

درس ۱

معادله و مسائل توصیفی

معادله $4x + 2 = 10$ را در نظر می‌گیریم. این معادله به ازای $x = 2$ به یک تساوی عددی تبدیل می‌شود. $x = 2$ را جواب معادله یا ریشه معادله می‌نامند.

فعالیت



با توجه به شکل زیر یک معادله طرح کنید و ریشه آن را بیابید.



فعالیت



عددی را بیابید که دو برابر آن به علاوه عدد یک، برابر با پنج برابر همان عدد منهای چهار باشد.
جواب: عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم. با توجه به فرض:
دو برابر آن عدد به علاوه عدد یک معادل $2x + 1$ و پنج برابر همان عدد منهای چهار، معادل $5x - 4$ است که باید با یکدیگر برابر باشند، یعنی:

$$2x + 1 = \dots\dots\dots$$

با بردن جملات شامل x به یک طرف تساوی و بردن اعداد ثابت به طرف دیگر تساوی:

$$5x - 2x = 1 + 4 \Rightarrow 3x = 5$$

و با تقسیم هر طرف تساوی بر عدد سه، جواب معادله به دست می‌آید:

$$x = \frac{5}{3}$$

درس ۱

معادله و مسائل توصیفی

معادله $4x + 2 = 10$ را در نظر می‌گیریم. این معادله به ازای $x = 2$ به یک تساوی عددی تبدیل می‌شود. $x = 2$ را جواب معادله یا ریشه معادله می‌نامند.

فعالیت



با توجه به شکل زیر یک معادله طرح کنید و ریشه آن را بیابید.



فعالیت



عددی را بیابید که دو برابر آن به علاوه عدد یک، برابر با پنج برابر همان عدد منهای چهار باشد.
جواب: عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم. با توجه به فرض:
دو برابر آن عدد به علاوه عدد یک معادل $2x + 1$ و پنج برابر همان عدد منهای چهار، معادل $5x - 4$ است که باید با یکدیگر برابر باشند، یعنی:

$$2x + 1 = \dots\dots\dots$$

با بردن جملات شامل x به یک طرف تساوی و بردن اعداد ثابت به طرف دیگر تساوی:

$$5x - 2x = 1 + 4 \Rightarrow 3x = 5$$

و با تقسیم هر طرف تساوی بر عدد سه، جواب معادله به دست می‌آید:

$$x = \frac{5}{3}$$

هر معادله به صورت $ax+b=0$ را که در آن a و b اعداد حقیقی و a مخالف صفر است، یک معادله درجه اول می نامند. تنها جواب این معادله از $x = -\frac{b}{a}$ به دست می آید. (چرا؟)

کار در کلاس



یک حواصیل خاکستری دسته ای از حواصیل های سفید را در جنگل حرا* در جزیره قشم دید. به یکی از آنها گفت: اجازه می دهید من هم در گروه شما باشم و با شما پرواز کنم؟



یکی از آنها پاسخ داد: اگر معمای زیر را حل کنی، تو هم در گروه ما خواهی بود و ادامه داد: «ما و ما و نصف ما و نصفه ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما چهلگی صد می شویم.» لطفاً به پرندۀ کمک کنيد تا تعداد پرندگان گروه را تعیین کند و عضوی از گروه آنها باشد. اگر «ما» را x فرض کنیم:

$$100 = 1 + \text{نصف ما} + \text{نصف ما} + \text{نصف ما} + \text{ما}$$

$$x + \dots + \frac{1}{2}x + \dots + 1 = 100$$

$$\dots \Rightarrow x = \dots$$

آیا معادله به دست آمده، درجه اول است؟ چرا؟
ضرایب a و b کدام اند؟

* تشریح از موقعیت و شرایط این جنگل در صفحه بعد آمده است.

هر معادله به صورت $ax+b=0$ را که در آن a و b اعداد حقیقی و a مخالف صفر است، یک معادله درجه اول می نامند. تنها جواب این معادله از $x = -\frac{b}{a}$ به دست می آید. (چرا؟)

کار در کلاس



یک حواصیل خاکستری دسته ای از حواصیل های سفید را در جنگل حرا* در جزیره قشم دید. به یکی از آنها گفت: اجازه می دهید من هم در گروه شما باشم و با شما پرواز کنم؟



یکی از آنها پاسخ داد: اگر معمای زیر را حل کنی، تو هم در گروه ما خواهی بود و ادامه داد: «ما و ما و نصف ما و نصفه ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما چهلگی صد می شویم.» لطفاً به پرندۀ کمک کنيد تا تعداد پرندگان گروه را تعیین کند و عضوی از گروه آنها باشد. اگر «ما» را x فرض کنیم:

$$100 = 1 + \text{نصف ما} + \text{نصف ما} + \text{نصف ما} + \text{ما}$$

$$x + \dots + \frac{1}{2}x + \dots + 1 = 100$$

$$\dots \Rightarrow x = \dots$$

آیا معادله به دست آمده، درجه اول است؟ چرا؟
ضرایب a و b کدام اند؟

* تشریح از موقعیت و شرایط این جنگل در صفحه بعد آمده است.

۶. اگر در یک قالی با ابعاد $2/80m \times 2/10m$ (که عموماً 2×3 نامیده می‌شود) تعداد گره‌های قالی $5/880/000$ عدد باشد:

الف) این قالی چند رج است؟

ب) اگر برای هر گره $1cm$ نخ قالی با همان خامه قالی استفاده نشود، در این قالی چند متر نخ قالی استفاده شده است؟

پ) یک قالی باف حرفه‌ای در یک روز می‌تواند 6000 گره قالی بیافد. اگر این قالی باف 5 روز در هفته کار کند، برای اتمام این قالی چند هفته باید کار کند؟

ت) اگر این قالی باف برای خرید مواد اولیه قالی نسامل تار و بود، نخ قالی و ... پنج میلیون و شش صد هزار تومان هزینه کرده باشد و بتواند در پایان بافت قالی، آن را به قیمت 35 میلیون تومان بفروشد، این قالی باف برای هر هفته کار خود چه دستمزدی دریافت کرده است؟



۱. «رج قالی» عبارت است از تعداد گره‌های قالی در $7cm$ طول یا عرض قالی. به عنوان مثال منظور از یک قالی 50 رج، وجود 50 گره در یک ضلع مربع 7×7 است.

۶. یک هنرمند قالی باف تصمیم دارد یک قالی مستطیل شکل بیافد. طول قالی 2 متر بیشتر از عرض آن است. اگر محیط قالی 12 متر باشد، اندازه طول و عرض قالی را به دست آورید.

۷. اگر در یک قالی با ابعاد $2/80m \times 2/10m$ (که عموماً 2×3 نامیده می‌شود) تعداد گره‌های قالی $5/880/000$ عدد باشد:

الف) این قالی چند رج است؟

ب) اگر برای هر گره $1cm$ نخ قالی با همان خامه قالی استفاده نشود، در این قالی چند متر نخ قالی استفاده شده است؟



۱. «رج قالی» عبارت است از تعداد گره‌های قالی در $7cm$ طول یا عرض قالی. به عنوان مثال منظور از یک قالی 50 رج، وجود 50 گره در یک ضلع مربع 7×7 است.

کار در کلاس



با استفاده از اتحادهای صفحه قبل معادله‌های زیر را حل کنید:

$$1) x^2 + 3x - 4 = 0$$

از اتحاد یک جمله مشترک، تساوی را تجزیه کنید:

$$\Rightarrow (x \dots)(x \dots) = 0$$

$$\Rightarrow (x - \dots) = 0 \text{ یا } (x + \dots) = 0 \Rightarrow x = \dots \text{ یا } x = \dots$$

$$2) 4x^2 - (2-x)^2 = 0$$

با استفاده از اتحاد ... عبارت جبری سمت چپ تساوی را تجزیه می‌کنیم:

$$(2x - (2-x))(2x + (2-x)) = 0 \Rightarrow \dots$$

تمرین



۱. معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $2x^2 - 8 = 0$

ب) $(x+2)(x-3) = x-3$

پ) $x^2 - 2x^2 = 0$

ت) $x^2 = x - \frac{1}{4}$

ث) $2x^2 - 8x = 0$

ج) $x^2 - 5x + 6 = 0$

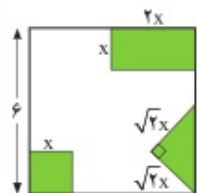
ح) $\frac{x}{3} = x$

خ) $x^2 = 5 - x^2$

د) $x^2 + 4x + 4 = 0$

د) $9x^2 + 3x - 2 = 0$

ذ) $(x-3)^2 = 4$



۲. از مربعی به ضلع ۶cm سه شکل روبه‌رو بریده شده است. مساحت باقی‌مانده 24 cm^2 است. طول ضلع کوچک بریده شده چقدر است؟

۳. معادله درجه دومی بنویسید که $x=2$ و $x=-3$ جواب‌های آن باشند.

کار در کلاس



با استفاده از اتحادهای صفحه قبل معادله‌های زیر را حل کنید:

$$1) x^2 + 3x - 4 = 0$$

از اتحاد یک جمله مشترک، تساوی را تجزیه کنید:

$$\Rightarrow (x \dots)(x \dots) = 0$$

$$\Rightarrow (x - \dots) = 0 \text{ یا } (x + \dots) = 0 \Rightarrow x = \dots \text{ یا } x = \dots$$

$$2) 4x^2 - (2-x)^2 = 0$$

با استفاده از اتحاد ... عبارت جبری سمت چپ تساوی را تجزیه می‌کنیم:

$$(2x - (2-x))(2x + (2-x)) = 0 \Rightarrow \dots$$

تمرین



۱. معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $2x^2 - 8 = 0$

ب) $(x+2)(x-3) = x-3$

پ) $x^2 - 2x^2 = 0$

ت) $x^2 = x - \frac{1}{4}$

ث) $2x^2 - 8x = 0$

ج) $x^2 - 5x + 6 = 0$

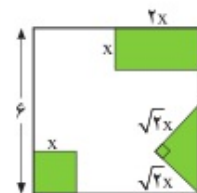
ح) $\frac{x}{3} = x$

خ) $x^2 = 5 - x^2$

د) $x^2 + 4x + 4 = 0$

د) $9x^2 + 3x - 2 = 0$

ذ) $(x-3)^2 = 4$



۲. از مربعی به ضلع ۶cm سه شکل روبه‌رو بریده شده است. مساحت باقی‌مانده 24 cm^2 است. طول ضلع کوچک بریده شده چقدر است؟

۳. معادله درجه دومی بنویسید که $x=2$ و $x=-3$ جواب‌های آن باشند.

به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای سمت چپ تساوی (۳) را به $(a+b)^2$ تبدیل می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = x^2 + 2 \times \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = (x + \frac{3}{4})^2$$

$\begin{matrix} a^2 & & b^2 \\ & b \times a & \end{matrix}$

بنابراین:

$$(x + \frac{3}{4})^2 = \frac{5}{4} + \frac{9}{16} \rightarrow (x + \frac{3}{4})^2 = \frac{49}{16} \quad (4)$$

با استفاده از ریشه‌گیری از ۲ طرف تساوی، مقدار x بدست می‌آید:

$$x + \frac{3}{4} = \pm \sqrt{\frac{49}{16}} \Rightarrow x = -\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{یا} \quad x = -\frac{3}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$$

پس جواب‌های معادله $2x^2 + 3x - 5 = 0$ یا همان ریشه‌های معادله، دو عدد حقیقی $x = -\frac{5}{2}$ و $x = 1$ هستند.

مراحل حل معادله ذکر شده را از پله دوم به بعد به کمک تعبیر هندسی زیر نیز می‌توان بیان کرد:

- اگر x^2 را مساحت مربعی به ضلع x و $\frac{3}{4}x$ را مساحت مستطیلی به طول $\frac{3}{4}$ و عرض x در نظر بگیریم:

$$x \cdot x + x \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

- با نصف کردن مستطیل به طول $\frac{3}{4}$ در تساوی (۱) و تبدیل آن به دو مستطیل به طول... در تساوی (۲):

$$x \cdot x + \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right)x = x \cdot x + x \cdot \frac{3}{4} + x \cdot \frac{3}{4}$$

خواندنی

به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای سمت چپ تساوی (۳) را به $(a+b)^2$ تبدیل می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = x^2 + 2 \times \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = (x + \frac{3}{4})^2$$

$\begin{matrix} a^2 & & b^2 \\ & b \times a & \end{matrix}$

بنابراین:

$$(x + \frac{3}{4})^2 = \frac{5}{4} + \frac{9}{16} \rightarrow (x + \frac{3}{4})^2 = \frac{49}{16} \quad (4)$$

با استفاده از ریشه‌گیری از ۲ طرف تساوی، مقدار x بدست می‌آید:

$$x + \frac{3}{4} = \pm \sqrt{\frac{49}{16}} \Rightarrow x = -\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{یا} \quad x = -\frac{3}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$$

پس جواب‌های معادله $2x^2 + 3x - 5 = 0$ یا همان ریشه‌های معادله، دو عدد حقیقی $x = -\frac{5}{2}$ و $x = 1$ هستند.

مراحل حل معادله ذکر شده را از پله دوم به بعد به کمک تعبیر هندسی زیر نیز می‌توان بیان کرد:

- اگر x^2 را مساحت مربعی به ضلع x و $\frac{3}{4}x$ را مساحت مستطیلی به طول $\frac{3}{4}$ و عرض x در نظر بگیریم:

$$x \cdot x + x \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

- با نصف کردن مستطیل به طول $\frac{3}{4}$ در تساوی (۱) و تبدیل آن به دو مستطیل به طول... در تساوی (۲):

$$x \cdot x + \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right)x = x \cdot x + x \cdot \frac{3}{4} + x \cdot \frac{3}{4}$$

خواندنی

و فرار دادن ۲ مستطیل قبل در کنار مربع x^2 ، تساوی صفحه قبل به صورت زیر در می‌آید:

۱ - شکل سمت چپ برای آنکه به یک مربع کامل تبدیل شود نیاز به مربعی به ضلع $\frac{3}{4}$ دارد.

با اضافه کردن آن به ۲ طرف تساوی:

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$$

که مطابق حل صفحه قبل معادله دارای ۲ جواب $x = 1$ و $x = -\frac{5}{4}$ است. البته در روش هندسی فوق چون x طول ضلع است، جواب $x = -\frac{5}{4}$ معنی پیدا نمی‌کند.

نسیبیه حل معادله درجه دو به روش هندسی ذکر شده اولین بار توسط ریاضی دان، منجم، مورخ و جغرافی دان ایرانی و مسلمان «ابوعبدالله محمد بن موسی خوارزمی» در کتاب جبر و مقابله در بخش اول کتاب در اواخر قرن دوم هجری مطرح شد. سؤال قبل که صورت کلی آن $x^2 + px = q$ و با فرض $p, q > 0$ است، یکی از شش حالت خاصی است که خوارزمی برای حل معادله درجه دو در این کتاب مطرح و حل کرده است. هر چند همه معادله‌های درجه دوم را نمی‌توان با این شش روش حل کرد؛ اما بیان مسائل هندسی در قالب جمله‌های جبری در این کتاب بنای اصلی توسعه نظریه جبری معادله‌ها است. کتاب جبر و مقابله خوارزمی قرن‌ها مرجع و مأخذ اروپاییان و تا قرن شانزدهم میلادی مبنای مطالعات علمی آنان بوده است. این کتاب که به زبان عربی نوشته شده است، در قرن ۱۲ میلادی دوباره توسط «جرارد کرمونی» و «رابرت جستر» به زبان لاتین ترجمه شده است. این ترجمه‌ها را می‌توان آغاز علم جبر در اروپا دانست. همچنین در سال ۱۸۳۱ میلادی نیز «فردریک رزن» این کتاب را بار دیگر از زبان عربی به زبان انگلیسی ترجمه کرده است. گفتنی است که یک نسخه خطی این کتاب در دانشگاه آکسفورد و نسخه خطی دیگر آن در قاهره موجود است.

و فرار دادن ۲ مستطیل قبل در کنار مربع x^2 ، تساوی صفحه قبل به صورت زیر در می‌آید:

۱ - شکل سمت چپ برای آنکه به یک مربع کامل تبدیل شود نیاز به مربعی به ضلع $\frac{3}{4}$ دارد.

با اضافه کردن آن به ۲ طرف تساوی:

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$$

که مطابق حل صفحه قبل معادله دارای ۲ جواب $x = 1$ و $x = -\frac{5}{4}$ است. البته در روش هندسی فوق چون x طول ضلع است، جواب $x = -\frac{5}{4}$ معنی پیدا نمی‌کند.

نسیبیه حل معادله درجه دو به روش هندسی ذکر شده اولین بار توسط ریاضی دان، منجم، مورخ و جغرافی دان ایرانی و مسلمان «ابوعبدالله محمد بن موسی خوارزمی» در کتاب جبر و مقابله در بخش اول کتاب در اواخر قرن دوم هجری مطرح شد. سؤال قبل که صورت کلی آن $x^2 + px = q$ و با فرض $p, q > 0$ است، یکی از شش حالت خاصی است که خوارزمی برای حل معادله درجه دو در این کتاب مطرح و حل کرده است. هر چند همه معادله‌های درجه دوم را نمی‌توان با این شش روش حل کرد؛ اما بیان مسائل هندسی در قالب جمله‌های جبری در این کتاب بنای اصلی توسعه نظریه جبری معادله‌ها است. کتاب جبر و مقابله خوارزمی قرن‌ها مرجع و مأخذ اروپاییان و تا قرن شانزدهم میلادی مبنای مطالعات علمی آنان بوده است. این کتاب که به زبان عربی نوشته شده است، در قرن ۱۲ میلادی دوباره توسط «جرارد کرمونی» و «رابرت جستر» به زبان لاتین ترجمه شده است. این ترجمه‌ها را می‌توان آغاز علم جبر در اروپا دانست. همچنین در سال ۱۸۳۱ میلادی نیز «فردریک رزن» این کتاب را بار دیگر از زبان عربی به زبان انگلیسی ترجمه کرده است. گفتنی است که یک نسخه خطی این کتاب در دانشگاه آکسفورد و نسخه خطی دیگر آن در قاهره موجود است.

کار در کلاس



با محاسبه مجموع زمان طی کردن پله‌های زیر برای مراحل حل معادله درجه دو، در چند ثانیه می‌توانید به بالای پله برسید؟ بهترین نتیجه به دست آمده در کلاس چند ثانیه با عملکرد شما اختلاف دارد؟

تمرین قبل از مسابقه

۱) $2x^2 - 6x - 1 = 0$

$2x^2 - 6x = 1$	$x^2 - 3x = \frac{1}{2}$	$x^2 - 2x + \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}$	$(x - \frac{3}{2})^2 = \frac{11}{4}$	$x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$
		\downarrow $(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$		
		$x^2 - 2(\frac{3}{2}x) + \frac{9}{4} = \frac{1}{2} + \frac{9}{4}$		
				$\begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2} \\ x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2} \end{cases}$

۲) $3x^2 - 2 = 6x$

$3x^2 - 6x = \dots$	$x^2 - \dots = \dots$	$\dots = \dots$	$\dots = \dots$	$\begin{cases} x = \dots \\ x = \dots \end{cases}$
			$(\dots)^2 = \dots$	



کار در کلاس



با محاسبه مجموع زمان طی کردن پله‌های زیر برای مراحل حل معادله درجه دو، در چند ثانیه می‌توانید به بالای پله برسید؟ بهترین نتیجه به دست آمده در کلاس چند ثانیه با عملکرد شما اختلاف دارد؟

تمرین قبل از مسابقه

۱) $2x^2 - 6x - 1 = 0$

$2x^2 - 6x = 1$	$x^2 - 3x = \frac{1}{2}$	$x^2 - 2x + \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}$	$(x - \frac{3}{2})^2 = \frac{11}{4}$	$x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$
		\downarrow $(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$		
		$x^2 - 2(\frac{3}{2}x) + \frac{9}{4} = \frac{1}{2} + \frac{9}{4}$		
				$\begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2} \\ x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2} \end{cases}$

۲) $3x^2 - 2 = 6x$

$3x^2 - 6x = \dots$	$x^2 - \dots = \dots$	$\dots = \dots$	$\dots = \dots$	$\begin{cases} x = \dots \\ x = \dots \end{cases}$
			$(\dots)^2 = \dots$	





تمرین

معادله‌های درجه دوم زیر را به روش تشکیل مربع کامل حل کنید.

الف) $x^2 - 5x + 6 = 0$

ب) $9x^2 + 3x - 2 = 0$

پ) $x^2 + \frac{1}{4} = -x$

ت) $x^2 + 6x + 9 = 0$

روش سوم: روش کلی حل معادله درجه دوم

با استفاده از روش مربع کامل برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ روش کلی برای حل معادله به دست می‌آید. با مرور پله‌های گفته شده در بخش قبل:

۱- قرینه عدد ثابت معادله را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم:

$$ax^2 + bx = -c \quad (1)$$

۲- دو طرف معادله را به ضریب x^2 یعنی a تقسیم می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad (2)$$

۳- ضریب $\frac{b}{a}$ را در عدد ۲ ضرب و تقسیم می‌کنیم و مربع عبارت $\frac{b}{2a}$ را به دو طرف تساوی (۲) اضافه می‌کنیم:

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x = -\frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \quad (3)$$

۴- عبارت سمت چپ تساوی (۳) را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم:

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

۵- با شرط $b^2 - 4ac > 0$ و با استفاده از ریشه‌گیری از ۲ طرف تساوی:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



تمرین

معادله‌های درجه دوم زیر را به روش تشکیل مربع کامل حل کنید.

الف) $x^2 - 5x + 6 = 0$

ب) $9x^2 + 3x - 2 = 0$

پ) $x^2 + \frac{1}{4} = -x$

ت) $x^2 + 6x + 9 = 0$

روش سوم: روش کلی حل معادله درجه دوم

با استفاده از روش مربع کامل برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ روش کلی برای حل معادله به دست می‌آید. با مرور پله‌های گفته شده در بخش قبل:

۱- قرینه عدد ثابت معادله را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم:

$$ax^2 + bx = -c \quad (1)$$

۲- دو طرف معادله را به ضریب x^2 یعنی a تقسیم می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad (2)$$

۳- ضریب $\frac{b}{a}$ را در عدد ۲ ضرب و تقسیم می‌کنیم و مربع عبارت $\frac{b}{2a}$ را به دو طرف تساوی (۲) اضافه می‌کنیم:

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x = -\frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \quad (3)$$

۴- عبارت سمت چپ تساوی (۳) را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم:

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

۵- با شرط $b^2 - 4ac > 0$ و با استفاده از ریشه‌گیری از ۲ طرف تساوی:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

عبارت $b^2 - 4ac$ را مبین معادله درجه دوم می نامند و آن را با Δ نشان می دهند.

بر اساس علامت Δ می توان در وجود و تعداد ریشه های معادله درجه دوم اظهار نظر کرد:

الف) اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دارای ۲ جواب است که عبارت اند از:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ب) اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای یک جواب است. (در این حالت این ریشه را ریشه مضاعف می نامند.)

$$x = -\frac{b}{2a}$$

پ) اگر $\Delta < 0$ باشد معادله جواب ندارد. (چرا؟)



فعالیت

۱. جواب های معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

■ حل: با توجه به ضرایب معادله، به ترتیب: $c = 2$ و $b = -3$ و $a = 1$ است.

بنابراین:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$$

$\Delta > 0$ پس معادله دارای ۲ جواب است:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow x = 2 \quad \text{یا} \quad x = 1$$

۲. جواب های معادله $4x^2 + 7x - 2 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

■ حل: با در نظر گرفتن $c = \dots$ $b = \dots$ $a = \dots$

$$\Delta = \dots \Rightarrow \Delta = 49 - 4 \times 4 \times (-2) = 81$$

$\Delta > 0$ و معادله دارای دو جواب است:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2 \times 4} = \frac{\dots}{8} \Rightarrow$$

۸. ۱. چهارمین حرف الفبای یونانی است که آن را ادلتا می خوانند. در الفبای یونانی، دلتای بزرگ را با علامت Δ و دلتای کوچک را با علامت δ نشان می دهند.

عبارت $b^2 - 4ac$ را مبین معادله درجه دوم می نامند و آن را با Δ نشان می دهند.

بر اساس علامت Δ می توان در وجود و تعداد ریشه های معادله درجه دوم اظهار نظر کرد:

الف) اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دارای ۲ جواب است که عبارت اند از:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ب) اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای یک جواب است. (در این حالت این ریشه را ریشه مضاعف می نامند.)

$$x = -\frac{b}{2a}$$

پ) اگر $\Delta < 0$ باشد معادله جواب ندارد. (چرا؟)



فعالیت

۱. جواب های معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

■ حل: با توجه به ضرایب معادله، به ترتیب: $c = 2$ و $b = -3$ و $a = 1$ است.

بنابراین:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$$

$\Delta > 0$ پس معادله دارای ۲ جواب است:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow x = 2 \quad \text{یا} \quad x = 1$$

۲. جواب های معادله $4x^2 + 7x - 2 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

■ حل: با در نظر گرفتن $c = \dots$ $b = \dots$ $a = \dots$

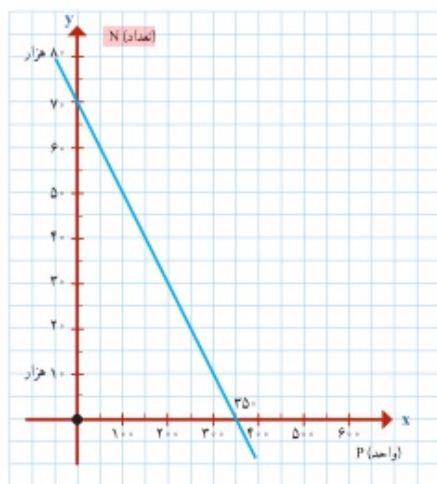
$$\Delta = \dots \Rightarrow \Delta = 49 - 4 \times 4 \times (-2) = 81$$

$\Delta > 0$ و معادله دارای دو جواب است:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2 \times 4} = \frac{\dots}{8} \Rightarrow$$

۸. ۱. چهارمین حرف الفبای یونانی است که آن را ادلتا می خوانند. در الفبای یونانی، دلتای بزرگ را با علامت Δ و دلتای کوچک را با علامت δ نشان می دهند.

با توجه به اطلاعات آماری تولید دوچرخه‌های مشابه در بازار، انتظار شما از تعداد فروش این دوچرخه با توجه به قیمت فروش آن از نمودار زیر پیروی می‌کند:



اگر N تعداد فروش دوچرخه و P قیمت هر دوچرخه تعیین شده باشند با توجه به نمودار فوق، رابطه زیر میان N و P برقرار است:

$$N = 70,000 - 200P$$

این تساوی به این معنی است که اگر:

— قیمت دوچرخه صفر واحد تعیین شود، تعداد فروش دوچرخه برابر $70,000$ دوچرخه است.

— قیمت دوچرخه 350 واحد تعیین شود، تعداد فروش دوچرخه صفر عدد است.

— اگر قیمت دوچرخه 300 واحد تعیین شود، تعداد فروش دوچرخه برابر است با

$$N = 70,000 - 200P = 70,000 - 200 \times 300 = 10,000 \text{ دوچرخه}$$

با توجه به اطلاعات فوق، الف) رابطه سود این کارخانه برحسب قیمت تعیین شده یک دوچرخه را مشخص کنید.

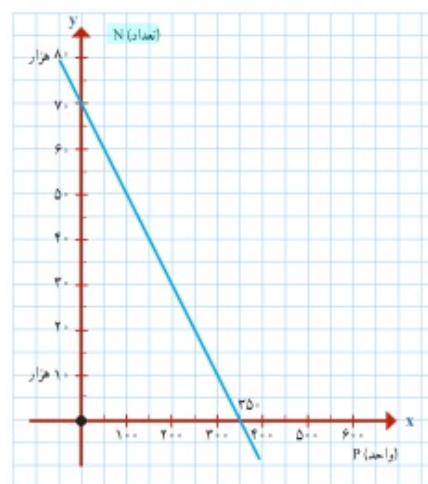
■ حل:

$$P^2 = (70,000 - 200P)P = 70,000P - 200P^2$$

هزینه تولید + هزینه اولیه = هزینه کارخانه

$$= 70,000 + 110(70,000 - 200P) = 70,000 + 7,700,000 - 22,000P$$

با توجه به اطلاعات آماری تولید دوچرخه‌های مشابه در بازار، انتظار شما از تعداد فروش این دوچرخه با توجه به قیمت فروش آن از نمودار زیر پیروی می‌کند:



اگر N تعداد فروش دوچرخه و P قیمت هر دوچرخه تعیین شده باشند با توجه به نمودار فوق، رابطه زیر میان N و P برقرار است:

$$N = 70,000 - 200P$$

این تساوی به این معنی است که اگر:

— قیمت دوچرخه 350 واحد تعیین شود، تعداد فروش دوچرخه صفر عدد است.

— اگر قیمت دوچرخه 300 واحد تعیین شود، تعداد فروش دوچرخه برابر است با

$$N = 70,000 - 200P = 70,000 - 200 \times 300 = 10,000 \text{ دوچرخه}$$

با توجه به اطلاعات فوق، الف) رابطه سود این کارخانه برحسب قیمت تعیین شده یک دوچرخه را مشخص کنید.

■ حل:

$$P^2 = (70,000 - 200P)P = 70,000P - 200P^2$$

هزینه تولید + هزینه اولیه = هزینه کارخانه

$$= 70,000 + 110(70,000 - 200P) = 70,000 + 7,700,000 - 22,000P$$

به دست آورید.

۳. اگر یکی از جواب‌های معادله $2x^2 - ax + 28 = 0$ برابر ۴ باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟

۴. مساحت مثلث و مستطیل در شکل زیر مساوی‌اند، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟



۵. کدام یک از معادله‌های زیر به ازای هر مقدار a همواره دارای جواب‌های حقیقی است؟

الف) $x^2 + ax - 1 = 0$ ب) $x^2 - x + a = 0$

۶. نشان دهید در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a+c=b$ باشد، یکی از ریشه‌های معادله برابر $x = -1$ و دیگری $x = -\frac{c}{a}$ است.

۷. با تعیین ریشه‌های معادله نشان دهید حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ درجه دوم برابر $\frac{c}{a}$ است.

۸. نشان دهید در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر مجموع ضرایب معادله برابر صفر باشد ($a+b+c=0$) یکی از ریشه‌های معادله $x=1$ و دیگری $x = \frac{c}{a}$ است.

* حل تمرین‌های ستاره‌دار اجباری نیست.

به دست آورید.

۳. اگر یکی از جواب‌های معادله $2x^2 - ax + 28 = 0$ برابر ۴ باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟

۴. مساحت مثلث و مستطیل در شکل زیر مساوی‌اند، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟



۵. کدام یک از معادله‌های زیر به ازای هر مقدار a همواره دارای جواب‌های حقیقی است؟

الف) $x^2 + ax - 1 = 0$ ب) $x^2 - x + a = 0$

۶. نشان دهید در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a+c=b$ باشد، یکی از ریشه‌های معادله برابر $x = -1$ و دیگری $x = -\frac{c}{a}$ است.

۷. با تعیین ریشه‌های معادله نشان دهید حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ درجه دوم برابر $\frac{c}{a}$ است.

۸. نشان دهید در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر مجموع ضرایب معادله برابر صفر باشد ($a+b+c=0$) یکی از ریشه‌های معادله $x=1$ و دیگری $x = \frac{c}{a}$ است.

* حل تمرین‌های ستاره‌دار اجباری نیست.

برای حل معادله‌های شامل عبارت‌های گویا، ابتدا با توجه به خاصیت‌های معادله و مخرج مشترک‌گیری، معادله‌ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ به دست می‌آید. به شرط اینکه $Q(x) \neq 0$ ، وقتی معادله جواب دارد که $P(x) = 0$ است، سپس ریشه‌های این معادله را به دست می‌آوریم. از بین ریشه‌های به دست آمده، آنهایی را قبول می‌کنیم که مخرج کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را صفر نکنند. (چرا؟)

◆ مثال: معادله $2 = \frac{5(x-1)}{x-3} - \frac{10}{x-3}$ را حل کنید.

■ حل: با اضافه کردن ۲- به دو طرف معادله خواهیم داشت:

$$\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} - 2 = 0$$

اکنون با مخرج مشترک‌گیری از سمت چپ، تساوی آن را به صورت یک کسر بنویسید.

$$\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} - \frac{2(\quad)}{(\quad)} = 0 \Rightarrow \frac{\quad}{x-3} = 0$$

مشاهده می‌کنیم که به معادله‌ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ رسیدیم. بنابراین با شرط $x-3 \neq 0$ و با حل معادله $P(x) = 0$ ، ریشه‌های معادله را در صورت وجود پیدا می‌کنیم.

$$21 - 7x = 0 \Rightarrow x = 3$$

چون $x=3$ مخرج کسرها را صفر می‌کند، این ریشه قابل قبول نیست و معادله ریشه ندارد.

◆ مثال: معادله $\frac{x^2-6x+5}{x^2-x-20} = \frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4}$ را حل کنید.

$$\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} - \frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)(\dots)}{(x-5)(\dots)} + \frac{(x-1)(\dots)}{(x+4)(\dots)} - \frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\dots}{(x-5)(x+4)} = 0 \Rightarrow \dots = 0 \Rightarrow \dots$$

برای حل معادله‌های شامل عبارت‌های گویا، ابتدا با توجه به خاصیت‌های معادله و مخرج مشترک‌گیری، معادله‌ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ به دست می‌آید. به شرط اینکه $Q(x) \neq 0$ ، وقتی معادله جواب دارد که $P(x) = 0$ است، سپس ریشه‌های این معادله را به دست می‌آوریم. از بین ریشه‌های به دست آمده، آنهایی را قبول می‌کنیم که مخرج کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را صفر نکنند. (چرا؟)

◆ مثال: معادله $2 = \frac{5(x-1)}{x-3} - \frac{10}{x-3}$ را حل کنید.

■ حل: با اضافه کردن ۲- به دو طرف معادله خواهیم داشت:

$$\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} - 2 = 0$$

اکنون با مخرج مشترک‌گیری از سمت چپ، تساوی آن را به صورت یک کسر بنویسید.

$$\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} - \frac{2(\quad)}{(\quad)} = 0 \Rightarrow \frac{\quad}{x-3} = 0$$

مشاهده می‌کنیم که به معادله‌ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ رسیدیم. بنابراین با شرط $x-3 \neq 0$ و با حل معادله $P(x) = 0$ ، ریشه‌های معادله را در صورت وجود پیدا می‌کنیم.

$$21 - 7x = 0 \Rightarrow x = 3$$

چون $x=3$ مخرج کسرها را صفر می‌کند، این ریشه قابل قبول نیست و معادله ریشه ندارد.

◆ مثال: معادله $\frac{x^2-6x+5}{x^2-x-20} = \frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4}$ را حل کنید.

$$\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} - \frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)(\dots)}{(x-5)(\dots)} + \frac{(x-1)(\dots)}{(x+4)(\dots)} - \frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\dots}{(x-5)(x+4)} = 0 \Rightarrow \dots = 0 \Rightarrow \dots$$

برای نمایش تابعی چون f از مجموعه A به مجموعه B می‌نویسیم: $f: A \rightarrow B$ که $y = f(x)$ را ضابطه تابع و A را دامنه تابع f در نظر می‌گیریم.

فعالیت



با توجه به ضابطه هر تابع و مانند نمونه، مجموعه مقادیر با بُرد هر تابع را مشخص کنید.

$$f: A \rightarrow B, A = \left\{-1, \sqrt{2}, 2, 1, 0, \frac{1}{2}\right\}$$

$$f(x) = 2x^2 + 1$$

x	f(x) = 2x ² + 1
-1	f(-1) = 2 × (-1) ² + 1 = 3
√2	f(√2) = 2 × (√2) ² + 1 = 5
2	f(2) = 2 × (2) ² + 1 = 9
1	f(1) = 2 × (1) ² + 1 = 3
0	f(0) = 2 × (0) ² + 1 = 1
1/2	f(1/2) = 2 × (1/2) ² + 1 = 3/2

→ R_f = {3, 5, 9, 1, 3/2}

الف) $f: A \rightarrow B, A = \{0, -1, 8, 3, 2\}$
 $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$

ب) $f: A \rightarrow B, A = \{-2, 0, 1, \sqrt{2}, \frac{1}{2}\}$
 $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

برای نمایش تابعی چون f از مجموعه A به مجموعه B می‌نویسیم: $f: A \rightarrow B$ که $y = f(x)$ را ضابطه تابع و A را دامنه تابع f در نظر می‌گیریم.

فعالیت



با توجه به ضابطه هر تابع و مانند نمونه، مجموعه مقادیر با بُرد هر تابع را مشخص کنید.

$$f: A \rightarrow B, A = \left\{-1, \sqrt{2}, 2, 1, 0, \frac{1}{2}\right\}$$

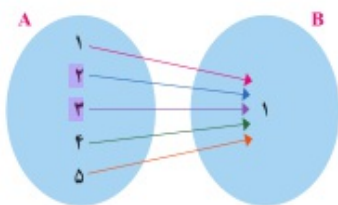
$$f(x) = 2x^2 + 1$$

x	f(x) = 2x ² + 1
-1	f(-1) = 2 × (-1) ² + 1 = 3
√2	f(√2) = 2 × (√2) ² + 1 = 5
2	f(2) = 2 × (2) ² + 1 = 9
1	f(1) = 2 × (1) ² + 1 = 3
0	f(0) = 2 × (0) ² + 1 = 1
1/2	f(1/2) = 2 × (1/2) ² + 1 = 3/2

→ R_f = {3, 5, 9, 1, 3/2}

الف) $f: A \rightarrow B, A = \{0, -1, 8, 3, 2\}$
 $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$

ب) $f: A \rightarrow B, A = \{-2, 0, 1, \sqrt{2}, \frac{1}{2}\}$
 $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$



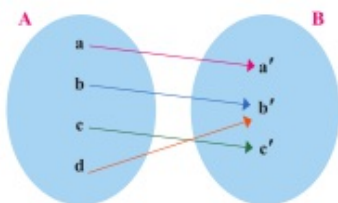
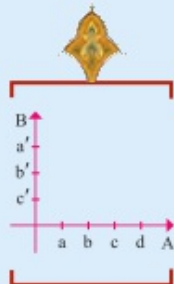
ت)

$$f = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (e, e)\}$$

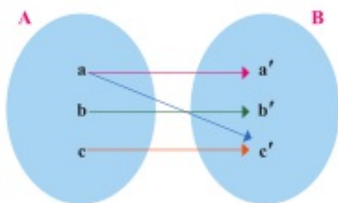
تمرین



۱. کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟ برای هر رابطه نمودار مختصاتی را رسم کنید.



الف)



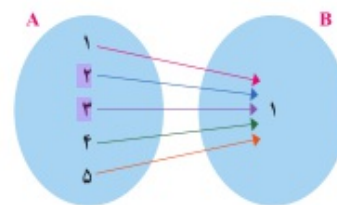
ب)

$$f = \{(2, -1), (3, -1), (1, -1), (4, 1), (2, 4)\}$$

$$g = \{(1, 1)\}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2x + 1$$



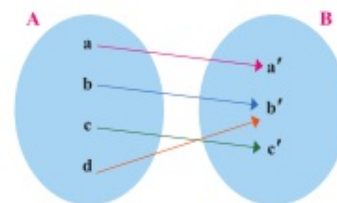
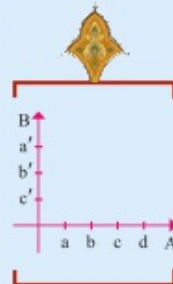
ت)

$$f = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (e, e)\}$$

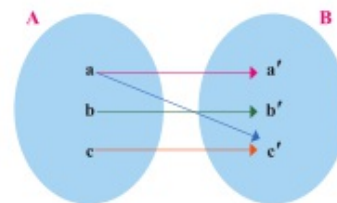
تمرین



۱. کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟ برای هر رابطه نمودار مختصاتی را رسم کنید.



الف)



ب)

$$f = \{(2, -1), (3, -1), (1, -1), (4, 1), (2, 4)\}$$

$$g = \{(1, 1)\}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2x + 1$$

ج) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x$

ج) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2$

۲. برد هریک از توابع زیر را با توجه به ضابطه و دامنه داده شده، به دست آورید.

الف) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = x^2 + x + 1$, $A = \{-2, -1, 1, 2\}$

ب) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \frac{x+1}{x}$, $A = \{\frac{1}{2}, 1, -1, 2, -2\}$

ب) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \sqrt{x+1}$, $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 8\}$

ت) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = x$, $A = B = \{0, 1, 2, \dots\}$

ت) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = 0$, $A = \mathbb{R}$

۳. تابع f به هر عدد حقیقی، دو برابر مکعب همان عدد، منهای ۴ را نسبت می دهد. f کدام تابع است؟ حاصل $f(3)$ را بیابید.

الف) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2(x-4)^2$

ب) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2\sqrt{x-4}$

ب) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2x^2 - 4$

ت) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2\sqrt{x-4}$

ج) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x$

ج) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2$

۲. برد هریک از توابع زیر را با توجه به ضابطه و دامنه داده شده، به دست آورید.

الف) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = x^2 + x + 1$, $A = \{-2, -1, 1, 2\}$

ب) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \frac{x+1}{x}$, $A = \{\frac{1}{2}, 1, -1, 2, -2\}$

ب) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \sqrt{x+1}$, $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 8\}$

ت) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = x$, $A = B = \{0, 1, 2, \dots\}$

ت) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = 0$, $A = \mathbb{R}$

۳. تابع f به هر عدد حقیقی، دو برابر مکعب همان عدد، منهای ۴ را نسبت می دهد. f کدام تابع است؟ حاصل $f(3)$ را بیابید.

الف) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2(x-4)^2$

ب) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2\sqrt{x-4}$

ب) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2x^2 - 4$

ت) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2\sqrt{x-4}$

۴. نمودار تابعی خطی را رسم کنید که دامنه آن برابر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 10\}$ و از نقطه $M \left(\frac{5}{2}, 5 \right)$ بگذرد.

۵. نمودار یک تابع خطی از مبدأ می‌گذرد و $f(2) = 7$ است. در این صورت اختلاف $f(0/8)$ و $f(-0/8)$ را به دست آورید.

۶. رابطه بین درجه دما برحسب سانتی‌گراد و فارنهایت به صورت $F = \frac{9}{5}C + 32$ است. دمای یک جسم 20° درجه سانتی‌گراد بالا رفته است. دمای آن برحسب فارنهایت چقدر افزایش داشته است؟

۷. یک شرکت برای تولید x کالا، $C(x) = 3000 + 50x$ تومان هزینه می‌کند و هر کالا را 70 تومان می‌فروشد.

الف) تابع سود را تعیین و نمودار آن را رسم کنید.

ب) این شرکت حداقل چه تعداد از این کالا را باید بفروشد تا سوددهی آغاز شود؟



کوه‌های مینیاتوری — جابه‌ار

۴. نمودار تابعی خطی را رسم کنید که دامنه آن برابر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 10\}$ و از نقطه $M \left(\frac{5}{2}, 5 \right)$ بگذرد.

۵. نمودار یک تابع خطی از مبدأ می‌گذرد و $f(2) = 7$ است. در این صورت اختلاف $f(0/8)$ و $f(-0/8)$ را به دست آورید.

۶. رابطه بین درجه دما برحسب سانتی‌گراد و فارنهایت به صورت $F = \frac{9}{5}C + 32$ است. دمای یک جسم 20° درجه سانتی‌گراد بالا رفته است. دمای آن برحسب فارنهایت چقدر افزایش داشته است؟

۷. یک شرکت برای تولید x کالا، $C(x) = 3000 + 50x$ تومان هزینه می‌کند و هر کالا را 70 تومان می‌فروشد.

الف) تابع سود را تعیین و نمودار آن را رسم کنید.

ب) این شرکت حداقل چه تعداد از این کالا را باید بفروشد تا سوددهی آغاز شود؟



کوه‌های مینیاتوری — جابه‌ار



معادله تابع درجه دوم در حالت کلی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است که در آن $a \neq 0$ می باشد. نمودار آن به یکی از دو صورت \cup یا \cap است که به آن سهمی می گویم. در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ ، نقطه ای به طول $x = -\frac{b}{2a}$ رأس سهمی است. خطی که از رأس سهمی به موازات محور عرض ها رسم می شود، محور تقارن سهمی است.

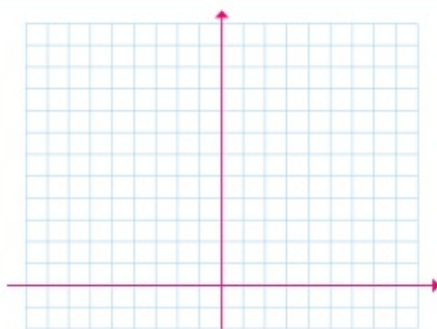
- اگر در معادله سهمی $a > 0$ باشد، شکل سهمی به صورت \cup خواهد بود. در این حالت سهمی در نقطه رأس خود دارای کمترین مقدار است.
- اگر در معادله سهمی $a < 0$ باشد، شکل سهمی به صورت \cap خواهد بود. در این حالت سهمی در نقطه رأس خود دارای بیشترین مقدار است.

فعالیت



ابتدا جدول زیر را کامل کنید؛ سپس به کمک آن نمودار تابع یا ضابطه $f(x) = x^2$ را رسم کنید.

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...		9			0					...



معادله تابع درجه دوم در حالت کلی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است که در آن $a \neq 0$ می باشد. نمودار آن به یکی از دو صورت \cup یا \cap است که به آن سهمی می گویم. در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ ، نقطه ای به طول $x = -\frac{b}{2a}$ رأس سهمی است. خطی که از رأس سهمی به موازات محور عرض ها رسم می شود، محور تقارن سهمی است.

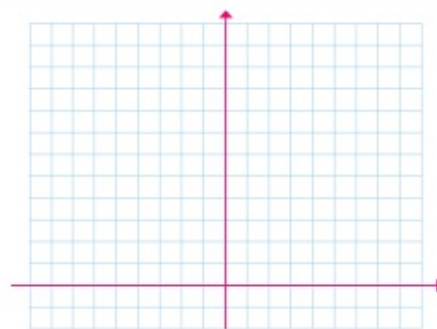
- اگر در معادله سهمی $a > 0$ باشد، شکل سهمی به صورت \cup خواهد بود. در این حالت سهمی در نقطه رأس خود دارای کمترین مقدار است.
- اگر در معادله سهمی $a < 0$ باشد، شکل سهمی به صورت \cap خواهد بود. در این حالت سهمی در نقطه رأس خود دارای بیشترین مقدار است.

فعالیت



ابتدا جدول زیر را کامل کنید؛ سپس به کمک آن نمودار تابع یا ضابطه $f(x) = x^2$ را رسم کنید.

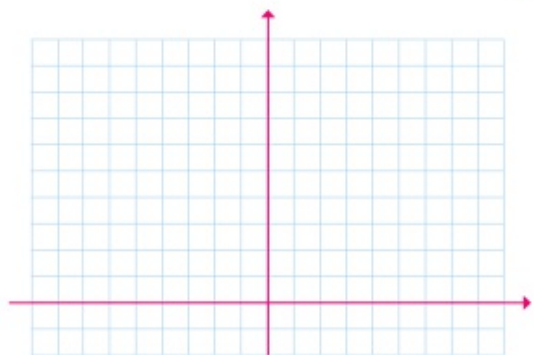
x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...		9			0					...



کار در کلاس

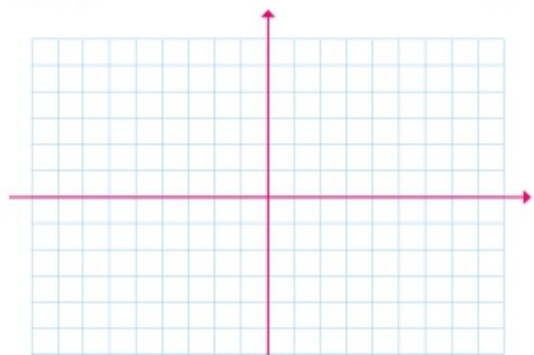


الف) رأس سهمی به معادله $y = 2(x-1)^2 + 1$ را مشخص کنید به کمک آن نمودار سهمی را رسم کنید.



ب) جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن نمودار سهمی به معادله $y = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 5$ را رسم کنید.

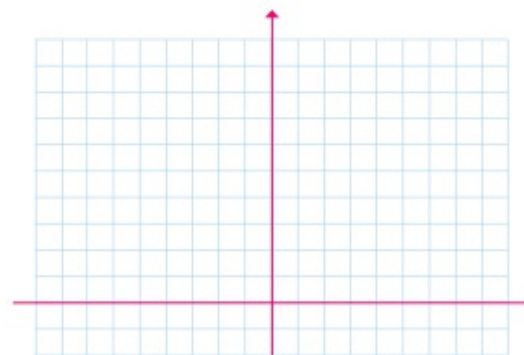
x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	...
y	...				5				...



کار در کلاس

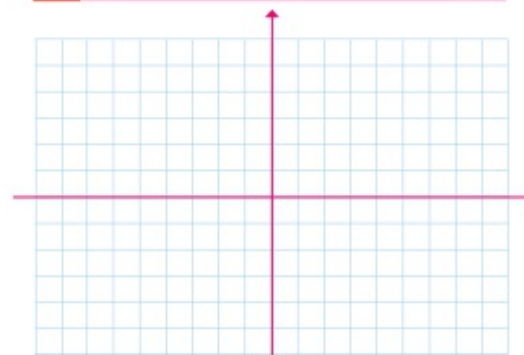


۱. رأس سهمی به معادله $y = 2(x-1)^2 + 1$ را مشخص کنید به کمک آن نمودار سهمی را رسم کنید.



۲. جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن نمودار سهمی به معادله $y = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 5$ را رسم کنید.

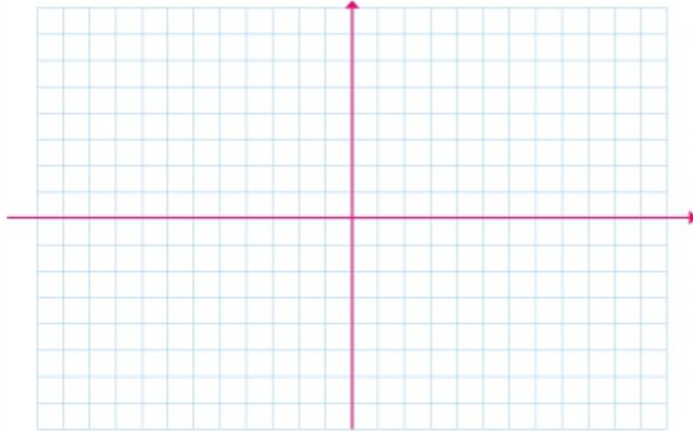
x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	...
y	...				5				...



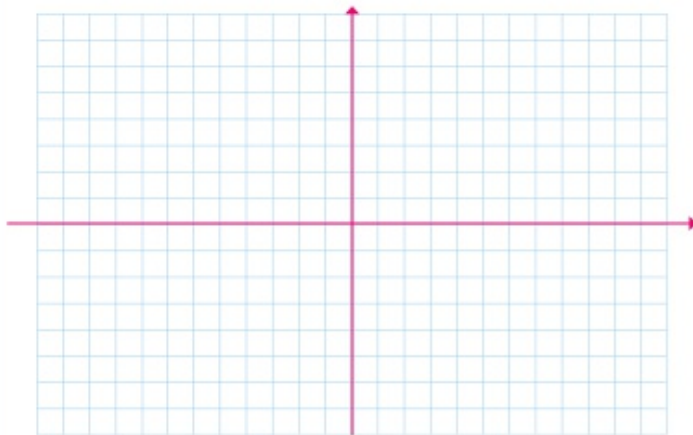
کار در کلاس



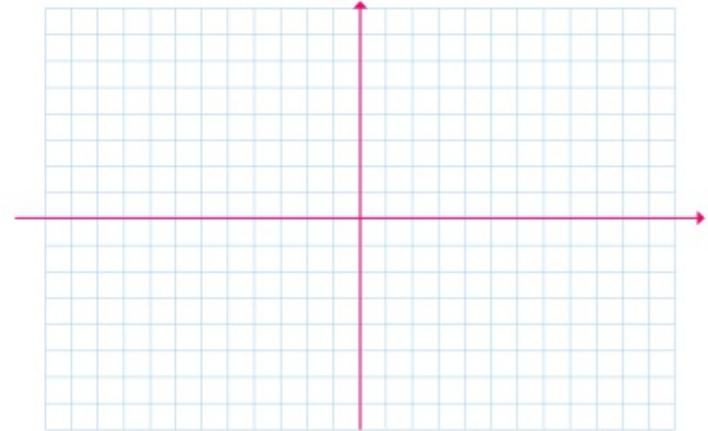
۱. نمودار توابع درجه دوم $y = -x^2 + 6x - 10$ و $y = 2x^2 + 4x + 1$ را رسم کنید.



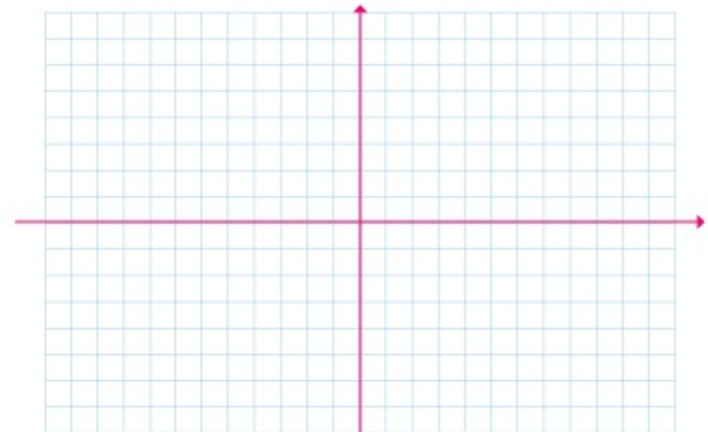
۲. نمودار توابع $y = -x^2 + 6x + 10$ و $y = x^2 + 4x - 2$ را رسم کنید و در ادامه، مختصات برخورد این دو سهمی را مشخص کنید.



۳. نمودار توابع درجه دوم $y = -x^2 + 6x - 10$ و $y = 2x^2 + 4x + 1$ را رسم کنید.



۴. نمودار توابع $y = -x^2 + 6x + 10$ و $y = x^2 + 4x - 2$ را رسم کنید و در ادامه، مختصات برخورد این دو سهمی را مشخص کنید.





تمرین

۱. نمودار سهمی‌های به معادله‌های $y = x^2 - 2x$ و $y = -(x-1)^2 + 1$ و $y = x^2 + 4x + 1$ را رسم کنید.
۲. اگر تابع درآمد به صورت $y = 30x - \frac{1}{2}x^2$ و تابع هزینه به صورت $y = 18x + 40$ باشد، ماکسیم مقدار سود را مشخص کنید.
۳. محیط مستطیلی ۲۶ متر است. اگر اندازه یکی از اضلاع آن را با x و مساحت آن را با s نشان دهیم، ابتدا نمودار تابع مساحت را بر حسب x رسم کنید. سپس به کمک نمودار مشخص کنید به ازای چه مقداری از x مساحت مستطیل ماکسیم می‌شود.
۴. اگر $2x + a = 100$ باشد x و a را طوری بیابید که $y = xa$ ماکسیم شود.
۵. در یک تولیدی، نوعی لامپ، برای مصارف پزشکی تولید می‌شود. این تولیدی هر یک از لامپ‌ها را می‌تواند به قیمت ۲۰۰ تومان بفروشد. اگر در هر روز x واحد لامپ تولید کند و بفروشد و تابع هزینه آن برابر $c(x) = x^2 + 40x + 100$ باشد:
الف) تابع سود روزانه این تولیدی را بنویسید.
ب) چند لامپ در روز تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟
پ) بیشترین سود روزانه این کارگاه چقدر است؟

خواندنی

در روز ۳۱ خرداد، محور زمین در قطب شمال بیشترین انحراف به سمت خورشید را دارد. در این روز، خورشید در هنگام ظهر در بالاترین زاویه ممکن در آن محل قرار دارد. دقت کنید که روز ۳۱ خرداد طولانی‌ترین روز سال در نیم کره شمالی است. اما در عرض‌های بالاتر، این زمان بیشتر است. به عبارت دیگر هر چه به خط استوا نزدیک شویم، طول روز در ۳۱ خرداد عددی کوچک‌تر و هر چه از خط استوا دور شویم عدد بزرگ‌تری می‌یابند. نمودار مقابل تناسبات می‌دهد که طول روز در ایسران در ایام خرداد مساه و تیرماه در شهرهای ایران چه اختلافی با هم دارند.



تمرین

۱. نمودار سهمی‌های به معادله‌های $y = x^2 - 2x$ و $y = -(x-1)^2 + 1$ و $y = x^2 + 4x + 1$ را رسم کنید.
۲. اگر تابع درآمد به صورت $y = 30x - \frac{1}{2}x^2$ و تابع هزینه به صورت $y = 18x + 40$ باشد، ماکسیم مقدار سود را مشخص کنید.
۳. محیط مستطیلی ۲۶ متر است. اگر اندازه یکی از اضلاع آن را با x و مساحت آن را با s نشان دهیم، ابتدا نمودار تابع مساحت را بر حسب x رسم کنید. سپس به کمک نمودار مشخص کنید به ازای چه مقداری از x مساحت مستطیل ماکسیم می‌شود.
۴. اگر $2x + a = 100$ باشد x و a را طوری بیابید که $y = xa$ ماکسیم شود.
۵. در یک تولیدی، نوعی لامپ، برای مصارف پزشکی تولید می‌شود. این تولیدی هر یک از لامپ‌ها را می‌تواند به قیمت ۲۰۰ تومان بفروشد. اگر در هر روز x واحد لامپ تولید کند و بفروشد و تابع هزینه آن برابر $c(x) = x^2 + 40x + 100$ باشد:
الف) تابع سود روزانه این تولیدی را بنویسید.
ب) چند لامپ در روز تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟
پ) بیشترین سود روزانه این کارگاه چقدر است؟

خواندنی

در روز ۳۱ خرداد، محور زمین در قطب شمال بیشترین انحراف به سمت خورشید را دارد. در این روز، خورشید در هنگام ظهر در بالاترین زاویه ممکن در آن محل قرار دارد. دقت کنید که روز ۳۱ خرداد طولانی‌ترین روز سال در نیم کره شمالی است. اما در عرض‌های بالاتر، این زمان بیشتر است. به عبارت دیگر هر چه به خط استوا نزدیک شویم، طول روز در ۳۱ خرداد عددی کوچک‌تر و هر چه از خط استوا دور شویم عدد بزرگ‌تری می‌یابند. نمودار مقابل تناسبات می‌دهد که طول روز در ایسران در ایام خرداد مساه و تیرماه در شهرهای ایران چه اختلافی با هم دارند.





کار در کلاس

یک شبکه‌تولیزی می‌خواهد نسبت دارندگان تولیزیون در شیراز را بداند، که برنامه جدید این شبکه را حداقل یک بار در هفته تماشا می‌کنند. بدین منظور یک گروه ۱۰۰۰ نفری از دارندگان تولیزیون را در این شهر بررسی می‌کند.

الف) داده‌ها و متغیرهایی را که بررسی می‌شوند، مشخص کنید.

جواب: داده‌ها اطلاعات گروه ۱۰۰۰ نفری دارندگان تولیزیون در شیرازند، و متغیر، تماشای تولیزیون است که پاسخ آن «تماشا می‌کند» یا «تماشا نمی‌کند» افراد مورد بررسی است.

ب) آیا این داده‌ها یک نمونه‌اند؟ اگر بله جامعه آماری کدام است؟

پ) متغیر کتبی است یا کیفی؟

ت) چند متغیر کتبی را که ممکن است در اینجا جالب باشد، مشخص کنید.

جواب: سن، درآمد، ...

ث) نسبت افسردگی در نمونه که برنامه جدید را تماشا می‌کنند، آماره است یا پارامتر؟ (تعداد اعضای مورد نظر تقسیم بر تعداد کل اعضای یک مجموعه را نسبت می‌گوییم.)



کار در کلاس

یک شبکه‌تولیزی می‌خواهد نسبت دارندگان تولیزیون در شیراز را بداند، که برنامه جدید این شبکه را حداقل یک بار در هفته تماشا می‌کنند. بدین منظور یک گروه ۱۰۰۰ نفری از دارندگان تولیزیون را در این شهر بررسی می‌کند.

الف) داده‌ها و متغیرهایی را که بررسی می‌شوند، مشخص کنید.

جواب: داده‌ها اطلاعات گروه ۱۰۰۰ نفری دارندگان تولیزیون در شیرازند، و متغیر، تماشای تولیزیون است که پاسخ آن «تماشا می‌کند» یا «تماشا نمی‌کند» افراد مورد بررسی است.

ب) آیا این داده‌ها یک نمونه‌اند؟ اگر بله جامعه آماری کدام است؟

پ) متغیر کتبی است یا کیفی؟

ت) چند متغیر کتبی را که ممکن است در اینجا جالب باشد، مشخص کنید.

جواب: سن، درآمد، ...

ث) نسبت افسردگی در نمونه که برنامه جدید را تماشا می‌کنند، آماره است یا پارامتر؟ (تعداد اعضای مورد نظر تقسیم بر تعداد کل اعضای یک مجموعه را نسبت می‌گوییم.)

مقیاس‌های اندازه‌گیری

داده‌ها را به دو گروه کتبی و کیفی تقسیم کردیم. از نگاهی دیگر، می‌توان متغیرهای داده‌ها را در چهار مقیاس اندازه‌گیری دسته‌بندی کرد. اندازه‌گیری در تعریف به معنی ایجاد تفکیک بین افراد یا اشیا است. وقتی دو نوزاد دو فلور را نام‌گذاری می‌کنیم تا آنها را تفکیک کنیم، در واقع اندازه‌گیری کرده‌ایم. بسته به دقتی که این اندازه‌گیری صورت می‌گیرد آن را به چهار مقیاس اسمی، ترتیبی، فاصله‌ای و نسبتی تقسیم می‌کنیم. هدف از شناسایی این مقیاس‌ها تعیین نوع محاسبه مناسب برای داده‌ها است؛ نظیر ترتیب، محاسبه اختلاف و نسبت گرفتن.

مقیاس‌های اندازه‌گیری

داده‌ها را به دو گروه کتبی و کیفی تقسیم کردیم. از نگاهی دیگر، می‌توان متغیرهای داده‌ها را در چهار مقیاس اندازه‌گیری دسته‌بندی کرد. اندازه‌گیری در تعریف به معنی ایجاد تفکیک بین افراد یا اشیا است. وقتی دو نوزاد دو فلور را نام‌گذاری می‌کنیم تا آنها را تفکیک کنیم، در واقع اندازه‌گیری کرده‌ایم. بسته به دقتی که این اندازه‌گیری صورت می‌گیرد آن را به چهار مقیاس اسمی، ترتیبی، فاصله‌ای و نسبتی تقسیم می‌کنیم. هدف از شناسایی این مقیاس‌ها تعیین نوع محاسبه مناسب برای داده‌ها است؛ نظیر ترتیب، محاسبه اختلاف و نسبت گرفتن.

اسمی: این مقیاس برای متغیرهایی است که شامل نام‌ها، برجسب‌ها و گروه‌ها می‌شود. در اینجا هیچ معیاری که با آن بتوان داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کرد وجود ندارد؛ مانند گروه خونی انسان‌ها، کد ملی، رمز کارت بانکی و شناسنامه دانش‌آموزی. کدهای عددی در این مقیاس در واقع عدد نیستند؛ بلکه صرفاً برای نام‌گذاری و گروه‌بندی به کار می‌رود. انجام چهار عمل اصلی روی این متغیرها غیر ممکن است.

ترتیبی: این مقیاس با استفاده از الفاظ یا اعداد جهت نام‌گذاری، ضمن ایجاد تفکیک بین افراد و اشیا، ارجحیت یا ترتیب نیز قابل می‌شود. مقیاس ترتیبی برای متغیرهایی است که قابل مرتب کردن هستند و در عین حال محاسبه قابل مرتب کردن هستند و در عین حال محاسبه اختلاف بین مقادیر داده‌ها، یا امکان پذیر نیست یا بی‌معناست؛ مانند رتبه دانش‌آموزان در یک کلاس. اگر رتبه‌های اول تا سوم معدل ۱۹، ۱۶، ۱۸، ۱۳ کسب کرده باشند به آنها به ترتیب رتبه ۱، ۲، ۳ می‌دهیم و توجه نمی‌کنیم که اختلاف نمره‌های آنها چقدر است.

فاصله‌ای: این مقیاس به دلیل استفاده از لوازم یا قواعد دقیق اندازه‌گیری ویژگی افراد یا اشیا به دقت اندازه‌گیری می‌شود. به بیان دیگر مقیاس فاصله‌ای برای داده‌هایی است که قابل مرتب کردن هستند و همچنین اختلاف بین مقادیر داده‌ها با معناست؛ مانند درجه حرارت در شهرهای مختلف برجسب سلسیوس. مقداری که به دو نفر یا دو شیء داده می‌شود صرفاً بیان‌کننده فاصله بین آنها است. در نتیجه صفر در این مقیاس قراردادی است. مثلاً اگر دمای پوشهر ۲۰ و تهران ۱۰ درجه سلسیوس باشد نمی‌توان گفت دمای هوای پوشهر دو برابر تهران است؛ ولی می‌توان گفت که اختلاف دما ۱۰ درجه سلسیوس است. اعمال جمع و تفریق روی داده‌ها قابل انجام است.

نسبتی: این مقیاس برای داده‌هایی است که قابل مرتب کردن هستند و همچنین ارجحیت نیز قابل می‌شود. به بیان دیگر مقیاس فاصله‌ای برای داده‌هایی است که قابل مرتب کردن هستند و در عین حال محاسبه قابل مرتب کردن هستند و در عین حال محاسبه اختلاف بین مقادیر داده‌ها، یا امکان پذیر نیست یا بی‌معناست؛ مانند رتبه دانش‌آموزان در یک کلاس. اگر رتبه‌های اول تا سوم معدل ۱۹، ۱۶، ۱۸، ۱۳ کسب کرده باشند به آنها به ترتیب رتبه ۱، ۲، ۳ می‌دهیم و توجه نمی‌کنیم که اختلاف نمره‌های آنها چقدر است.

اسمی: این مقیاس برای متغیرهایی است که شامل نام‌ها، برجسب‌ها و گروه‌ها می‌شود. در اینجا هیچ معیاری که با آن بتوان داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کرد وجود ندارد؛ مانند گروه خونی انسان‌ها و شناسنامه دانش‌آموزی. کدهای عددی در این مقیاس در واقع عدد نیستند؛ بلکه صرفاً برای گروه‌بندی به کار می‌رود.

ترتیبی: این مقیاس با استفاده از الفاظ، ضمن ایجاد تفکیک بین افراد و اشیا، ارجحیت نیز قابل می‌شود. مقیاس ترتیبی برای متغیرهایی است که قابل مرتب کردن هستند و در عین حال محاسبه اختلاف بین مقادیر داده‌ها، یا امکان پذیر نیست یا بی‌معناست؛ مانند رتبه دانش‌آموزان در یک کلاس. اگر رتبه‌های اول تا سوم معدل ۱۹، ۱۶، ۱۸، ۱۳ کسب کرده باشند به آنها به ترتیب رتبه ۱، ۲، ۳ می‌دهیم و توجه نمی‌کنیم که اختلاف نمره‌های آنها چقدر است.

فاصله‌ای: این مقیاس به دلیل استفاده از لوازم یا قواعد دقیق اندازه‌گیری ویژگی افراد یا اشیا به دقت اندازه‌گیری می‌شود. به بیان دیگر مقیاس فاصله‌ای برای داده‌هایی است که قابل مرتب کردن هستند و همچنین اختلاف بین مقادیر داده‌ها با معناست؛ مانند درجه حرارت در شهرهای مختلف برجسب سلسیوس. مقداری که به دو نفر یا دو شیء داده می‌شود صرفاً بیان‌کننده فاصله بین آنها است. در نتیجه صفر در این مقیاس قراردادی است. مثلاً اگر دمای پوشهر ۲۰ و تهران ۱۰ درجه سلسیوس باشد نمی‌توان گفت دمای هوای پوشهر دو برابر تهران است؛ ولی می‌توان گفت که اختلاف دما ۱۰ درجه سلسیوس است.

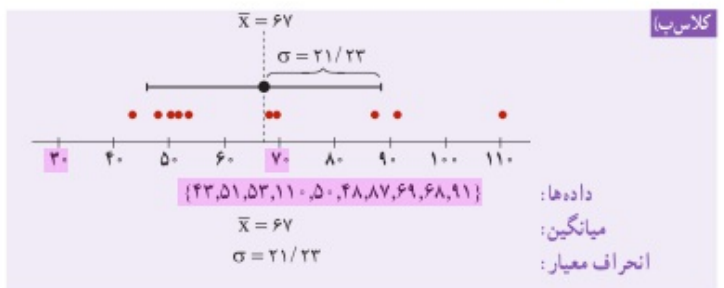
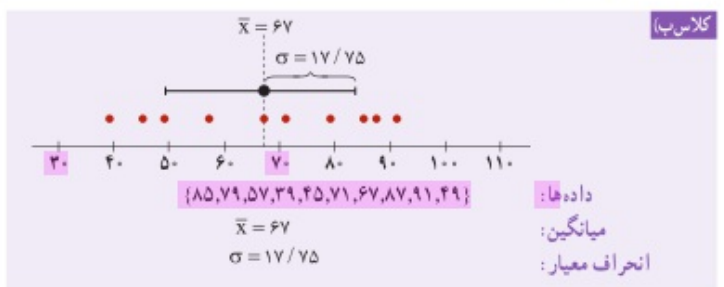
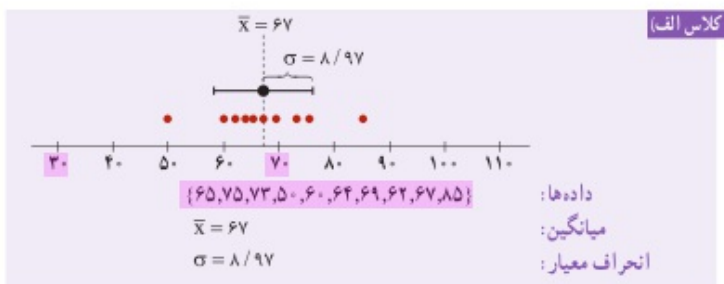
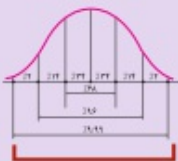
نسبتی: این مقیاس برای داده‌هایی است که قابل مرتب کردن هستند و اختلاف بین مقادیر داده‌ها، و نسبت مقادیر داده‌ها نیز با معنای است. اغلب متغیرهای فیزیکی مانند نمره، وزن و قد دانش‌آموزان و متغیرهایی که بسا واژه تعداد شروع می‌شوند در این مقیاس اندازه‌گیری می‌شوند. در این مقیاس صفر به معنای نبود ویژگی در فرد یا شیء است.



مشاهده می‌شود که انحراف معیار، نه تنها نظر شما در خصوص کلاس با بیشترین پراکندگی نمره‌ها را تأیید می‌کند، بلکه به شما امکان مقایسه کتی آنها را نیز می‌دهد. حال می‌توانید درستی پاسخ‌های خود را بررسی کنید.

پراکندگی در خم پنجمار (منحنی نرمال)

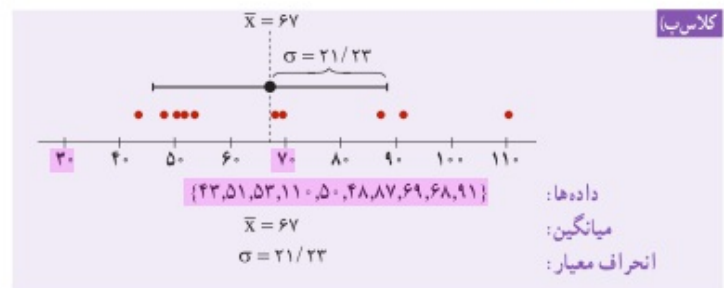
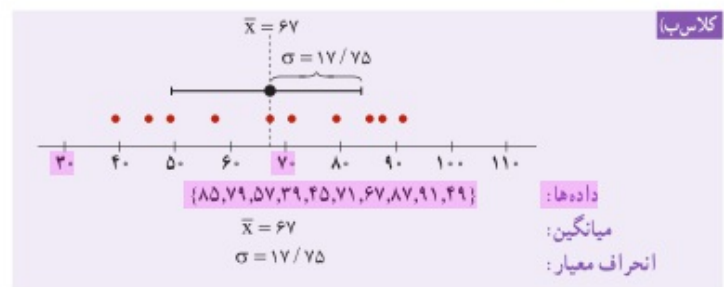
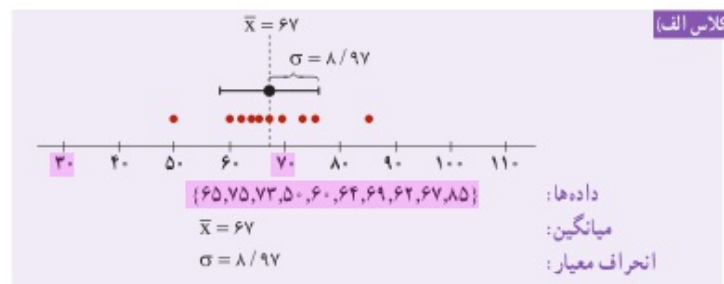
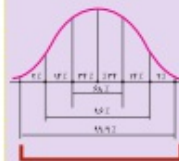
اگر تعداد داده‌ها زیاد باشد، بافت نگاشت (هیستوگرام) آنها را می‌توان به صورت یک خم تصور کرد. اگر این خم به صورت یک «زنگ» باشد، به آن خم پنجمار گفته می‌شود. خداوند بسیاری از پدیده‌ها را پنجمار آفریده است. مثلاً طول قد یا وزن دانش‌آموزان پنجمارند؛ یعنی بافت نگاشتی زنگی شکل دارند. خواص این خم، کمک زیادی برای تصمیم‌گیری بر اساس داده‌ها یا کسب اطلاعات از آنها می‌کند. به یاد دارید که گفته شد اگر σ انحراف معیار داده‌ها باشد، چند درصد از داده‌ها به طور تقریبی بین میانگین که در واقع گرانگه‌ها با مرکز نقل بافت‌نگاشت است و چه ضرایبی از انحراف معیار قرار دارد؟ این اطلاعات را به طور مختصر در شکل زیر ملاحظه می‌کنید (مقادیر روی نمودار تقریبی هستند):



مشاهده می‌شود که انحراف معیار، نه تنها نظر شما در خصوص کلاس با بیشترین پراکندگی نمره‌ها را تأیید می‌کند، بلکه به شما امکان مقایسه کتی آنها را نیز می‌دهد. حال می‌توانید درستی پاسخ‌های خود را بررسی کنید.

پراکندگی در خم پنجمار (منحنی نرمال)

اگر تعداد داده‌ها زیاد باشد، بافت نگاشت (هیستوگرام) آنها را می‌توان به صورت یک خم تصور کرد. اگر این خم به صورت یک «زنگ» باشد، به آن خم پنجمار گفته می‌شود. خداوند بسیاری از پدیده‌ها را پنجمار آفریده است. مثلاً طول قد یا وزن دانش‌آموزان پنجمارند؛ یعنی بافت نگاشتی زنگی شکل دارند. خواص این خم، کمک زیادی برای تصمیم‌گیری بر اساس داده‌ها یا کسب اطلاعات از آنها می‌کند. به یاد دارید که گفته شد اگر σ انحراف معیار داده‌ها باشد، چند درصد از داده‌ها به طور تقریبی بین میانگین که در واقع گرانگه‌ها با مرکز نقل بافت‌نگاشت است و چه ضرایبی از انحراف معیار قرار دارد؟ این اطلاعات را به طور مختصر در شکل زیر ملاحظه می‌کنید (مقادیر روی نمودار تقریبی هستند):



کار در کلاس



جدول زیر را تکمیل کنید.

$-3\sigma < \bar{x} < 3\sigma$	تقریباً ۹۹/۹ درصد از مشاهدات در فاصله سه برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند.
$-2\sigma < \bar{x} < 2\sigma$	تقریباً از مشاهدات در فاصله انحراف معیار از میانگین قرار دارند.
.....	تقریباً از مشاهدات در فاصله یک برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند.

فعالیت



می‌خواهیم با همان مثال خیریه درس قبل، بحث را ادامه دهیم. اگر انحراف معیار مجموعه داده‌ها کوچک باشد، بدین معناست که درآمد همه افراد به هم نزدیک است. اگر انحراف معیار بزرگ باشد، بدین معناست که درآمد افراد آن انجمن، بسیار متفاوت است. انحراف معیار درآمد اعضا به صورت زیر محاسبه می‌شود. به کمک جدول زیر، این کار را انجام دهید.

مشاهدات		انحراف مشاهدات از میانگین		انحراف مشاهدات از میانگین به توان ۲	
بعد از ورود میلیارد	قبل از ورود میلیارد	بعد از ورود میلیارد	قبل از ورود میلیارد	بعد از ورود میلیارد	قبل از ورود میلیارد
۴۰	۴۰				
۱۲	۱۲				
۲۸	۲۸				
۳۲	۳۲				
۳۰	۳۰				
۲۲	۲۲				
۲۵	۲۵				
	۱۰۰۰				

کار در کلاس



جدول زیر را تکمیل کنید.

تقریباً ۹۹/۹ درصد از مشاهدات در فاصله سه برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند.
تقریباً از مشاهدات در فاصله انحراف معیار از میانگین قرار دارند.
تقریباً از مشاهدات در فاصله یک برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند.

فعالیت



می‌خواهیم با همان مثال خیریه درس قبل، بحث را ادامه دهیم. اگر انحراف معیار مجموعه داده‌ها کوچک باشد، بدین معناست که درآمد همه افراد به هم نزدیک است. اگر انحراف معیار بزرگ باشد، بدین معناست که درآمد افراد آن انجمن، بسیار متفاوت است. انحراف معیار درآمد اعضا به صورت زیر محاسبه می‌شود. به کمک جدول زیر، این کار را انجام دهید.

مشاهدات		انحراف مشاهدات از میانگین		انحراف مشاهدات از میانگین به توان ۲	
بعد از ورود میلیارد	قبل از ورود میلیارد	بعد از ورود میلیارد	قبل از ورود میلیارد	بعد از ورود میلیارد	قبل از ورود میلیارد
۴۰	۴۰				
۱۲	۱۲				
۲۸	۲۸				
۳۲	۳۲				
۳۰	۳۰				
۲۲	۲۲				
۲۵	۲۵				
	۱۰۰۰				

شعارهای برتر
سال جهانی آمار

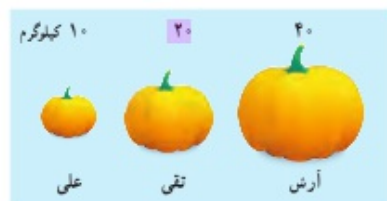


آمارهای دقیق،
پشتوانه توسعه پایدار
♦♦♦
آمار، ابزاری علمی
در توسعه مبتنی بر
دانشی

شعارهای برتر
سال جهانی آمار



آمارهای دقیق،
پشتوانه توسعه پایدار
♦♦♦
آمار، ابزاری علمی
در توسعه مبتنی بر
دانشی



گاهی برای نمایش داده‌ها از یک تصویر استفاده می‌شود، مانند شکل روبه‌رو.

این تصویر، داده‌ها را از شکل طبیعی خارج می‌کند. برای نمایش تفاوت میانگین وزن‌ها، این تصویر ارتفاع هر کدوتیل را، برای نشان دادن وزنش، تغییر می‌دهد. ارتفاع

کدوتیل تقی (با وزن ۲۰ کیلوگرم) دو برابر ارتفاع کدوتیل علی (۱۰ کیلوگرم) است، ارتفاع کدوتیل آرش (۴۰ کیلوگرم) دو برابر ارتفاع کدوتیل تقی و چهار برابر ارتفاع کدوتیل علی است. آیا این شکل، اطلاعات مورد نظر را به درستی به بیننده منتقل می‌کند؟ (راهنمایی: فرمول‌های محاسبه و مساحت را به یاد آورید: مساحت مستطیل = طول × عرض. مساحت دایره = πr^2)

شما این شکل را چگونه رسم می‌کنید تا اطلاعات موجود را بهتر نمایش دهد؟
به نظر شما آیا رنگ در انتقال نظر تان به بیننده تأثیر دارد؟

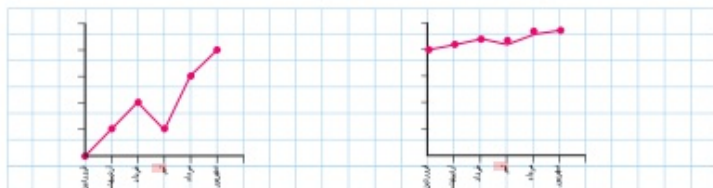


تمرین

۱. سود خالص یک شرکت خدماتی در شش ماه نخست سال بر حسب میلیارد ریال به صورت زیر است:

فروردین	اردیبهشت	خرداد	تیر	مرداد	شهریور
۲/۰	۲/۱	۲/۲	۲/۱	۲/۳	۲/۴

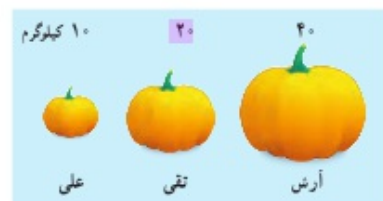
خریدار و فروشنده سهام این شرکت، نمودارهای زیر را رسم کرده‌اند. اعداد روی محورها را مشخص کنید:



نمودار از دید فروشنده

نمودار از دید خریدار

به نظر شما کدام یک منطقی‌تر است؟ آیا می‌توانید نموداری بهتر از این دو نمودار رسم کنید؟



گاهی برای نمایش داده‌ها از یک تصویر استفاده می‌شود، مانند شکل روبه‌رو.

این تصویر، داده‌ها را از شکل طبیعی خارج می‌کند. برای نمایش تفاوت میانگین وزن‌ها، این تصویر ارتفاع هر کدوتیل را، برای نشان دادن وزنش، تغییر می‌دهد. ارتفاع

کدوتیل تقی (با وزن ۲۰ کیلوگرم) دو برابر ارتفاع کدوتیل علی (۱۰ کیلوگرم) است، ارتفاع کدوتیل آرش (۴۰ کیلوگرم) دو برابر ارتفاع کدوتیل تقی و چهار برابر ارتفاع کدوتیل علی است. آیا این شکل، اطلاعات مورد نظر را به درستی به بیننده منتقل می‌کند؟ (راهنمایی: فرمول‌های محاسبه و مساحت را به یاد آورید: مساحت مستطیل = طول × عرض. مساحت دایره = πr^2)

شما این شکل را چگونه رسم می‌کنید تا اطلاعات موجود را بهتر نمایش دهد؟
به نظر شما آیا رنگ در انتقال نظر تان به بیننده تأثیر دارد؟



تمرین

۱. سود خالص یک شرکت خدماتی در شش ماه نخست سال بر حسب میلیارد ریال به صورت زیر است:

فروردین	اردیبهشت	خرداد	تیر	مرداد	شهریور
۲/۰	۲/۱	۲/۲	۲/۱	۲/۳	۲/۴

خریدار و فروشنده سهام این شرکت، نمودارهای زیر را رسم کرده‌اند. اعداد روی محورها را مشخص کنید:



نمودار از دید فروشنده

نمودار از دید خریدار

به نظر شما کدام یک منطقی‌تر است؟ آیا می‌توانید نموداری بهتر از این دو نمودار رسم کنید؟

