحانات مدرسه درس بخواند، می‌تواند بدون این‌که مطلبی را از دست دهد از تست‌ها عبور کند.

پرسش‌های تشریحی

گام

سوم

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام دوم) تقسیم شده است.
۲. سوالات از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۳. سوالات دارای پاسخ تشریحی هستند.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

گام

چهارم

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام دوم و سوم) تقسیم شده است.
۲. هر قسمت نیز دارای ریز طبقه‌بندی است.
۳. تست‌ها از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۴. تمامی تست‌های کنکور داخل و خارج از کشور قابل استفاده و منطبق بر کتاب درسی جدید آورده شده است.
۵. اگر وقت کافی برای حل همه تست‌ها را ندارید، سؤال‌های (★) و اگر دنبال تست‌های خفن‌تر و درصد ۱۰۰ هستی، سؤال‌های (★) را حتماً حل کنید.
۶. تست‌ها دارای پاسخ تشریحی هستند.

■ به جای آن‌که چندین کتاب بخوانید، کتاب‌های گاج را چندین بار بخوانید ■

FILM

فصل اول: آشنایی با نظریه اعداد

37 min	جلسه اول: استدلال ریاضی	80 min	جلسه دهم: حل تمرین‌های کتاب درسی
25 min	جلسه دوم: اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها	52 min	جلسه یازدهم: هم‌نهشتی در اعداد صحیح (قسمت اول)
24 min	جلسه سوم: اثبات غیرمستقیم	42 min	جلسه دوازدهم: هم‌نهشتی در اعداد صحیح (قسمت دوم)
40 min	جلسه چهارم: اثبات‌های بازگشتی - گزاره‌های هم‌ارز	37 min	جلسه سیزدهم: هم‌نهشتی در اعداد صحیح (قسمت سوم)
36 min	جلسه پنجم: حل تمرین‌های کتاب درسی	14 min	جلسه چهاردهم: معادله هم‌نهشتی
85 min	جلسه ششم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح	8 min	جلسه پانزدهم: حل معادلات سیاله و کاربردهای آن
32 min	جلسه هفتم: بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و...		جلسه شانزدهم: تبدیل یک معادله سیاله به
21 min	جلسه هشتم: قضیه تقسیم	28 min	یک معادله هم‌نهشتی
33 min	جلسه نهم: افراز مجموعه $\mathbb{Z}$ به کمک تقسیم	84 min	جلسه هفدهم: حل تمرین‌های کتاب درسی

فصل دوم: گراف و مدل‌سازی

75 min	جلسه هجدهم: گراف (قسمت اول)	82 min	جلسه بیست و یکم: مدل‌سازی با گراف (قسمت اول)
92 min	جلسه نوزدهم: گراف (قسمت دوم)	70 min	جلسه بیست و دوم: مدل‌سازی با گراف (قسمت دوم)
68 min	جلسه بیستم: حل تمرین‌های کتاب درسی	90 min	جلسه بیست و سوم: حل تمرین‌های کتاب درسی

فصل سوم: ترکیبیات (شمارش)

28 min	جلسه بیست و چهارم: یادآوری و تکمیل	42 min	جلسه بیست و نهم: حل تمرین‌های کتاب درسی (قسمت اول)
86 min	جلسه بیست و پنجم: جایگشت‌های با تکرار	54 min	جلسه سی‌ام: حل تمرین‌های کتاب درسی (قسمت دوم)
55 min	جلسه بیست و ششم: مربع لاتین	49 min	جلسه سی و یکم: اصل شمول و عدم شمول (قسمت اول)
67 min	جلسه بیست و هفتم: دو مربع لاتین متعامد	61 min	جلسه سی و دوم: اصل شمول و عدم شمول (قسمت دوم)
	جلسه بیست و هشتم: یک روش برای ساختن دو	71 min	جلسه سی و سوم: اصل لانه کبوتری
24 min	مربع لاتین متعامد از مرتبه یک عدد فرد	72 min	جلسه سی و چهارم: حل تمرین‌های کتاب درسی

فهرست مطالب

فصل اول: آشنایی با نظریه اعداد

قسمت اول: استدلال ریاضی

قسمت دوم: بخش پذیری در اعداد صحیح

قسمت سوم: بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م) ...

قسمت چهارم: قضیه تقسیم

قسمت پنجم: همنهشتی در اعداد صحیح. کلاس های ...

قسمت ششم: قوانین بخش پذیری. باقی مانده اعداد ...

قسمت هفتم: معادله هم نهشتی. تقویم نگاری ...

امتحان	کنکور	آموزش
۱۸۵	۸۱	۱۰
۱۸۷	۸۳	۱۳
۱۸۸	۸۴	۲۰
۱۸۹	۸۶	۲۳
۱۹۰	۸۷	۲۶
۱۹۱	۹۰	۳۰
۱۹۲	۹۴	۳۶

فصل دوم: گراف و مدل سازی

قسمت اول: مقدمات گراف. تعاریف اولیه. دنباله درجات

قسمت دوم: شمارش گراف ها

قسمت سوم: گراف کامل. مکمل گراف. گراف منتظم

قسمت چهارم: مسیر. دور. گراف همبند

قسمت پنجم: مدل سازی در گراف و احاطه گری

۲۰۷	۱۲۵	۴۲
۲۰۸	۱۲۷	۴۶
۲۰۹	۱۲۸	۴۸
۲۱۰	۱۳۰	۵۲
۲۱۱	۱۳۳	۵۷

فصل سوم: ترکیبیات (شمارش)

قسمت اول: جایگشت

قسمت دوم: توزیع n شیء یکسان

قسمت سوم: مربع لاتین

قسمت چهارم: اصل شمول و عدم شمول. تعداد توابع

قسمت پنجم: اصل لانه کبوتری

۲۲۱	۱۵۵	۶۳
۲۲۱	۱۵۶	۶۶
۲۲۲	۱۵۸	۶۹
۲۲۳	۱۶۱	۷۴
۲۲۴	۱۶۳	۷۹

قسمت دوم

فصل

۱

بخش پذیری در اعداد صحیح

بخش پذیری

تقسیم، ابزاری است برای قرار دادن تعدادی شیء در دسته‌های مساوی. چه بهتر که در دسته‌بندی ما باقی‌مانده‌ای وجود نداشته باشد. مثلاً $2 \times 5 = 10$ یعنی ۱۰ شیء را می‌توان به ۵ دسته دوتایی تقسیم کرد (۱۰ بر ۲ بخش پذیر است). این تقسیم‌بندی را می‌توان به این شکل نگاه کرد که ۱۰ شیء را می‌توان در ۵ دسته دوتایی شمرده به بیان دیگر می‌گوییم عدد ۲، عدد ۱۰ را می‌شمارد.

$$a = bq$$

تعریف: عدد صحیح a را بر عدد صحیح و ناصفر b بخش پذیر گوییم، هرگاه عددی صحیح مانند q چنان یافت شود که بخش پذیری a بر b را می‌توان به صورت $a = bq$ نشان داد و به یکی از صورت‌های زیر خواند:

(۱) عدد b ، عدد a را می‌شمارد (عاد می‌کند).

(۲) a بر b بخش پذیر است (a مضرب b است یا b مقسوم‌علیه a است).

تکبر: در تمام مباحث نظریه اعداد، با اعداد صحیح کار می‌کنیم و همواره منظور از عدد، عدد صحیح است.

تکبر: اگر عدد b ، عدد a را عاد نکند (a بر b بخش پذیر نباشد)، می‌گوییم $b \nmid a$.

کدام گزینه صحیح نیست؟

$$7 \mid 42 \quad (1)$$

$$6 \mid 72 \quad (2)$$

$$14 \mid 7 \quad (3)$$

$$7 \mid 91 \quad (4)$$

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

$$1) 42 = 7 \times 6 \Rightarrow 7 \mid 42 \quad \checkmark$$

$$2) 72 = 6 \times 12 \Rightarrow 6 \mid 72 \quad \checkmark$$

$$3) 14 \text{ مقسوم‌علیه } 7 \text{ نیست و این رابطه نادرست است} \quad (3)$$

$$4) 91 = 7 \times 13 \Rightarrow 7 \mid 91 \quad \checkmark$$

پس جواب گزینه (۳) است.

به ازای چند عدد طبیعی n داریم $n-2 \mid 6$ ؟

$$5 \quad (2)$$

$$4 \quad (3)$$

$$3 \quad (4)$$

$$2 \quad (1)$$

پاسخ: برای آن که $n-2 \mid 6$ ، باید $n-2$ مقسوم‌علیه ۶ باشد. یعنی:

$n-2$	-۱	۱	-۲	۲	-۳	۳	-۴	۴
n	۱	۳	۰	۴	-۱	۵	-۲	۶

در نتیجه برای n ، ۵ مقدار طبیعی $\{1, 3, 4, 5, 6\}$ وجود دارد و جواب گزینه (۲) است.

اگر $ac = bd$ باشد، کدام گزینه درست است؟

$$a \mid c \quad (1)$$

$$a \mid b \quad (2)$$

$$ac \mid b \quad (3)$$

$$a \mid bd \quad (4)$$

پاسخ: در تساوی $ac = bd$ اگر فرض کنیم $c = q$ ، در این صورت داریم:

$$bd = a \times q \Rightarrow a \mid bd$$

پس جواب گزینه (۴) است. اما برای رد سایر گزینه‌ها تساوی $\frac{2 \times 3}{a \times c} = \frac{1 \times 6}{b \times d}$ را در نظر بگیرید:

$$1) \quad 2/3 \Rightarrow a/c \quad \text{رد گزینه (۱)}$$

$$2) \quad 2/1 \Rightarrow a/b \quad \text{رد گزینه (۲)}$$

$$3) \quad 6/1 \Rightarrow ac/b \quad \text{رد گزینه (۳)}$$

پایه های رابطه عادی کردن

• $a \Rightarrow a = 0$

$(\forall a \in \mathbb{Z}) : a | 0$

$\forall a \in \mathbb{Z} : a | a$

$\forall a \in \mathbb{Z} : \pm 1 | a$

$a | 1 \Rightarrow a = \pm 1$ یا $a | -1 \Rightarrow a = \pm 1$

• $0 | a$

ویژگی (۱): عدد صفر، هیچ عددی را نمی شمارد جز خودش. به عبارت دیگر:

نوعه هر عددی صفر را عاد می کند:

ویژگی (۲): هر عددی خودش را می شمارد. یعنی:

ویژگی (۳): اعداد ۱ و -۱ هر عددی را می شمارند یعنی:

ویژگی (۴): اگر عددی ۱ یا -۱ را بشمارد، آن گاه آن عدد برابر با ± 1 است. یعنی:

ویژگی (۵):

۱۲

منحنی به معادله $y = \frac{-1}{5-2x}$ از چند نقطه با مختصات صحیح (طول و عرض صحیح) می گذرد؟

۳ (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) صفر

پاسخ: برای این که $y \in \mathbb{Z}$ باشد باید $\frac{-1}{5-2x} \in \mathbb{Z}$ باشد و به عبارت دیگر $5-2x | -1$ (برای آن که حاصل یک کسر عددی صحیح شود، باید صورت آن بر مخرجش بخش پذیر باشد). پس داریم:

$$5-2x | -1 \Rightarrow \begin{cases} 5-2x=1 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=-1 \\ 5-2x=-1 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3 \Rightarrow y=1 \end{cases}$$

پس این منحنی از دو نقطه $(2, -1)$ و $(3, 1)$ عبور می کند. پس جواب گزینه (۲) است.

$a | b \Rightarrow \begin{cases} a | -b \\ -a | b \\ -a | -b \end{cases}$

ویژگی (۵): هر یک از طرفین رابطه عاد کردن را می توان در یک منفی ضرب کرد. یعنی:

ویژگی (۶): سمت راست رابطه عاد کردن را در هر عددی می توان ضرب کرد (یا به توان هر عدد طبیعی رساند). یعنی:

$a | b \Rightarrow \begin{cases} a | b^m & (m \in \mathbb{N}) \\ a | mb & (m \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

تکرار عکس رابطه فوق لزوماً برقرار نیست. برای مثال: $4 | 2^3 \xrightarrow{a|b} 4 | 2^3$ و $2 | 4 \times 3 \xrightarrow{a|b} 2 | 12$

اثبات:

$$a | b \Rightarrow b = aq \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{به توان } m} b^m = a^m q^m = a \underbrace{(a^{m-1} q^m)}_{q'} \Rightarrow b^m = a q' \Rightarrow a | b^m \\ \xrightarrow{\text{ضرب در } m} mb = maq = a \underbrace{(mq)}_{q'} \Rightarrow mb = a q' \Rightarrow a | mb \end{cases}$$

ویژگی (۷): طرفین رابطه عاد کردن را می توان در هر عدد صحیح ضرب کرد یا به هر توانی رساند و بالعکس. یعنی:

$a | b \Leftrightarrow ma | mb \quad (m \in \mathbb{Z})$

$a | b \Leftrightarrow a^n | b^n \quad (n \in \mathbb{N})$

اثبات:

$$a | b \Rightarrow b = aq \Rightarrow \begin{cases} b^n = a^n \underbrace{q^n}_{q'} \Rightarrow a^n | b^n \\ mb = maq \Rightarrow ma | mb \end{cases}$$

نتیجه ۱: $\left. \begin{matrix} a | b \\ n \leq m \end{matrix} \right\} \Rightarrow a^n | b^m$

مثال: $2 | 6 \xrightarrow{2 \leq 3} 2^2 | 6^3$

اثبات نتیجه ۱:

$$a | b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{\text{طرفین به توان } m} b^m = a^m q^m = a^n \cdot \underbrace{a^{m-n} q^m}_{q'} \Rightarrow a^n | b^m$$

نتیجه ۲: $\left. \begin{matrix} a^n | b^m \\ n \geq m \end{matrix} \right\} \Rightarrow a | b$

مثال: $576 = 6^4 \times 9 \Rightarrow 3^2 | 2^2 \xrightarrow{2 \leq 4} 3^2 | 2^4$

اثبات نتیجه ۲:

$$a^n | b^m \xrightarrow{s=n-m} a^{m+s} | b^m \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در } b^s} a^{m+s} | b^{m+s} \Rightarrow a | b$$

$$\left. \begin{array}{l} a^n | b^m \\ \frac{m}{n} \leq \frac{q}{p} \text{ یا } mp \leq nq \end{array} \right\} \Rightarrow a^p | b^q \quad \text{نتیجه ۳}$$

مثال: $13^5 | 18^{10} \Rightarrow 13^3 | 18^6$ (چرا که $\frac{10}{5} < \frac{6}{3}$)

اثبات نتیجه ۳:

$$mp \leq nq \Rightarrow 0 \leq nq - mp \xrightarrow{\text{می توان نوشت}} nq - mp = t \Rightarrow mp = nq - t \quad (t \geq 0)$$

$$a^n | b^m \xrightarrow{\text{به توان } p} a^{np} | b^{mp} \xrightarrow{mp=nq-t} a^{np} | b^{nq-t} \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در } b^t} a^{np} | b^{nq} \Rightarrow a^p | b^q$$

$$\forall m, n, m \geq n \Rightarrow a^n | a^m \quad \text{نتیجه ۴}$$

اثبات نتیجه ۴:

$$m \geq n \Rightarrow a^m = a^n \times \underbrace{a^{m-n}}_q \Rightarrow a^n | a^m$$

تست

از رابطه $a^5 | b^7$ کدام رابطه را همواره می توان نتیجه گرفت؟

$$a^5 | b^7 \quad a^5 | b^9 \quad a^5 | b^{12} \quad a | b$$

پاسخ: روش اول: طبق نتیجه ۳ در رابطه بالا زمانی می توان از رابطه $a^n | b^m$ رابطه $a^p | b^q$ را نتیجه گرفت که $mp \leq nq$ باشد پس می توان نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} a^5 | b^7 \\ 5 \times 3 \geq 7 \times 2 \end{array} \right\} \Rightarrow a^3 | b^2$$

پس جواب گزینه (۴) است.
روش دوم:

$$a^5 | b^7 \xrightarrow{\text{طرفین به توان } 2} a^{10} | b^{14} \xrightarrow{\text{سمت راست را در } b \text{ ضرب می کنیم}} a^{10} | b^{15}$$

پس می توانیم بگوییم $a^5 | (b^3)^5$ و با توجه به ویژگی ۷ داریم:

تست

کدام نتیجه گیری در حالت کلی نادرست است؟

$$a^2 | b^2 \Rightarrow 2a | 2b \quad a | b \Rightarrow 2a | 2b \quad a^2 | b^2 \Rightarrow a | 2b \quad a^2 | b^2 \Rightarrow a | 2b$$

پاسخ: طبق ویژگی های عاد کردن درستی هر گزینه را بررسی می کنیم:

$$a^2 | b^2 \Rightarrow a | 2b \quad \text{سمت راست ضرب در } 2 \quad \checkmark$$

$$a^2 | b^2 \Rightarrow a | 2b \quad \text{سمت راست ضرب در } 2 \quad \checkmark$$

$$a | b \Rightarrow 2a | 2b \quad \text{سمت راست ضرب در } 2 \quad \checkmark$$

$$a = 3, b = 9 \Rightarrow \frac{3^2}{9} | \frac{9^2}{81} \xrightarrow{\text{لذا}} \frac{3 \times 3}{9} | \frac{9}{9}$$

گزینه (۴) نادرست است؛ برای رد آن مثال نقض ارائه می کنیم:
پس جواب گزینه (۴) است.

ویژگی (۸): سمت چپ رابطه عاد کردن را می توان با مقسوم علیه آن جایگزین کرد. به عبارت دیگر:

$$ab | c \Rightarrow \begin{cases} a | c \\ b | c \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 | 4 \\ 4 | 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 8 | 4 \quad \text{مثال: برای مثال:}$$

ویژگی (۹): طرفین رابطه عاد کردن را می توان در هم ضرب کرد. یعنی:

$$\frac{a}{c} | \frac{b}{d} \Rightarrow ac | bd$$

تکسر این ویژگی در رابطه با جمع، تفریق و تقسیم لزوماً صدق نمی کند.

ویژگی (۱۰) (بسیار مهم): هرگاه عددی دو عدد را بشمارده آن گاه مجموع و تفاضل و حاصل ضرب آن دو عدد را نیز می شمارد.

$$\left. \begin{array}{l} a | b \\ a | c \end{array} \right\} \Rightarrow a | b+c, a | b-c, a | b \times c$$

و به طور کلی هر ترکیب خطی آن دو عدد را می شمارد.

$$a | mb \pm nc \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

نتیجه: اگر $a | b$ آن گاه $a | b + na$

تست

از درستی رابطه $xy | z$ کدام نتیجه را نمی‌توان گرفت؟

- (۱) $x | z - x^2$ (۲) $y | z$ (۳) $x^2 | z^2$ (۴) $y^2 | z^2$

پاسخ: به جای سمت چپ رابطه می‌توانیم مقسوم‌علیه‌های آن را قرار دهیم:

$$xy | z \Rightarrow \begin{cases} y | z & \text{(درستی گزینه ۲)} \\ x | z \xrightarrow{z > x^2} x^2 | z^2 & \text{(درستی گزینه ۳)} \end{cases}$$

از طرفی هم به کمک رابطه $x | z$ و این‌که هر عددی خودش را می‌شمارد داریم:

$$\left. \begin{array}{l} x | z \\ x | x \xrightarrow{\text{سمت راست به توان ۲}} x | x^2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}} x | z - x^2 \quad \text{(درستی گزینه ۱)}$$

برای رد گزینه (۴)، مثال نقض زیر را ارائه می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccc} 9 & \times & 2 \\ x & y & z \end{array} \quad \xrightarrow{\text{لذا}} \quad \begin{array}{ccc} 4 & / & 18 \\ y^2 & & \end{array} \quad \text{(رد گزینه ۴)}$$

پس جواب گزینه (۴) است.

تست

به ازای چند عدد صحیح a ، عدد a دو عدد $4m+3$ و $5m+4$ را عاد می‌کند؟

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه

پاسخ: a دو عدد $4m+3$ و $5m+4$ را می‌شمارد پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} a | 4m+3 \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۵}} a | 20m+15 \\ a | 5m+4 \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۴}} a | 20m+16 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}} a | -1 \Rightarrow a = \pm 1$$

پس دو مقدار صحیح برای a وجود دارد و جواب گزینه (۳) است.

نکته

در تمام مسائل به این سبک هدف حذف متغیر از سمت راست رابطه عاد کردن است، به طوری‌که در سمت راست فقط عدد باقی بماند.

تست

چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد، به طوری‌که حاصل کسر $\frac{5n+17}{n-5}$ یک عدد طبیعی باشد؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) بی‌شمار

پاسخ: برای آن‌که $\frac{5n+17}{n-5}$ عددی طبیعی باشد، باید:

$$\frac{5n+17}{n-5} > 0 \xrightarrow{5n+17 > 0} n-5 > 0$$

اولاً: مثبت باشد، یعنی:

ثانیاً: مخرج، صورت کسر را بشمارد، یعنی $5n+17 \geq n-5$ پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} n-5 | 5n+17 \\ n-5 | n-5 \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۵}} n-5 | 5n-25 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}} n-5 | 42$$

پس از آن‌جایی‌که $n-5 > 0$ است، باید $n-5$ مقسوم‌علیه مثبت ۴۲ باشد، پس داریم:

$n-5$	۱	۲	۳	۶	۷	۱۴	۲۱	۴۲
n	۶	۷	۸	۱۱	۱۲	۱۹	۲۶	۴۷

پس برای ۸ مقدار طبیعی $\{۶, ۷, ۸, ۱۱, ۱۲, ۱۹, ۲۶, ۴۷\}$ حاصل $\frac{5n+17}{n-5}$ عددی طبیعی است؛ پس جواب گزینه (۳) است.

نکته مهم

در حل مسائل به صورت $x-a | f(x)$ ، کافی است رابطه $f(a) | x-a$ را حل کنیم. (چرا که باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ برابر است با $f(a)$)

تست

به ازای چند عدد صحیح n ، حاصل $\frac{7n^2+3n+7}{n-1}$ یک عدد صحیح است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶

پاسخ: برای آن‌که حاصل $\frac{7n^2+3n+7}{n-1}$ عددی صحیح باشد، باید مخرج کسر، صورت آن را بشمارد، یعنی $7n^2+3n+7 \geq n-1$. ریشه عبارت سمت چپ را محاسبه کرده و در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} n-1 &= 0 \Rightarrow n=1 \Rightarrow f(1) = 7(1)^2 + 3(1) + 7 = 17 \\ \Rightarrow n-1 | 17 \Rightarrow n-1 &= \pm 1, \pm 17 \Rightarrow n = 0, \pm 2, \pm 18 \end{aligned}$$

در نتیجه به ازای هر یک از این ۱۲ مقدار، عددی صحیح برای n به دست می‌آید، پس جواب گزینه (۳) است.

تکلیف: اگر ریشه عبارت سمت چپ (مقسوم علیه) عددی صحیح نشده، باز هم ریشه را در عبارت قرار می دهیم و عدد بدست آمده را تا حد امکان ساده می کنیم. حال عبارت سمت چپ باید صورت این کسر را بشمارد.

تست

تعداد جواب های طبیعی معادله $3xy - y - 5x = 13$ در اعداد طبیعی را بیابید.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: در این جا ابتدا y را بر حسب x محاسبه می کنیم:

حال برای آن که x و y اعدادی طبیعی باشند باید:

اولاً: x و y هر دو مثبت باشند
ثانیاً: مخارج کسر، صورت آن را بشمارد، یعنی $3x - 1 \mid 5x + 13$

$3xy - y - 5x = 13 \Rightarrow y(3x - 1) = 5x + 13 \Rightarrow y = \frac{5x + 13}{3x - 1}$

$\frac{5x + 13}{3x - 1} > 0 \Rightarrow \frac{5x + 13}{3x - 1} > 0 \Rightarrow 3x - 1 > 0$

ثانیاً: مخارج کسر، صورت آن را بشمارد، یعنی $3x - 1 \mid 5x + 13$

$3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow f(\frac{1}{3}) = 5(\frac{1}{3}) + 13 = \frac{44}{3} \Rightarrow 3x - 1 \mid 44$

مقسوم علیه های مثبت ۴۴ برابر است با:

پس $(1, 9)$ ، $(4, 3)$ و $(15, 2)$ جواب های طبیعی هستند که برای (x, y) بدست می آید پس جواب گزینه (۴) است.

$3x - 1 = \begin{cases} 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \notin \mathbb{N} & \times \\ 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 9 & \checkmark \\ 4 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \notin \mathbb{N} & \times \\ 11 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 3 & \checkmark \\ 22 \Rightarrow x = \frac{23}{2} \notin \mathbb{N} & \times \\ 44 \Rightarrow x = 15 \Rightarrow y = 2 & \checkmark \end{cases}$

ویژگی (۱۱): اگر عدد a ، عدد b را بشمارد و b نیز c را بشمارد، آن گاه c ، a را می شمارد یعنی:

اثبات (۱۱):

$a \mid b \Rightarrow b = aq$
 $b \mid c \Rightarrow c = bq'$

$c = (aq)q' = a(qq') \Rightarrow a \mid c$

تست

اگر $a \mid 11$ و $a \mid 780$ ، در این صورت برای a ، چند مقدار طبیعی وجود دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۲۴ ۴) ۸

پاسخ: با توجه به رابطه تعدی داریم:

$\begin{cases} 11 \mid a \\ a \mid 780 \end{cases} \xrightarrow{\text{تعدی}} 11 \mid 780$

اما این رابطه هرگز برقرار نیست، پس هیچ مقداری برای a وجود ندارد که هر دو رابطه برقرار باشد. پس جواب گزینه (۲) است.

تست

از درستی رابطه $x^2 - y^2 \mid a - b$ کدام نتیجه گیری نادرست است؟

۱) $x + y \mid a^2 - b^2$ ۲) $x + y \mid a^2 + b^2$ ۳) $x - y \mid a^2 - b^2$ ۴) $x - y \mid a - b$

پاسخ: طبق اتحاد مزدوج داریم:

حالا از رابطه $x^2 - y^2 \mid a - b$ (فرض مسئله) و خاصیت تعدی در رابطه عاد کردن داریم:

رابطه ۱: $x - y \mid x^2 - y^2$
 رابطه ۲: $x + y \mid x^2 - y^2$

حالا از رابطه $x^2 - y^2 \mid a - b$ (فرض مسئله) و خاصیت تعدی در رابطه عاد کردن داریم:

رابطه ۱: $x + y \mid x^2 - y^2$
 رابطه ۲: $x - y \mid x^2 - y^2$

حالا به کمک رابطه گزینه (۴) داریم:

رابطه ۱: $x + y \mid x^2 - y^2$
 رابطه ۲: $x - y \mid x^2 - y^2$

حالا به کمک رابطه گزینه (۴) داریم:

رابطه ۱: $x + y \mid x^2 - y^2$
 رابطه ۲: $x - y \mid x^2 - y^2$

اما برای رد گزینه (۲) داریم:

پس جواب گزینه (۲) است.

ویژگی (۱۲): اگر $a \mid b$ و $b \neq 0$ باشد در این صورت $|a| \leq |b|$ (توجه داریم که $b \neq 0$ است چرا که اگر $b = 0$ باشد همواره $a \mid b$)

نتیجه: اگر $a \mid b$ و $a \mid a$ آن گاه $|a| = |b|$

تکلیف: در بخش پذیری لزوماً ویژگی تقارنی وجود ندارد برای مثال $2 \mid 4$ ولی $4 \nmid 2$

تست

به ازای چند عدد طبیعی n ، رابطه $n^2 + 1 \mid 4n - 2$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: طبق ویژگی شماره (۱۲) داریم:

$$n^2 + 1 \mid 4n - 2 \Rightarrow n^2 + 1 \leq 4n - 2 \Rightarrow n^2 - 4n + 3 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq n \leq 3$$

چون عبارت‌ها برای تمامی n مثبت‌اند از قدرمطلق استفاده نمی‌کنیم.

با جایگذاری ۱، ۲ و ۳ در رابطه اصلی مقادیر $n = 1$ و $n = 3$ قابل قبول می‌باشند و جواب گزینه (۳) است.

اتحاد اول

هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارنده مثبتی به جز یک و خودش نداشته باشد عدد اول نامیده می‌شود. مجموعه اعداد اول را با P نمایش می‌دهیم:

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$$

تکلیف: عددی که اول نباشد را مرکب می‌گوییم.

تکلیف: عدد ۱ نه اول است و نه مرکب.

نکته: اگر p عددی اول باشد $a \mid p$ آن گاه $a = 1$ یا $a = p$

تست

اگر عدد طبیعی a دو عدد $5k + 4$ و $7k + 3$ را عاد کند، آن گاه a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱۱ ۳) ۹ ۴) ۱۳

پاسخ: عدد طبیعی a هر دو عدد $5k + 4$ و $7k + 3$ را می‌شمارد پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} a \mid 7k + 3 \xrightarrow{\text{سخت راست ضرب در ۵}} a \mid 35k + 15 \\ a \mid 5k + 4 \xrightarrow{\text{سخت راست ضرب در ۷}} a \mid 35k + 28 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}} a \mid 13$$

چون ۱۳ عددی اول است و a عددی طبیعی پس $a = 1$ یا $a = 13$ و در نتیجه جواب گزینه (۴) است.

نکته: اگر تجزیه عدد طبیعی n به عوامل اول به صورت $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ باشد، آن گاه تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن برابر است با:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$$

نتیجه: تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح n برابر است با $2(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$

تست

تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۲۷۰۰ کدام است؟

۱) ۲۶ ۲) ۲۷ ۳) ۵۴ ۴) ۶۳

پاسخ: تجزیه ۲۷۰۰ برابر $2^2 \times 3^3 \times 5^2$ می‌باشد پس:

$$\text{تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی } 2700 = (2+1)(3+1)(2+1) = 36$$

و جواب گزینه (۱) است.

بخش‌پذیری و اتحادها

در بخش‌پذیری عبارات جبری، اتحادها نقش زیادی دارند. دو تا از آن‌ها را که کاربردهای بیش‌تری دارند یادآوری می‌کنیم:

(آ) اتحاد مزدوج

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \Rightarrow \begin{cases} a-b \mid a^2 - b^2 \\ a+b \mid a^2 - b^2 \end{cases}$$

(ب) اتحاد چاق و لاغر

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \Rightarrow a-b \mid a^3 - b^3$$

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \Rightarrow a+b \mid a^3 + b^3$$

تست

کدام نتیجه‌گیری لزوماً برقرار نیست؟

۱) $c \mid a-b \Rightarrow c \mid (a^2 - b^2)$ ۲) $c \mid a+b \Rightarrow c \mid a^2 - b^2$ ۳) $c \mid a+b \Rightarrow c \mid a^2 - b^2$ ۴) $c \mid a-b \Rightarrow c \mid a^2 - b^2$

پاسخ: درستی هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

به توان ۲ می‌رسانیم $\xrightarrow{\text{تجدید}} c \mid a^2 - b^2$ ۱) $c \mid a-b \Rightarrow c \mid (a^2 - b^2)$ ۲) $c \mid a+b \Rightarrow c \mid (a^2 - b^2)$ ۳) $c \mid a+b \Rightarrow c \mid (a^2 - b^2)$ ۴) $c \mid a-b \Rightarrow c \mid (a^2 - b^2)$

گزینه (۱)

$$\left. \begin{array}{l} \text{گزینه (۲): } c|a+b \\ a+b|a^2+b^2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} c|a^2+b^2 \checkmark$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{گزینه (۳): } c|a+b \\ a+b|a^2-b^2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} c|a^2-b^2$$

برای رد گزینه (۴) فرض کنیم $c=4$ و $b=2$ و $a=5$ باشد:

$$4|\underbrace{5+2}_8 \xrightarrow{14} 4|\underbrace{5^2-2^2}_{21}$$

پس جواب گزینه (۴) است.

در کتاب حسابان تعمیم‌های اتحاد چاق و لاغر آمده است:
(آ) برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\forall n \in \mathbb{N}, a-b | a^n - b^n$$

پس می‌توان گفت: **نتیجه** اگر $\frac{n}{m}$ عددی طبیعی باشد آن‌گاه:

$$a^m - b^m | a^n - b^n$$

تست عدد $3^{21} - 3^{14}$ بر کدام عدد بخش‌پذیر است؟

- (۱) ۲۳ (۲) ۱۲

پاسخ: ابتدا توان‌های اعداد داده‌شده را یکسان می‌کنیم:

$$3^{21} - 3^{14} = (3^7)^3 - (3^7)^2 = 3^7(3^2 - 1) = 3^7(9 - 1) = 3^7 \cdot 8$$

پس $3^{21} - 3^{14}$ بر ۲۳ و جواب گزینه (۱) است.

$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - b^{n-1})$$

(ب) اگر n عددی زوج باشد آن‌گاه:

$$n = 2k, a+b | a^n - b^n$$

نتیجه اگر $\frac{n}{m}$ عددی زوج باشد آن‌گاه:

$$a^m + b^m | a^n - b^n$$

تست عدد $3^{36} - 3^{36}$ بر کدام یک از اعداد زیر بخش‌پذیر نیست؟

- (۱) ۴۲ (۲) ۳۵

پاسخ: با توجه به نتایج تعمیم اتحادهای چاق و لاغر داریم:

$$\frac{36}{3} = 12 \xrightarrow{12 \text{ زوج است}} \begin{cases} 3^2 - 3^2 | (3^3)^{12} - (3^3)^{12} \Rightarrow 19 | 3^{36} - 3^{36} \\ 3^2 + 3^2 | (3^3)^{12} - (3^3)^{12} \Rightarrow 35 | 3^{36} - 3^{36} \end{cases}$$

$$\frac{36}{4} = 9 \xrightarrow{9 \text{ فرد است}} 3^2 - 3^2 | (3^4)^9 - (3^4)^9 \Rightarrow 65 | 3^{36} - 3^{36}$$

پس جواب گزینه (۱) است.

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

(پ) اگر n عددی فرد باشد آن‌گاه:

$$n = 2k+1; a+b | a^n + b^n$$

نتیجه اگر $\frac{n}{m}$ عددی فرد باشد آن‌گاه:

$$a^m + b^m | a^n + b^n$$

تست به ازای چند عدد n کوچک‌تر از ۵۰ رابطه $5^n + 1 | 126$ برقرار است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

پاسخ: با توجه به این‌که $5^n + 1 = 126$ است برای آن‌که رابطه $5^n + 1 | 126$ درست باشد باید $\frac{n}{3}$ عددی فرد باشد. پس می‌توان نوشت:

$$5^n + 1 | 126 \Rightarrow \frac{n}{3} = 2k+1 \Rightarrow n = 6k+3 \Rightarrow 1 \leq 6k+3 \leq 50 \Rightarrow 0 \leq k \leq 7$$

به ازای هر مقدار صحیح k ، یک مقدار برای n به‌دست می‌آید یعنی ۸ مقدار صحیح کوچک‌تر از ۵۰ داریم که $5^n + 1 | 126$. پس جواب گزینه (۴) است.

۲۴. در اثبات نامساوی $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ به کدام عبارت بدیهی زیر می‌رسیم؟

- (۱) $(x - y)^2 + (x + z)^2 + (z - y)^2 \geq 0$
 (۲) $(x + y - z)^2 \geq 0$
 (۳) $(x + y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \geq 0$
 (۴) $(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y + z)^2 \geq 0$

◀ قسمت دوم، بخش‌پذیری در اعداد صحیح ▶

بخش‌پذیری در اعداد صحیح

۲۵☆. به ازای چند عدد طبیعی n داریم $2 \mid 2n + 2$ ؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۲۶☆. اگر $a \in \mathbb{Z}$ باشد، آن‌گاه بزرگ‌ترین عدد طبیعی که $a^2 - a^3 - a^4 + a^5$ را می‌شمارد، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۱۲ (۴) ۲۴

۲۷☆. اگر $x \mid y^2$ و $y^2 \mid z^2$ ، کدام گزینه در حالت کلی نادرست است؟

- (۱) $x^2 \mid yz^2$ (۲) $x \mid z^2$ (۳) $x^2 \mid z^2$ (۴) $x^2 \mid y^2z^2$

۲۸☆. اگر $a \mid a + 3b$ ، در این صورت عبارت $3ab + 9b^2 + a^2$ بر کدام گزینه بخش‌پذیر است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۲۰ (۳) ۲۵ (۴) ۳۰

۲۹☆. به ازای چند عدد طبیعی n داریم $20 \mid 2n^2 - 3n^2 - 2n$ ؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۳۰. به ازای کدام مقادیر n ، رابطه $2n^2 - n - 1 \mid 1$ برقرار است؟

- (۱) $\{1\}$ (۲) $\{0, 1\}$ (۳) $\{1, \pm \frac{1}{2}\}$ (۴) $\mathbb{Z}$

۳۱☆. به ازای چند عدد صحیح n داریم $2 \mid 2n^2 + n - 2$ ؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۲☆. اگر $a \mid a - b$ ، آن‌گاه داریم:

- (۱) $a \mid a - b$ (۲) $b \mid a - b$ (۳) $a \mid b$ (۴) $a - b \mid b$

۳۳☆. به ازای چند عدد طبیعی و دو رقمی a رابطه $3 - 2a \mid 17$ برقرار است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۳۴☆. تعداد اعداد صحیح و مثبت که هر دو عدد $3a^2 + 8a - 2$ و $3a + 2$ را بشمارد، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۳۵. کدام گزینه درست است؟

- (۱) $a + b \mid (a + b)^2 - 2ab$ (۲) $a + b \mid (a + b)^2 - 3ab^2 - 3ab^2$
 (۳) $a + b \mid (a - b)^2 + 3a^2b - 3ab^2$ (۴) $a + b \mid (a - b)^2 + 2ab$

۳۶. اگر a و b اعداد صحیح فرد باشند، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

- (۱) $8 \mid a^2 + b^2$ (۲) $6 \mid a^2 + b^2 + 4$ (۳) $4 \mid a^2 - b^2$ (۴) $8 \mid a^2b^2$

۳۷☆. اگر $a^2 \mid b^2$ حداکثر مقدار طبیعی n که $b^{2n+2} \mid a^{2n+2}$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۳۸☆. کدام گزینه همواره صحیح نیست؟

- (۱) $a - b \mid a \Rightarrow a - b \mid b^2$ (۲) $ab^2 \mid c \Rightarrow a \mid c \cdot b \mid c$
 (۳) $a^2 \mid b \Rightarrow a^2 \mid b^5$ (۴) $a \mid bc \Rightarrow a \mid b \cdot a \mid c$

اعداد اول

- ۳۹☆ برای چند عدد طبیعی n رابطه $2n+1 \mid 2n^2 - 3n + 3$ برقرار است؟
 (۱) صفر (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۱
- ۴۰☆ چند نقطه با مختصات صحیح و طول طبیعی در معادله $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8x + 3 = 0$ صدق می‌کنند؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶
- ۴۱ اگر رابطه $n^2 \mid \binom{n}{2}$ برقرار باشد، بیش‌ترین مقدار $\binom{n}{2} - 2n^2$ کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۷ (۳) ۱۱ (۴) ۱۵
- ۴۲☆ اگر $a > 1$ و $a \mid 5k+1$ و $a \mid 4k+3$ در این صورت a بر چند عدد اول بخش‌پذیر است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۴۳ اگر p یک عدد اول و $p \mid 3! + p$ برای p چند مقدار متمایز وجود دارد؟
 (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲
- ۴۴☆ عدد $A = 18^x \times 12^{x+1}$ دارای ۷۲ مقسوم‌علیه مثبت است. x کدام است؟
 (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲
- ۴۵☆ تفاضل تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی دو عدد طبیعی $N = 3^a \times 3^b$ و $\frac{N}{36}$ مساوی ۱۴ است. کم‌ترین مقدار N کدام است؟
 (۱) ۱۴۴ (۲) ۲۱۶ (۳) ۲۸۸ (۴) ۴۳۲

اتحادها و عاد کردن

- ۴۶☆ اگر $a-c \mid b+c$ و $a^2 - c^2 \mid b+c$ آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟
 (۱) $c \mid b$ (۲) $c \mid a$ (۳) $b \mid c$ (۴) $a \mid c$
- ۴۷ اگر روابط $(x-2)^2 \mid (x^2 - b^2)$ و $(x-2) \mid (x^2 - 3x + 1)$ برقرار باشند، حاصل $a+b$ کدام است؟
 (۱) ± 4 (۲) ± 3 (۳) ± 2 (۴) ± 1
- ۴۸☆ تعداد عضوهای مجموعه $\{n : 65 \mid 3^n + 1\}$ در مجموعه اعداد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰ کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹
- ۴۹☆ عدد $2^{25} - 3^{21}$ بر کدام یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷
- ۵۰☆ عدد $5^{99} + 3^{92}$ بر کدام عدد بخش‌پذیر است؟
 (۱) ۱۹۸ (۲) ۲۰۶ (۳) ۸ (۴) ۴۴
- ۵۱ $1 - 2^{200}$ بر کدام یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟
 (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۲۱ (۴) ۱۸

قسمت سوم: بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م) -

کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م)

ب.م.م

- ۵۲☆ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک سه عدد ۹۰۰، ۱۶۸۰ و ۱۲۶۰ کدام است؟
 (۱) ۹۰ (۲) ۱۵۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۶۰
- ۵۳☆ ب.م.م دو عبارت $9n+2$ و $11n-5$ کدام است؟
 (۱) ۱ یا ۶۷ (۲) ۳ یا ۶۷ (۳) ۴۵ یا ۱ (۴) ۳ یا ۴۵
- ۵۴☆ به ازای چند عدد طبیعی n ، هر دو عدد $7n+5$ و $11n+2$ مقسوم‌علیه مشترک برابر ۳ دارند؟
 (۱) هیچ عدد (۲) یک عدد (۳) دو عدد (۴) بی‌شمار عدد

۵۵. برای عدد صحیح a ، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک $a-2$ و $a-4$ و a^2-5a-4 کدام است؟

- (۱) ۲ یا ۱ (۲) ۱ یا ۲ (۳) ۱ (۴) ۲

۵۶☆. اگر عدد طبیعی n مضرب ۷ نباشد، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک $21+9n+n^2$ و $7+n$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۱ و ۲ (۳) ۱ و ۵ (۴) ۷

اعداد متوالی

۵۷☆. اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n ، دو عدد $12n+7$ و $5n-2$ نسبت به هم اول نباشند، آن‌گاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد، کدام است؟

(سراسری خارج از کشور ۸۸)

- (۱) ۵۹ (۲) ۶۷ (۳) ۸۳ (۴) ۸۹

۵۸☆. به ازای چند عدد طبیعی و دو رقمی n ، اعداد $4+11n$ و $9+25n$ نسبت به هم اولند؟

(سراسری ۸۹)

- (۱) ۸۶ (۲) ۸۷ (۳) ۸۹ (۴) ۹۰

۵۹☆. در مجموعه اعداد طبیعی اگر $d = (2n^2 - 2n + 6, 3n + 5)$ و $d \neq 1$ باشد، عدد d کدام است؟

(سراسری خارج از کشور ۹۹)

- (۱) ۴۱ (۲) ۴۲ (۳) ۴۷ (۴) ۵۳

۶۰. به ازای اعداد طبیعی $1 \leq n \leq 50$ در چند حالت دو عدد $7+2n$ و $9+5n$ نسبت به هم اولند؟

(سراسری خارج از کشور ۸۷)

- (۱) ۴۷ (۲) ۴۸ (۳) ۴۹ (۴) ۵۰

۶۱☆. به ازای هر عدد طبیعی $n \leq m$ دو عدد $4-7n$ و $9+n$ نسبت به هم اولند. بیش‌ترین مقدار m کدام است؟

- (۱) ۵۷ (۲) ۵۸ (۳) ۶۶ (۴) ۶۷

۶۲. به ازای هر عدد طبیعی $n \leq m$ ، دو عدد $7+2n$ و $3+11n$ نسبت به هم اولند. بیش‌ترین مقدار m کدام است؟

(سراسری خارج از کشور ۸۵)

- (۱) ۳۵ (۲) ۳۷ (۳) ۳۹ (۴) ۴۰

۶۳☆. اگر n عدد طبیعی و دو عدد $5-n$ و $4+n$ دارای مقسوم‌علیه مشترک غیر ۱ باشند، تعداد اعداد دو رقمی n کدام است؟

(سراسری ۸۵)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۴. چه تعداد از عبارتهای زیر نادرست است؟

(برگرفته از کتاب درسی)

(آ) $1 = (2a+1)(2a+3)$ (ب) $1 = (a+4)(a+5)$

(پ) $1 = (3a+2)(3a+4)$ (ت) $2 = (3a+2)(3a+4)$

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۶۵. اگر a عددی تکیه‌رقمی و طبیعی و $1 = (a+1)a$ باشد، بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای a کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

ویژگی‌های بسم

۶۶☆. اگر دو عدد a و 90 نسبت به هم اول باشند، بزرگ‌ترین عددی که همواره $1 - a^2 = A$ را می‌شمارد کدام است؟

- (۱) ۲۴۰ (۲) ۲۸۸ (۳) ۳۲۴ (۴) ۴۸۰

۶۷☆. اگر $3^m - 16^n$ بر 1023 بخش‌پذیر باشد، کم‌ترین مقدار m کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۶۸☆. اگر اعداد صحیح b و a چنان باشند که $(6b, 6a) + (a^2, b^2) = 280$ ، آن‌گاه (a, b) کدام است؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۲۲ (۳) ۱۶ (۴) ۱۴

۶۹. اگر $(a^5, 243b^5) = (a^5, 36(6a^2, 54b^2))$ باشد، آن‌گاه (a, b) کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۲ (۳) ۶ (۴) ۳

۷۰☆. اگر $(a^2, b^2) = (-a, b) + 12$ باشد، آن‌گاه $(3a^2, 3b^2)$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۲۷ (۳) ۴۸ (۴) ۷۲

۷۱. اگر $a^2 - b^2 \mid (a, b)$ ، آن‌گاه $a - b$ کدام می‌تواند باشد؟ $((a, b) \neq 1)$

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۲۵ (۴) ۳۳

کسم و ویژگی‌های آن

۷۲☆. اگر $a = 2^2 \times 5^2 \times 7$ باشد، چند عدد چهار رقمی داریم که $[a, b] = 2^2 \times 5^2 \times 7^2$ ؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

معادله سیاله

- ۲۳۰☆ به ازای کدام مقدار n معادله سیاله $60x + 84y = 5n - 1$ در مجموعه $\mathbb{Z}$ دارای جواب است؟
 (۱) ۲۴ (۲) ۲۶ (۳) ۲۳ (۴) ۲۵
- ۲۳۱ معادله $8x + 12y = a$ به ازای کدام مقدار a در مجموعه $\mathbb{Z}$ جواب دارد؟
 (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸
- ۲۳۲☆ به ازای کدام عدد طبیعی n معادله خطی $22x + 39y = 2n + 1$ در مجموعه $\mathbb{Z}$ جواب دارد؟
 (۱) ۲۹ (۲) ۲۳ (۳) ۲۷ (۴) ۴۱
- ۲۳۳ اگر معادله سیاله $ax + 6y = 1$ فاقد جواب باشد، کدام معادله زیر قطعاً جواب دارد؟
 (۱) $(a+1)x + 6y = 1$ (۲) $(2a+1)x + 6y = 1$ (۳) $(3a+1)x + 6y = 1$ (۴) $(6a+1)x + 6y = 1$
- ۲۳۴☆ معادله $1 = (9n+7)x + (5n+k)y$ به ازای تمام مقادیر طبیعی n ، در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب است. k کدام می‌تواند باشد؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

حل معادله سیاله

- ۲۳۵☆ معادله سیاله خطی $15x + 12y = 1050$ در مجموعه اعداد طبیعی چند جواب دارد؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
- ۲۳۶ معادله سیاله خطی $7x + 5y = 130$ در مجموعه اعداد طبیعی چند جواب دارد؟
 (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲
- ۲۳۷☆ معادله سیاله $11x + 22y = 90$ چند جواب صحیح با شرط $|y| < 50$ دارد؟
 (۱) ۱۰ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۷
- ۲۳۸ معادله سیاله $7x + 21y = 28$ چند جواب صحیح در بازه $(-20, 20)$ دارد؟
 (۱) ۱۵ (۲) ۱۳ (۳) ۱۱ (۴) ۹
- ۲۳۹☆ اعداد صحیح a و b در معادله $15a + 22b = 12$ صدق می‌کند. باقی‌مانده تقسیم عدد b بر ۱۵ کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۹
- ۲۴۰ مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی سترگمی x که در معادله $57x - 87y = 342$ صدق کند، کدام است؟
 (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸
- ۲۴۱☆ معادله سیاله $9x + 13y = 725$ در مجموعه اعداد طبیعی چند دسته جواب دارد؟
 (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶
- ۲۴۲ معادله $4x - 5y = 8$ چند دسته جواب طبیعی دارد، که مجموع هر دسته جواب از ۳۰ بیش‌تر نباشد؟
 (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) صفر
- ۲۴۳☆ اگر $221x + 357y = (2210, 357)$ باشد، تعداد اعداد طبیعی دو رقمی x کدام است؟
 (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷
- ۲۴۴☆ اگر $357x + 629y = (2570, 629)$ ، آن‌گاه کوچک‌ترین عدد مثبت $x + y$ کدام است؟
 (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳
- ۲۴۵ معادله سیاله $25x + 12y = 1110$ بر روی مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ چند زوج جواب دارد؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶
- ۲۴۶☆ برای خرید کتاب به قیمت ۷۵۰۰ تومان به تعداد A بن دویست تومانی و B بن یکصد و پنجاه تومانی پرداخت نمودیم. حداقل $A + B$ کدام است؟
 (۱) ۳۵ (۲) ۳۶ (۳) ۳۷ (۴) ۳۸
- ۲۴۷☆ قیمت هر واحد از دو نوع کالای متمایز به ترتیب ۲۲۰ و ۱۴۰ تومان است. با مبلغ ۱۹۰۰۰ تومان، به چند طریق می‌توان از این دو نوع کالا، خریداری کرد؟
 (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳
- ۲۴۸ به چند طریق می‌توان با ۳۷۰۰ ریال تمبرهای ۱۵۰ و ۲۵۰ ریالی خرید؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶
- ۲۴۹ کم‌ترین تعداد تمبر لازم برای بستنای که نیاز به ۸۵۰ ریال تمبر دارد با تمبرهای ۹۰ و ۵۰ ریالی کدام است؟
 (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

(مسئله ۸۹)

(مسئله ۸۸ از کشور ۹۸)

(مسئله ۹۵)

(مسئله ۹۰)

(مسئله ۸۷ از کشور ۸۷)

(مسئله ۸۴)

(مسئله ۹۸)

(مسئله ۹۱)

۲۸

از آنجایی که $a + 2b \mid 25$ پس داریم:

$$\begin{aligned} a + 2b &= 25q \xrightarrow{\text{توان } 2} a^2 + 4b^2 + 4ab = 25q^2 \\ \xrightarrow{+25ab} a^2 + 4b^2 + 4ab + 25ab &= 25q^2 + 25ab \\ \Rightarrow a^2 + 29ab + 4b^2 &= 25(q^2 + ab) \end{aligned}$$

پس $a^2 + 4b^2 + 29ab$ مضرب ۲۵ است.

۲۹

نکته: اگر $f(n) \mid f(n) \cdot 0$ آنگاه $f(n) = 0$

$$0 \mid 2n^2 - 2n - 2 \Rightarrow 2n^2 - 2n - 2 = 0 \Rightarrow n(2n^2 - 2n - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 0 \notin \mathbb{N} \times \\ 2n^2 - 2n - 2 = 0 \xrightarrow{\Delta=25} \begin{cases} n = \frac{2+5}{2} = 2 \in \mathbb{N} \checkmark \\ n = \frac{2-5}{2} = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{N} \times \end{cases} \end{cases}$$

پس فقط یک عدد طبیعی برای n داریم.

۳۰

نکته: هر عددی صفر را می‌شمارند $\forall a \in \mathbb{Z} : a \mid 0$

می‌دانیم برای هر مقدار صحیح a رابطه $a \mid 0$ برقرار است، پس n هر مقدار صحیحی می‌تواند باشد.

۳۱

نکته: اگر $a \mid 1$ آنگاه $a = \pm 1$

می‌دانیم اگر $f(n) \mid f(n) \pm 1$ آنگاه $f(n) = \pm 1$ است، پس داریم:

$$\begin{aligned} 2n^2 + n - 2 \mid 1 &\Rightarrow \begin{cases} 2n^2 + n - 2 = 1 \Rightarrow 2n^2 + n - 3 = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \checkmark \\ n = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \times \end{cases} \\ 2n^2 + n - 2 = -1 \Rightarrow 2n^2 + n - 1 = 0 \\ \Rightarrow (2n-1)(n+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -1 \checkmark \\ n = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \times \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

پس دو مقدار صحیح برای n داریم.

۳۲

نکته: اگر $a \mid b$ و $a \mid c$ آنگاه برای هر $m, n \in \mathbb{Z}$

داریم $a \mid mb + nc$ (هر ترکیب خطی b و c را عاد می‌کند)

و به طور ویژه $a \mid b + c$ و $a \mid b - c$

نکته: هر عدد صحیح خودش را عاد می‌کند، به عبارت دیگر برای هر عدد صحیح a داریم $a \mid a$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} &\text{از هم کم می‌کنیم: } a - b \mid a - b \\ &\text{هر عدد خودش را می‌شمارد: } a - b \mid a \end{aligned} \right\} \Rightarrow a - b \mid (a - b) - a \\ \Rightarrow a - b \mid -b \Rightarrow a - b \mid b \end{aligned}$$

(برای رد سایر گزینه‌ها، $a = 3$ و $b = 2$ را در نظر بگیرید)

۲۵

تعریف: عدد صحیح a را بر عدد صحیح و ناصفر b بخش‌پذیر گوئیم:

هرگاه عددی صحیح مانند q چنان یافت شود که $a = bq$

* می‌توانیم بنویسیم $a \mid b$ و بخوانیم a را عاد می‌کند.

* a مضرب b است (b مقسوم‌علیه a است).

برای آن‌که $4 \mid 2n + 2$ باید $2n + 2$ مقسوم‌علیه ۴ باشد، یعنی:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 2n+2 & -1 & 1 & -2 & 2 & -4 & 4 \\ \hline 2n & -3 & -1 & -4 & 0 & -6 & 2 \\ \hline +2 & n & -3 & -1 & -2 & 0 & -3 \end{array}$$

یک مقدار طبیعی برای n وجود دارد.

۲۶

نکته: ۱- حاصل ضرب هر دو عدد متوالی مضرب ۲ است.

۲- حاصل ضرب هر سه عدد متوالی مضرب ۶ است.

۳- حاصل ضرب هر n عدد متوالی مضرب $n!$ است.

با تجزیه عبارت داده‌شده در سؤال داریم:

$$\begin{aligned} a^5 + a^4 - a^3 - a^2 &= a^2(a^3 + a^2 - a - 1) = a^2(a+1)(a^2 - 1) \\ &= a^2(a+1)(a-1)(a+1) \\ &= a^2(a+1)^2(a-1) \end{aligned}$$

اما عبارت داده‌شده را می‌توان به صورت زیر نیز بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} a(a+1) \times (a-1)a(a+1) \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ \text{حاصل ضرب دو عدد متوالی مضرب ۲ است} \quad \text{حاصل ضرب سه عدد متوالی مضرب ۶ است} \end{aligned}$$

در نتیجه عبارت داده‌شده مضرب ۱۲ است.

۳۷

نکته: برخی ویژگی‌های مهم عاد کردن:

$$\begin{aligned} ۱) a \mid b &\Rightarrow \begin{cases} a \mid b^m \\ a \mid mb \end{cases} \\ ۲) a \mid b &\Leftrightarrow a^n \mid b^n \\ ۳) \forall n \geq m &\Rightarrow a^m \mid a^n \\ ۴) \left. \begin{aligned} a \mid b \\ b \mid c \end{aligned} \right\} &\Rightarrow a \mid c \quad (\text{خاصیت تعدی}) \end{aligned}$$

به کمک ویژگی تعدی در رابطه عاد کردن به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} x \mid y^2 &\xrightarrow{\text{توان } 2} x^2 \mid y^4 \\ y^3 \mid z^2 &\xrightarrow{\text{توان } 3} y^9 \mid z^6 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} x^2 \mid yz^2 \quad (\text{درستی گزینه ۱}) \\ \left. \begin{aligned} x \mid y^2 &\xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در } y} x \mid y^3 \\ y^2 \mid z^2 &\xrightarrow{\text{تعدی}} x \mid z^2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} x \mid z^2 \quad (\text{درستی گزینه ۲}) \\ \left. \begin{aligned} x \mid y^2 &\xrightarrow{\text{توان } 3} x^3 \mid y^6 \\ y^3 \mid z^2 &\xrightarrow{\text{توان } 2} y^6 \mid z^4 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} x^3 \mid z^4 \quad (\text{درستی گزینه ۳}) \end{aligned}$$

پس گزینه (۴) نادرست است.

$$x = 16, y = 4, z = 8$$

مثال نقض گزینه‌ها:

(نهایی - فرماد ۸۷)

(د) اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{4}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

(نهایی - دی ۹۰)

(ذ) اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، درستی رابطه $x^x + y^y \geq x^y + y^x$ را ثابت کنید.

(ر) اگر a و b اعداد حقیقی و مثبت باشند، نامساوی $a^x + b^x \geq ab(a+b)$ را اثبات کنید.

(ز) با فرض اینکه a و b دو عدد حقیقی غیرصفر و هم‌علامت هستند، حکم $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ را اثبات کنید.

(س) اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، حکم $a^5 + b^5 > a^6b + b^6a$ را ثابت کنید.

قسمت دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

۲۱. جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

(آ) اعداد و هر عددی را می‌شمارند.

(ب) اگر عددی ۱ یا ۱- را بشمارد آن‌گاه آن عدد برابر است.

(پ) اگر $a \mid n$ آن‌گاه است.

(ت) برای n های ، رابطه $a+b \mid a^n - b^n$ برقرار است.

(ث) اگر p عددی اول باشد و $a \mid p$ آن‌گاه یا

۲۲. درستی یا نادرستی هر یک از عبارات‌های زیر را مشخص کنید.

(آ) فقط به ازای اعداد مثبت $n^2 + 1 = 0$

(ب) تنها عددی که دقیقاً دو مقسوم‌علیه دارد ۱ می‌باشد.

(پ) اگر $a+b \mid 2$ آن‌گاه $a-b \mid 2$

(ت) اگر $a+b \mid a$ آن‌گاه $a+b \mid b$

۲۳. ثابت کنید اگر $a \mid b$ آن‌گاه $a \mid -b$ ، $-a \mid b$ ، $a \mid -b$ ، $-a \mid -b$

۲۴. ثابت کنید اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b نیز عدد c را بشمارد، آن‌گاه عدد a عدد c را می‌شمارد.

۲۵. موارد زیر را ثابت کنید.

(آ) $\forall m, n \in \mathbb{N}; m \leq n \Rightarrow a^m \mid a^n$

(ب) $(k \neq 0), (k \in \mathbb{Z}), a \mid b \Leftrightarrow ka \mid kb$

۲۶. موارد زیر را اثبات کنید.

(آ) $a \mid b \Rightarrow a \mid b^n$

(ب) $(b \neq 0), a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$

(پ) $a \mid b, b \mid a \Rightarrow a = \pm b$

۲۷. ثابت کنید هرگاه عددی، دو عدد را بشمارد، آن‌گاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

۲۸. موارد زیر را ثابت کنید.

(آ) $a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n$

(ب) $a \mid b, c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$

(پ) $a \mid b, a \mid c \Rightarrow a \mid mb \pm nc$

۲۹. موارد زیر را در صورت امکان اثبات کنید و یا با ارائه مثال نقض آن‌ها را رد کنید.

(آ) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند.

(ب) $a \mid b, c \mid d \Rightarrow a+c \mid b+d$

(پ) $(a \neq b), a, b \in \mathbb{P} \Rightarrow (a, b) = 1$

(ت) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند.

(ث) $(m, n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z}) m \leq n, a \mid b \Rightarrow a^m \mid b^n$

۳۰. اگر a عددی صحیح و مخالف صفر و اعداد $5n+6$ و $9n+11$ بر a بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید $a = \pm 1$ است.
۳۱. اگر $a > 1$ و $a \mid 7k+8$ و $a \mid 7k+5$ ثابت کنید a عددی اول است.
۳۲. عدد طبیعی a ، دو عدد $2n^2+11n+11$ و $2n+3$ را می‌شمارد. مقدار a را به‌دست آورید.
۳۳. اگر $a \mid 3$ و $c \mid b+7$ باقی‌مانده تقسیم $ab-17$ بر c چقدر است؟
۳۴. اگر a و b دو عدد صحیح باشند و $23 \mid 3a-8b$ آن‌گاه $23 \mid 11a+9b$ را ثابت کنید.
۳۵. اگر $9 \mid 7k+2$ به طوری که k عددی صحیح باشد، $9k^2-3k-20$ را 81 ثابت کنید.
۳۶. به ازای چند عدد طبیعی n ، رابطه $8n+9 \mid n+3$ برقرار است؟

----- قسمت سوم: بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م) - کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) -----

۳۷. جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
(ا) ب.م.م دو عدد 48 و 84 برابر است.
(ب) اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \mid a$ آن‌گاه ب.م.م p و a برابر است.
(پ) ک.م.م دو عدد 18 و 22 برابر است.
(ت) اگر a و b نسبت به هم اول باشند، در این صورت ک.م.م آن‌ها برابر است.
۳۸. درستی یا نادرستی هر یک از جملات زیر را مشخص کنید.
(ا) اگر $b \mid a$ آن‌گاه $a \mid b$ و $(a, b) = a$ و $[a, b] = b$
(ب) اگر a عددی زوج باشد $(a, a+2) = 2$
(پ) اگر a عددی فرد باشد $[a-1, a+1] = a^2-1$
۳۹. اگر a و b دو عدد صحیح و $(a^2, b^2) + (a, b) = 280$ باشد، آن‌گاه حاصل (a, b) را به‌دست آورید.
۴۰. اگر a و b اعداد مثبت باشند، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و $ab+1$ را به‌دست آورید.
۴۱. اگر $d = (\Delta a + 4, 2a + 3)$ آن‌گاه مقادیر ممکن برای d را به‌دست آورید.
۴۲. به ازای چند عدد طبیعی و دو رقمی n ، اعداد $25n+9$ و $11n+4$ نسبت به هم اول‌اند؟
۴۳. اگر $d = (8a + 6, 9a - 4)$ آن‌گاه d دارای چند مقدار متمایز است؟
۴۴. اگر a عددی صحیح و p عددی اول و $p \mid a$ ثابت کنید $(p, a) = 1$
۴۵. با استفاده از تعاریف ب.م.م و ک.م.م موارد زیر را ثابت کنید.
(ا) $a \mid b \Rightarrow (a, b) = a$ و $[a, b] = b$
(ب) $a \mid b \Rightarrow [a, b] = b$
۴۶. اگر $a \mid b$ آن‌گاه حاصل عبارت $((a^2, b^2), [a, b])$ را به‌دست آورید.
۴۷. حاصل عبارت $[(a^2, a), (a, b)]$ را به‌دست آورید.
۴۸. حاصل عبارت $(a, [a, b]) - (a, [a, b])$ را به‌دست آورید.
۴۹. حاصل هر یک از موارد زیر را به‌دست آورید. $(a, b \in \mathbb{Z})$
(ا) $(2a+2, 4a+3)$
(ب) $[(a^5, a^9), a^6]$
(پ) $(30b^7, 2b)$
(ت) $([b^7, b], b^7)$

۲۳

$$a|b \xrightarrow{a|mb} a|(-1) \times b \Rightarrow a|-b$$

$$-a|a, a|b \xrightarrow{\text{تعدی}} -a|b$$

$$a|b \Rightarrow (-1) \times a|(-1) \times b \Rightarrow -a|-b$$

۲۴

اثبات رابطهٔ معادل به صورت زیر است:

$$a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$$

$$a|b \Rightarrow b=aq \quad (۱)$$

$$b|c \Rightarrow c=bq' \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲) \times (۱)} c=aqq' \xrightarrow{qq'=q''} c=aq'' \Rightarrow a|c$$

۲۵

$$a^n = a^m \times a^{n-m} \Rightarrow a^n = a^m \times q$$

$$\Rightarrow a^m | a^n \quad (m, n \in \mathbb{N}, m \leq n)$$

(پ)

$$\left\{ \begin{array}{l} a|b \Rightarrow b=aq \xrightarrow{\times k} kb=kaq \Rightarrow ka|kb \\ ka|kb \Rightarrow kb=kaq \xrightarrow{\div k} b=aq \Rightarrow a|b \end{array} \right. \quad (k \neq 0, k \in \mathbb{Z})$$

۲۶

(۱)

$$\left. \begin{array}{l} a|b \\ b|b^n \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} a|b^n$$

(پ)

$$a|b \Rightarrow a=bq, b \neq 0 \Rightarrow q \neq 0 \xrightarrow{q \in \mathbb{Z} - \{0\}} 1 \leq |q|$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین را در } a} |a| \times 1 \leq |a| |q|$$

$$\Rightarrow |a| \leq |aq| \xrightarrow{b=aq} |a| \leq |b|$$

(پ)

$$\left. \begin{array}{l} a|b \Rightarrow |a| \leq |b| \\ b|a \Rightarrow |b| \leq |a| \end{array} \right\} \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$$

۲۷

$$a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c$$

اثبات رابطهٔ فوق به صورت زیر است:

$$\left. \begin{array}{l} a|b \Rightarrow b=a \times q \\ a|c \Rightarrow c=a \times q' \end{array} \right\} \Rightarrow b \pm c = a(\underbrace{q \pm q'}_{q''})$$

$$\Rightarrow b \pm c = aq'' \Rightarrow a|b \pm c$$

۲۸

(۱)

$$a|b \Rightarrow b=aq \Rightarrow b^n = a^n q^n$$

$$\xrightarrow{q^n = q'} b^n = a^n q' \Rightarrow a^n | b^n$$

(پ)

$$\left. \begin{array}{l} a|b \Rightarrow b=aq \\ c|d \Rightarrow d=cq' \end{array} \right\} \Rightarrow b \times d = (a \times c)(\underbrace{q \times q'}_{q''})$$

$$\Rightarrow b \times d = a \times c \times q'' \Rightarrow ac|bd$$

(پ)

$$\left. \begin{array}{l} a|b \Rightarrow a|mb \\ a|c \Rightarrow a|nc \end{array} \right\} \xrightarrow{a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c} a|mb \pm nc$$

۲۹

(۱) درست است اثبات اگر a و $a+1$ اعداد صحیح متوالی باشند آن گاه:

$$(a, a+1) = d \Rightarrow \begin{cases} d|a \\ d|a+1 \end{cases} \xrightarrow{-} d|(a+1) - a$$

$$\Rightarrow d|1 \xrightarrow{d>0} d=1$$

$$۲|۲, ۲|۴ \rightarrow ۲+۲/۲+۴$$

(پ) نادرست. مثال نقض:

(۲)

$$\frac{a}{b^r} + \frac{b}{a^r} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{a^r + b^r}{a^r b^r} \geq \frac{a+b}{ab}$$

$$\Leftrightarrow a^r + b^r \geq ab(a+b) \Leftrightarrow a^r + b^r - a^r b - ab^r \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^r(a-b) - b^r(a-b) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)(a^r - b^r) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a-b)(a+b) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) \geq 0$$

$a, b \in \mathbb{R}^+$ بنابراین نامساوی فوق بدیهی است.

(۳)

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{4}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{b}} \geq \frac{4}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 4\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + 2\sqrt{ab} + b \geq 4\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

(بدیهی است)

(۴)

$$x^r + y^r \geq x^r y + xy^r \Leftrightarrow x^r + y^r - x^r y - xy^r \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^r(x-y) - y^r(x-y) \geq 0 \Leftrightarrow (x^r - y^r)(x-y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^r + xy^{r-1} + y^2 + \dots + xy^{r-1} + y^r)(x-y) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2(x^r + xy^{r-1} + y^2 + \dots + xy^{r-1} + y^r) \geq 0$$

با توجه به این که X و Y دو عدد حقیقی و مثبت هستند نامساوی فوق بدیهی است.

(۵)

$$a^r + b^r \geq ab(a+b) \Leftrightarrow (a+b)(a^r - ab + b^r) \geq ab(a+b)$$

$$\xrightarrow{a+b>0} a^r - ab + b^r \geq ab \Leftrightarrow a^r - 2ab + b^r \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

همواره درست

(۶)

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4 \Leftrightarrow 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 \geq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^r + b^r}{ab} \geq 2 \xrightarrow{ab>0} a^r + b^r \geq 2ab$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

چون به یک رابطهٔ بدیهی رسیدیم می توان گفت حکم برقرار است.

(۷)

$$a^4 + b^4 > a^2 b + b^2 a \Leftrightarrow a^4 + b^4 - a^2 b - b^2 a > 0$$

$$\Leftrightarrow a^2(a-b) - b^2(a-b) > 0 \Leftrightarrow (a-b)(a^2 - b^2) > 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) > 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a-b)(a+b)(a^2 + b^2) > 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)(a^2 + b^2) > 0$$

سمت چپ نامساوی همواره درست است پس چون به یک رابطهٔ بدیهی رسیدیم می توان گفت حکم برقرار است.

۲۹

(۱) $-1, 1$ (ب) ± 1 (پ) $a=0$

(۲) طبیعی زوج $|a|=p, |a|=1$

۳۰

(۱) نادرست (برای هر عدد حقیقی $a \neq 0$ پس برای هر $n \in \mathbb{R}$ $(n^2 + 1) \neq 0$)

(ب) نادرست (هر عدد صحیحی مانند a ، بر اعداد صحیح 1 و -1 و خود عدد a بخش پذیر است. پس برای آن که عدد a فقط دو مقسوم علیه داشته باشد باید $a = \pm 1$)

(پ) درست $(a+b) \mid 2$ ، پس $a+b$ زوج است. پس هر دوی a و b یا زوج هستند یا هر دو فرد. پس $a-b$ زوج است.)

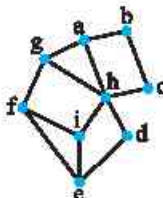
(۲) درست

$$\left. \begin{array}{l} a+b|a \\ a+b|a+b \end{array} \right\} \xrightarrow{-} a+b|b$$

سؤالات امتحان درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال دوازدهم دوره دوم متوسطه	امتحان خرداد ۹۸	آزمون شماره (۱)	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست.	۱
۲	در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. (آ) یک گراف کامل ۸ رأسی، یال دارد. (ب) در یک گراف از مرتبه ۱۰ با $\Delta = 3$ حداقل رأس برای احاطه همه رئوس لازم است. (پ) اگر در گراف G از مرتبه p داشته باشیم $\gamma(G) = 1$ در این صورت $\Delta(G)$ برابر است. (ت) مجموع درایه‌های سطر اول یک مربع لاتین ۵ در ۵ برابر با است.	۲
۳	اگر باقی‌مانده تقسیم III و II بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $5II - 3III$ بر ۱۳ را بدست آورید.	۱/۵
۴	اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد، در این صورت با استفاده از هم‌نهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟	۱
۵	با تبدیل معادله سیاله خطی $5x + 2y = 18$ به معادله هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله را بیابید.	۱/۵
۶	شکل مقابل نمودار گراف G می‌باشد. (آ) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید. (ب) مجموعه $N_G(b)$ را بنویسید. (پ) مجموع درجه‌های رأس‌های گراف $\bar{G}$ را مشخص کنید.	۱/۵
۷	گراف C_p را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید. (آ) یک مجموعه احاطه‌گر ۴ عضوی بنویسید. (ب) دو مجموعه احاطه‌گر مینیمم متمایز بنویسید.	۱/۵
۸	(آ) ثابت کنید هر مجموعه احاطه‌گر دلخواه غیرمینیمال را می‌توان با حذف برخی از رئوسش به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال تبدیل کرد؟ (ب) در گراف روبه‌رو یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۵ عضوی را مشخص کنید.	۱/۵
۹	(آ) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد. (ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.	۱
۱۰	با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟	۱
۱۱	۶ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۵ دانش‌آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم در یک ردیف قرار گیرند، به طوری که: (آ) به صورت یک در میان قرار بگیرند. (ب) همواره دانش‌آموزان یازدهم کنار هم باشند. (پ) یک دانش‌آموز خاص یازدهم و یک دانش‌آموز خاص دوازدهم در کنار هم باشند.	۱/۵
۱۲	تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 10$ با شرط $x_1 \geq 4$ و $x_2 \geq 0$ را محاسبه کنید.	۱
۱۳	اگر سه دوست هم سبزه و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها به گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک بار مورد استفاده قرار بگیرد چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟	۱/۵
۱۴	در بین اعداد ۱ تا ۹۰ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشند.	۱/۲۵
۱۵	ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول به تحصیل باشند، لایزال ۷ نفر از آن‌ها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.	۱/۲۵
	جمع نمره	۲۰

سؤالات امتحان درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال دوازدهم دوره دوم متوسطه	امتحان شهریور ۹۸	آزمون شماره (۲)	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید. (ا) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است. (ب) برای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱، عدد $3^n - 1$ اول است.	۰/۵
۲	جاهای خالی را پر کنید. (ا) $[a, b] = c$ اگر و تنها اگر دو شرط مقابل برقرار باشند: (ب) گراف G را می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. (پ) مقدار $\gamma(C_8)$ به ازای هر عدد طبیعی $n > 2$ برابر است با: (ت) هرگاه $(kn+1)$ کیبوتر یا بیش‌تر در لانه قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل کیبوتر در آن قرار گرفته است.	۱/۵
۳	برای هر سه عدد حقیقی x, y, z ثابت کنید: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$	۱/۵
۴	اگر باقی‌مانده تقسیم n بر دو عدد ۶ و ۵ به ترتیب ۳ و ۲ باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد n را بر ۳۰ بیابید.	۱/۵
۵	باقی‌مانده تقسیم $19 + (27)^7$ را بر ۱۴ بیابید.	۱/۵
۶	با تبدیل معادله سیاله خطی $29000 = x + 5000y$ به معادله همبستگی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله را بیابید.	۱/۵
۷	گراف G با مجموعه رأس‌های $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعه یال‌های زیر را در نظر بگیرید: $E = \{ab, bc, cd, ed, ae, cf, ef\}$ (ا) نمودار گراف را رسم کنید. (ب) $N_G[b]$ را مشخص کنید. (پ) یک مسیر به طول ۵ از b به d بنویسید.	۲
۸	یک گراف ۵ رأسی غیرتهی K -منتظم رسم کنید، به طوری‌که: (ا) K بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد. (ب) K کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.	۱
۹	(ا) گراف P_8 را رسم کنید. (ب) یک γ -مجموعه از آن را مشخص کنید. (پ) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۴ عضوی از آن را مشخص نمایید.	۱/۵
۱۰	در گراف شکل مقابل یک مجموعه احاطه‌گر غیرمینیمال انتخاب کنید؛ سپس با حذف برخی از رأس‌ها، آن را به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال تبدیل نمایید.	۱
		
۱۱	۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف به‌چینیم به طوری‌که: (ا) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند. (ب) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند. (پ) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.	۱/۵
۱۲	تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_p = 12$ با شرط $x_1 \geq 2$ و $x_2 \geq 4$ را محاسبه کنید.	۱
۱۳	قرار است چهار مدرس T_1, T_2, T_3, T_4 در چهار جلسه متوالی در چهار کلاس C_1, C_2, C_3, C_4 به گولهای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند، برای این منظور برنامه‌ریزی نمایید.	۱
۱۴	چند عدد طبیعی مانند n به طوری‌که $1 \leq n \leq 350$ وجود دارد که بر هیچ‌یک از اعداد ۴ و ۶ بخش‌پذیر نباشد؟	۱/۵
۱۵	۱۳ نقطه درون یک مستطول 6×8 قرار دارند؛ نشان دهید که حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارند که فاصله آن‌ها از هم کم‌تر از $\sqrt{8}$ باشد.	۱/۵
۲۰	جمع نمره	

سؤالات امتحان دروس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال دوازدهم دوره دوم متوسطه	امتحان خرداد ۹۹	آزمون شماره (۳)	

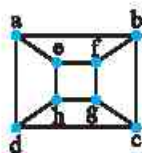
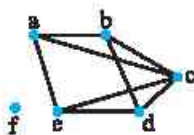
ردیف	سؤالات	نمره
۱	گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید. (ا) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. (ب) اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است.	۱/۷۵
۲	اگر باقی ماندۀ تقسیم عدد ۸ بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی ماندۀ تقسیم عدد $2m+3$ بر ۸ را به دست آورید.	۱/۲۵
۳	اگر $n \in \mathbb{N}$ ، $n 7k+7$ ، $n 7k+6$ ، ثابت کنید $n=1$ یا $n=5$	۱
۴	باقی ماندۀ تقسیم 7^{30} بر ۱۵ را به دست آورید.	۱/۵
۵	معادله هم نهشتی $5x=2$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۱/۲۵
۶	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (ا) مجموع درجه های رأس های هر گراف تعداد یال ها است. (ب) در یک گراف k -منتظم، ماکزیمم درجه رأس برابر با است. (پ) در بین تمام مجموعه های احاطه گر گراف G ، مجموعه یا مجموعه های احاطه گری که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه گر گراف G می نامیم. (ت) یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از رأس هایش، دیگر احاطه گر نباشد، احاطه گر می نامیم.	۱
۷	گراف G را در نظر گرفته و به سؤالات زیر پاسخ دهید. (ا) $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید. (ب) یک دور به طول ۴ در این گراف مشخص کنید. (پ) یک مسیر به طول ۳ و یک مسیر به طول ۴ از a به c بنویسید.	۱/۲۵
۸	در گراف G ، درجه رأس ۷ برابر ۹ است و درجه رأس ۷ در گراف $\overline{G}$ برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص کنید.	۰/۷۵
۹	گرافی ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید، به طوری که: (ا) مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد. (ب) بیش از یک مجموعه احاطه گر با اندازه ۲ داشته باشد.	۱
۱۰	عدد احاطه گری گراف مقابل را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.	۱/۲۵
۱۱	با ارقام عدد ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت؟	۰/۷۵
۱۲	به چند طریق می توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد، اگر بخواهیم از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم.	۱/۲۵
۱۳	مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و با اعمال یک جایگشت بر روی 1020304 یک مربع لاتین جدید به دست آورید.	۱

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

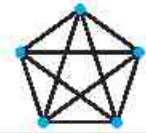
راهنمای تصحیح سؤالات امتحان دروس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی و فیزیک	سال دوازدهم دوره دوم متوسطه																
امتحان خرداد ۹۹		آزمون شماره (۳)																	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره																	
۱	(ا) نادرست (۰/۱۲۵) $\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^0, \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin \mathbb{Q}^0$ (۰/۱۲۵) (ب) درست (۰/۱۲۵) $(2k+1)^2 - 1 = \underbrace{4k^2 + 4k + 1}_{(۰/۱۲۵)} - 1 = \underbrace{4k(k+1)}_{(۰/۱۲۵)} = \underbrace{4 \times 2q}_{(۰/۱۲۵)} = 8q$	۱/۲۵																	
۲	$a = 3q + 2 \text{ (۰/۱۲۵)} \Rightarrow 2a + 3 = \underbrace{6q + 4}_{(۰/۱۲۵)} = \underbrace{4(q+1) + 1}_{(۰/۱۲۵)} = 4q' + 1 \text{ (۰/۱۲۵)} \Rightarrow r = 1 \text{ (۰/۱۲۵)}$	۱/۲۵																	
۳	$n 9k + 7 \text{ (۰/۱۲۵)} \Rightarrow n -63k - 49 + 63k + 54 \text{ (۰/۱۲۵)} \Rightarrow n 5 \text{ (۰/۱۲۵)} \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 1 \text{ یا } 5 \text{ (۰/۱۲۵)}$ $n 7k + 6 \text{ (۰/۱۲۵)}$	۱																	
۴	$7^2 = 49 \equiv 1 \text{ (۰/۱۲۵)} \Rightarrow 7^4 \equiv 1 \text{ (۰/۱۲۵)} \Rightarrow 7^{28} \equiv 1 \text{ (۰/۱۲۵)} \xrightarrow{7^{28} \equiv 1 \text{ (۰/۱۲۵)}} 7^{30} \equiv 49 \text{ (۰/۱۲۵)}$	۱/۵																	
۵	$2 \equiv 35 \text{ (۰/۱۲۵)} \Rightarrow 5x \equiv 35 \text{ (۰/۱۲۵)} \xrightarrow{(5,1)=1 \text{ (۰/۱۲۵)}} x \equiv 7 \text{ (۰/۱۲۵)} \Rightarrow x = 11k + 7 \text{ (۰/۱۲۵)}$	۱/۲۵																	
۶	(ا) دو برابر (۰/۱۲۵) (ب) k (۰/۱۲۵) (پ) مینیمم (۰/۱۲۵) (ت) مینیمال (۰/۱۲۵)	۱																	
۷	(ا) $N_G[a] = \{a, b, c, d\}$ (۰/۱۵) (ب) دور به طول ۴: a, b, c, d, a (۰/۱۲۵) (پ) مسیر به طول ۳: a, c, b, c (۰/۱۲۵) و مسیر به طول ۴: a, d, c, b, c (۰/۱۲۵)	۱/۲۵																	
۸	$\deg_G(v) + \deg_{\overline{G}}(v) = p - 1 \text{ (۰/۱۲۵)} \Rightarrow 9 + 12 = p - 1 \text{ (۰/۱۲۵)} \Rightarrow p = 22 \text{ (۰/۱۲۵)}$	۰/۷۵																	
۹	(ا) گراف روبه‌رو از مرتبه ۶ و دارای تنها یک مجموعه احاطه‌گر یکتا $\{a, b\}$ است. (۰/۱۲۵) رسم گراف (۰/۱۲۵) (ب) گراف مقابل دارای سه مجموعه احاطه‌گری به اندازه ۲ است که عبارتند از $\{a, d\}, \{f, c\}, \{e, b\}$ (۰/۱۲۵) رسم گراف (۰/۱۲۵)	۱																	
۱۰	برای گراف مورد سوال داریم $\left[\frac{n}{\Delta+1} \right] \leq \gamma(G) \Rightarrow \left[\frac{10}{3+1} \right] = 2 \leq \gamma(G)$ احاطه‌گر برای گراف است (۰/۱۲۵). لذا $\gamma(G) \leq 3$ (۰/۱۲۵). بنابراین $\gamma(G) = 3$ (۰/۱۲۵)	۱/۲۵																	
۱۱	$\frac{7!}{2^2 \times 3!} \text{ (۰/۱۵)} = 320 \text{ (۰/۱۲۵)}$	۰/۷۵																	
۱۲	$x_1 + \dots + x_8 = 11, x_7 \geq 2, x_8 \geq 4 \text{ (۰/۱۲۵)}$ $x_1 + y_1 + 2 + x_7 + x_8 + y_8 + 4 = 11 \text{ (۰/۱۲۵)} \Rightarrow x_1 + y_1 + x_7 + x_8 + y_8 = 5 \text{ (۰/۱۲۵)} \Rightarrow \text{جواب} = \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4} \text{ (۰/۱۵)}$	۱/۲۵																	
۱۳	با استفاده از جایگشت $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1$ (۰/۱۵) مربع لاتین به‌صورت مقابل داریم: (۰/۱۵) <table border="1"> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr> </table>	۳	۲	۱	۴	۱	۴	۳	۲	۴	۱	۲	۳	۲	۳	۴	۱	۱	
۳	۲	۱	۴																
۱	۴	۳	۲																
۴	۱	۲	۳																
۲	۳	۴	۱																

سؤالات امتحان درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال دوازدهم دوره دوم متوسطه	امتحان شهریور ۹۹	آزمون شماره (۴)	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید. (ا) برای هر دو عدد حقیقی x و y ، داریم $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ (ب) اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab=0$ آن‌گاه $a=0$ یا $b=0$ (پ) اگر $a, b \in \mathbb{R}$ داریم $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ (ت) حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.	۱
۲	ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$	۱/۲۵
۳	فرض کنیم a و n دو عدد طبیعی باشند به طوری که $a \mid 2n+3$ و $a \mid 2n+4$. نشان دهید $a=1$	۱/۲۵
۴	ثابت کنید اگر $p > 3$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p = 6k+1$ یا $p = 6k+5$ ($k \in \mathbb{W}$) نوشته می‌شود.	۱/۵
۵	اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(2m-5n)$ بر ۱۷ را محاسبه کنید.	۱/۲۵
۶	رقم یکان عدد $(2^{11}+7)$ را به دست آورید.	۱/۲۵
۷	معادله سیاله $2x+5y=19$ را حل کنید.	۱
۸	گراف G به صورت مقابل رسم شده است. به سؤالات زیر پاسخ دهید. (ا) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید. (ب) سه دور به طول ۳ بنویسید. (پ) ماکزیمم درجه در مکمل گراف G چند است؟ (ت) $N_G(e)$ را با اعضا بنویسید. (ث) آیا گراف G همبند است؟	۲/۵
۹	گراف کامل K_p دارای ۱۰ یال است. ابتدا p را به دست آورید، سپس گراف را رسم کنید.	۱
۱۰	عدد احاطه‌گری گراف داده‌شده را مشخص کنید.	۱/۵
۱۱	هشت نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق سه نفره، چهار نفره و یک نفره قرار بگیرند؟	۰/۷۵
۱۲	معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن‌که $x_1 \geq 1$ و $x_3 > 3$ باشند؟	۱/۲۵
۱۳	یک مربع لاتین چرخشی 4×4 بنویسید.	۰/۵
	بخش انتخابی: دانش‌آموزان عزیز جهت کسب ۴ نمره باقی‌مانده فقط به ۴ سؤال به دلخواه پاسخ دهید.	
۱۴	فرض کنیم $a, b \in \mathbb{Z}$ ، $m \in \mathbb{N}$ اگر $a \equiv b \pmod{m}$ ثابت کنید $a^m \equiv b^m \pmod{m}$	۱
۱۵	آیا گراف γ رأسی ۳-منتظم وجود دارد؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.	۱
۱۶	گراف P_5 را رسم کرده و تمام مسیرهای به طول ۳ را مشخص کنید.	۱



راهنمای تصحیح سؤالات امتحان دروس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی و فیزیک
سال دوازدهم دوره دوم متوسطه	امتحان شهریور ۹۹	آزمون شماره ۴

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	(آ) نادرست (۰/۱۲۵) (ب) درست (۰/۱۲۵) (پ) نادرست (۰/۱۲۵) (ت) نادرست (۰/۱۲۵)	۱
۲	$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad (۰/۱۲۵) \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \quad (۰/۱۲۵) \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \quad (۰/۱۲۵)$ لبرابری آخر برای a و b نامنفی همیشه درست است (۰/۱۲۵). اثبات بازگشتی و حکم برقرار است. (۰/۱۲۵)	۱/۲۵
۳	$\begin{aligned} a \mid 2n+4 &\Rightarrow a \mid \underbrace{-2(2n+4)}_{(۰/۱۲۵)} + \underbrace{2(2n+2)}_{(۰/۱۲۵)} \Rightarrow a \mid 1 \quad (۰/۱۲۵) \Rightarrow a = \pm 1 \quad (۰/۱۲۵) \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} a = 1 \quad (۰/۱۲۵) \\ a \mid 2n+2 & \end{aligned}$	۱/۲۵
۴	هرگاه p را بر 6 تقسیم کنیم خواهیم داشت: $p = 6k(۱), p = 6k+1(۲), p = 6k+2 = 2(3k+1)(۳) \quad (۰/۱۲۵)$ $p = 6k+3 = 3(2k+1)(۴), p = 6k+4 = 2(3k+2)(۵), p = 6k+5(۶)$ p در حالات (۱)، (۳) و (۵) زوج و در (۴) بر ۳ بخش پذیر است (۰/۱۲۵) که یا اول بودن p تناقض دارد. (۰/۱۲۵) بنابراین فقط در حالات (۲) یا (6)، p می تواند عددی اول باشد که حکم اثبات می شود. (۰/۱۲۵)	۱/۵
۵	$\begin{aligned} m &= 17q + 5 \quad (q \in \mathbb{Z}) \quad (۰/۵) \Rightarrow (2m - 5n) = 17(2q - 5q') - 5 \quad (۰/۱۲۵) \\ n &= 17q' + 2 \quad (q' \in \mathbb{Z}) \\ \Rightarrow (2m - 5n) &= 17(2q - 5q' - 1) + 12 \quad (۰/۱۲۵) \Rightarrow r = 12 \quad (۰/۱۲۵) \end{aligned}$	۱/۲۵
۶	$2^5 \equiv 2^1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{10} \equiv 2^4 \pmod{11} \Rightarrow 2^{11} \equiv 8 \pmod{11} \Rightarrow 2^{11} + 7 \equiv 15 \equiv 4 \pmod{11}$ رقم یکان برابر ۵ است. (۰/۱۲۵)	۱/۲۵
۷	$2x \equiv 19 \pmod{11} \Rightarrow \xrightarrow{(2 \cdot 6) \equiv 1} x \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow x = 5k + 2 \quad (۰/۱۲۵) \Rightarrow y = -2k + 3 \quad (۰/۱۲۵)$	۱
۸	(۱) $\delta(G) = 0, \Delta(G) = 4$ (۰/۵) (ب) $c, a, b, c \quad (۰/۱۲۵), c, a, e, c \quad (۰/۱۲۵), c, e, d, c \quad (۰/۱۲۵)$ (پ) $5 \quad (۰/۱۲۵)$ (ت) $N_G(e) = \{a, c, d\} \quad (۰/۱۲۵)$ (ث) خیر (۰/۱۲۵)	۲/۵
۹	$\frac{p(p-1)}{2} = 10 \quad (۰/۱۲۵) \Rightarrow p^2 - p - 20 = 0 \quad (۰/۱۲۵) \Rightarrow p = 5 \quad (۰/۱۲۵)$ رسم گراف (۰/۱۲۵) 	۱
۱۰	با توجه به این که $\left\lfloor \frac{8}{3+1} \right\rfloor = 2$ داریم $\gamma(G) \geq 2$. (۰/۱۲۵) لذا حداقل عدد احاطه گری ۲ است. (۰/۱۲۵) از طرفی $\{e, c\}$ یک مجموعه احاطه گر است. (۰/۵) پس $\gamma(G) \leq 2$ در نتیجه $\gamma(G) = 2$ (عدد احاطه گری). (۰/۱۲۵)	۱/۵
۱۱	$\frac{8!}{3! \times 4!} \quad (۰/۱۲۵)$ (به راه حل $\binom{8}{3} \binom{3}{3} \binom{1}{1}$ نیز نمره داده شود) (۰/۱۲۵) (۰/۱۲۵) (۰/۱۲۵)	۰/۱۲۵