

مقدمه! مولفان

سلام به همه دانش‌آموزان، دبیران و مشاوران

به کتاب پاسخ‌نامه ریاضی تجربی جامع خوش آمدید! خیلی سریع و مختصر چند مورد رو بگیم و بریم!

■ ویژگی‌های پاسخ:

- ➊ مهم‌ترین‌شان، حل گام به گام تست‌ها است. این کار به یادگیری بهتر شما خیلی کمک می‌کند.
- ➋ در کنار عملیات‌های ریاضی، توضیحات کامل مکتوب هم برایتان آورده‌ایم تا متوجه بشوید چه کار کرده‌ایم.
- ➌ اگر سؤالی چند روش حل مرسوم داشته، سعی کردیم حداقل ۲ تا از آن روش‌ها را بیاوریم.
- ➍ در جلد پاسخ آیکون‌های زیر را می‌بینید:

نکته	فرمول یا یک رابطه مهم یا گزاره‌ای که لازم است آن را بلد باشید.
تذکر	گوشزدهای ضروری!
شفاف‌سازی	بعضی وقت‌ها لازم است قسمتی از صورت سؤال را با زبان ساده‌تری بیان کنیم.
روش اول روش دوم	بعضی سؤالات دو روش حل دارند.
تیزبازی	روش سریع یا خلاقانه که در بعضی تست‌ها قابل استفاده است.
تله	بعضی اشتباهات خیلی رایج هستند. در یک سری سؤالات، جوابی که از راه حل‌های اشتباه رایج به دست می‌آیند، توسط طراح در گزینه‌ها قرار داده شده است و شما در تله طراح می‌افتید!
حواستون باشه	بی دقتی‌های خیلی رایج که باید مراقبشون باشین!
کمی عمیق‌تر	در بعضی از سؤال‌ها لازم است برای دانش‌آموزان دقیق و ریزبین، یک سری توضیحات بیشتر بدهیم.

■ حرف آخر:

اگر پیشنهادی دارید یا جایی نقصی می‌بینید آن را از طریق سایت خیلی سبز یا آیدی‌های زیر با ما در میان بگذارید. ممنون از شما.

📧 shahraabiali

📧 mathmohsenimanesh

📧 soroushmueeni



فصل ۱: تابع

فصل ۵ ریاضی دهم - فصل ۳ ریاضی یازدهم - فصل ۱

ریاضی دوازدهم

شماره
پاسخ

شماره
صفحه

درس ۱ رابطه و بازتابی‌های یک رابطه ۸ ۱

درس ۲ مفهوم دامنه و برد - تعیین دامنه - تساوی دو تابع

..... ۱۳ ۴۵

درس ۳ انواع تابع ۲۴ ۱۰۹

درس ۴ تبدیل نمودارها ۳۲ ۱۶۵

درس ۵ توابع چندجمله‌ای ۴۵ ۲۳۲

درس ۶ اعمال جبری روی توابع ۵۰ ۲۵۷

درس ۷ ترکیب توابع ۵۷ ۲۹۵

درس ۸ یکنوایی ۷۲ ۳۸۴

درس ۹ تابع یک به یک ۸۵ ۴۵۵

درس ۱۰ وارون تابع و تابع وارون ۸۹ ۴۷۶

درس ۱۱ برد ۱۱۲ ۵۹۷

فصل ۲: مثلثات

فصل ۲ ریاضی دهم - فصل ۴ ریاضی یازدهم -

فصل ۲ ریاضی دوازدهم

درس ۱ رادیان ۱۱۸ ۶۳۲

درس ۲ نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه ۱۲۱ ۶۵۴

درس ۳ دایره مثلثاتی ۱۲۹ ۷۰۹

درس ۴ اتحادهای مثلثاتی مقدماتی ۱۳۴ ۷۵۰

درس ۵ زاویه‌های ترکیبی ۱۴۰ ۷۹۰

درس ۶ اتحادهای α ۱۴۵ ۸۱۹

درس ۷ توابع متناوب ۱۵۵ ۸۹۶

درس ۸ نمودار توابع سینوسی و کسینوسی ۱۵۷ ۹۱۵

درس ۹ تانژانت ۱۶۴ ۹۶۰

درس ۱۰ معادله مثلثاتی ۱۶۸ ۹۹۰

فصل ۳: حد و پیوستگی

فصل ۶ ریاضی یازدهم - فصل ۳ ریاضی دوازدهم

درس ۱ تقسیم چندجمله‌ای‌ها ۱۸۲ ۱۰۷۲

درس ۲ همسایگی ۱۸۴ ۱۰۹۲

درس ۳ فرایندهای حدی و قوانین محاسبه حد ۱۸۵ ۱۱۰۱

درس ۴ رفع ابهام صفرصفرم ($\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$) ۱۹۶ ۱۱۸۲

درس ۵ حد بی‌نهایت ۲۰۹ ۱۲۷۱

درس ۶ حد در بی‌نهایت ۲۲۰ ۱۳۴۰

درس ۷ پیوستگی ۲۳۰ ۱۴۱۳

فصل ۴: مشتق

فصل ۴ ریاضی دوازدهم

درس ۱ آشنایی با مفهوم مشتق ۲۴۳ ۱۴۹۲

درس ۲ قواعد مشتق‌گیری ۲۴۷ ۱۵۲۹

درس ۳ قواعد مشتق‌گیری با چشم‌های باز (عامل صفرشونده)

..... ۲۵۳ ۱۵۷۸ (ساده کردن)

درس ۴ احتمال شرطی ۲۳۷۲ ۳۷۶

درس ۵ پیشامدهای مستقل ۲۴۰۲ ۳۸۱

درس ۶ قانون احتمال کل ۲۴۳۹ ۳۸۶

فصل ۸: قدرمطلق و جزء صحیح

درس ۱ قدرمطلق ۲۴۷۰ ۳۹۱

درس ۲ جزء صحیح ۲۵۱۸ ۳۹۸

فصل ۹: معادله درجه دوم و سهمی

فصل ۴ ریاضی دهم - فصل ۱ ریاضی یازدهم

درس ۱ معادله درجه دوم ۲۵۶۸ ۴۰۵

درس ۲ سهمی ۲۶۹۹ ۴۲۶

فصل ۱۰: معادله، نامعادله و تعیین علامت

فصل ۴ ریاضی دهم - فصل ۱ ریاضی یازدهم

درس ۱ معادلات گویا ۲۸۰۲ ۴۴۵

درس ۲ معادلات گنگ ۲۸۴۳ ۴۵۲

درس ۳ تعیین علامت و نامعادله ۲۸۸۱ ۴۵۸

فصل ۱۱: هندسه تحلیلی

فصل ۱ ریاضی یازدهم

درس ۱ یادآوری و تکمیل معادله خط ۲۹۴۸ ۴۷۰

درس ۲ فاصله دو نقطه - نقطه وسط پاره خط ۲۹۷۴ ۴۷۳

درس ۳ فاصله نقطه از خط ۳۰۰۲ ۴۷۷

فصل ۱۲: توابع نمایی و لگاریتمی

فصل ۵ ریاضی یازدهم

درس ۱ تابع نمایی ۳۰۴۴ ۴۸۵

درس ۲ لگاریتم ۳۰۹۴ ۴۹۳

درس ۴ مشتق مرتبه دوم ۱۶۰۷ ۲۵۷

درس ۵ معادله خط مماس بر منحنی ۱۶۲۳ ۲۵۹

درس ۶ مشتق چپ و راست - مشتق توابع چندضابطه‌ای،

قدرمطلق و برآکتی ۱۶۷۰ ۲۶۷

درس ۷ مشتق پذیری (در نقطه و بازه) ۱۷۱۲ ۲۷۳

درس ۸ دامنه و نمودار تابع مشتق ۱۷۷۲ ۲۸۲

درس ۹ مشتق تابع مرکب ۱۷۹۱ ۲۸۵

درس ۱۰ آهنگ تغییر ۱۸۵۱ ۲۹۳

فصل ۵: کاربرد مشتق

فصل ۵ ریاضی دوازدهم

درس ۱ بررسی یکنوایی تابع به کمک مشتق ۱۸۷۹ ۲۹۷

درس ۲ نقطه بحرانی ۱۹۱۴ ۳۰۲

درس ۳ اکسترم‌های نسبی ۱۹۶۲ ۳۰۹

درس ۴ اکسترم‌های مطلق ۲۰۲۴ ۳۱۹

درس ۵ بهینه‌سازی ۲۰۵۷ ۳۲۶

فصل ۶: هندسه (تفکر تجسمی و ...)

فصل ۶ ریاضی دوازدهم

درس ۱ تفکر تجسمی ۲۱۱۹ ۳۳۸

درس ۲ بیضی ۲۱۶۰ ۳۴۴

درس ۳ دایره ۲۲۰۶ ۳۵۰

فصل ۷: احتمال

فصل ۷ ریاضی دهم - فصل ۷ ریاضی یازدهم - فصل ۷

ریاضی دوازدهم

درس ۱ فضای نمونه‌ای و پیشامد ۲۲۷۸ ۳۶۳

درس ۲ احتمال یک پیشامد ۲۲۹۲ ۳۶۴

درس ۳ قوانین احتمال ۲۳۵۶ ۳۷۳

فصل ۱۳: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

فصل ۳ ریاضی دهم

- درس ۱ توان و ریشه ۳۲۴۷ ۵۱۶
- درس ۲ توان‌های گویا ۳۲۶۸ ۵۱۸
- درس ۳ اتحادهای جبری ۳۲۸۶ ۵۲۰
- درس ۴ گویاکردن مخرج کسرها ۳۳۵۷ ۵۲۸

فصل ۱۴: مجموعه و بازه

فصل ۱ ریاضی دهم

- درس ۱ مجموعه‌های اعداد، بازه، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ۳۳۸۳ ۵۳۱
- درس ۲ مجموعه مرجع و متمم ۳۴۰۴ ۵۳۴
- درس ۳ تعداد اعضای مجموعه ۳۴۱۶ ۵۳۶

فصل ۱۵: الگو و دنباله

فصل ۱ ریاضی دهم

- درس ۱ الگو و دنباله ۳۴۳۵ ۵۴۰
- درس ۲ دنباله حسابی ۳۴۷۰ ۵۴۵
- درس ۳ دنباله هندسی ۳۵۱۲ ۵۵۲

فصل ۱۶: شمارش، بدون شمردن

فصل ۶ ریاضی دهم

- درس ۱ شمارش ۳۵۶۷ ۵۶۰
- درس ۲ جایگشت ۳۶۰۳ ۵۶۴
- درس ۳ ترکیب ۳۶۴۵ ۵۶۸

فصل ۱۷: آمار

فصل ۷ ریاضی دهم - فصل ۷ ریاضی یازدهم

- درس ۱ مقدمه‌ای بر علم آمار ۳۶۹۹ ۵۷۴
- درس ۲ شاخص‌های مرکزی ۳۷۰۳ ۵۷۴
- درس ۳ شاخص‌های پراکندگی ۳۷۲۸ ۵۷۷

فصل ۱۸: هندسه

فصل ۲ ریاضی یازدهم

- درس ۱ ترسیم‌های هندسی ۳۷۹۰ ۵۸۵
- درس ۲ استدلال ۳۸۱۰ ۵۸۸
- درس ۳ نسبت و تناسب - قضیه تالس ۳۸۱۵ ۵۸۹
- درس ۴ تشابه مثلث‌ها ۳۸۵۵ ۵۹۷
- درس ۵ نسبت مساحت‌ها ۳۸۸۴ ۶۰۳
- درس ۶ روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ۳۹۱۳ ۶۰۹



حالا با داشتن $\cos 2x = -\frac{1}{9}$ ، باید $\cos x$ و $\cos 4x$ را به دست آوریم:

اول $\cos x$: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow -\frac{1}{9} = 2\cos^2 x - 1$

$\Rightarrow 2\cos^2 x = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{9} \xrightarrow{\text{حاده } x} \cos x = \frac{2}{3}$

برای محاسبه $\cos 4x$ در اتحاد $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ ، جای α می نویسیم

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2\left(-\frac{1}{9}\right)^2 - 1 = \frac{2}{81} - 1 = -\frac{79}{81}$

پس: $\cos x + \cos 4x = \frac{2}{3} + \frac{-79}{81} = \frac{54 - 79}{81} = -\frac{25}{81}$

در صورت و مخرج کسر اول به جای $\cos^2 \alpha$ می نویسیم

$1 - \sin^2 \alpha$ و در صورت و مخرج کسر دوم به جای $\sin^2 \alpha$ می نویسیم $1 - \cos^2 \alpha$

$$\frac{\sin^2 \alpha + 4\cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha + 4\sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - 4\sin^2 \alpha + 4}{2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha - 4\cos^2 \alpha + 4}{2 - \cos^2 \alpha}$$

صورت هر دو کسر با اتحاد مربع، تجزیه می شود:

$$= \frac{(2 - \sin^2 \alpha)^2}{2 - \sin^2 \alpha} - \frac{(2 - \cos^2 \alpha)^2}{2 - \cos^2 \alpha} = (2 - \sin^2 \alpha) - (2 - \cos^2 \alpha)$$

$$= 2 - \sin^2 \alpha - 2 + \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

تیزبازی: جای α ها $\frac{\pi}{4}$ قرار می دهیم:

$$\frac{\sin^2 \alpha + 4\cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha + 4\sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} = \frac{1+0}{1+0} - \frac{0+4}{1+1} = 1 - 2 = -1$$

با جای گذاری $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ، فقط مقدار ۳، برابر با -۱ می شود:

$$\cos 2\alpha = \cos \pi = -1$$

جای $\cos 2x$ می نویسیم $1 - 2\sin^2 x$:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow 2\cos^2 x + 2\sin^2 x - 1 = 0$$

با فرض $\sin^2 x = t$ داریم:

$$24t^2 + 22t - 1 = 0 \xrightarrow{\text{روسی}} t^2 + 22t - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (t+6)(t-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -6 \\ t = 4 \end{cases} \xrightarrow{\div 24} \begin{cases} t = \frac{-1}{6} \times (t > 0) \\ t = \frac{1}{6} \checkmark \end{cases}$$

پس $\sin^2 x = \frac{1}{6}$ ، از اتحاد $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ داریم:

$$1 + \cot^2 x = 6 \Rightarrow \cot^2 x = 5$$

مجموع زوایای داخلی مثلث 180° است؛ پس:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{C}$$

از تساوی $\tan(A+B) = 2\sqrt{2}$ ، نتیجه می گیریم:

$$\tan(180^\circ - \hat{C}) = 2\sqrt{2} \Rightarrow -\tan \hat{C} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \tan \hat{C} = -2\sqrt{2}$$

چون $\tan \hat{C}$ منفی شد، پس $\hat{C}$ زاویه ای منفرجه است. کسینوس

را پیدا می کنیم:

$$1 + \frac{\tan^2 \hat{C}}{\cos^2 \hat{C}} = \frac{1}{\cos^2 \hat{C}} \Rightarrow \cos^2 \hat{C} = \frac{1}{9} \xrightarrow{90^\circ < \hat{C} < 180^\circ} \cos \hat{C} = -\frac{1}{3}$$

از فرمول $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ استفاده می کنیم:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{4}{25}\right) = 1 - \frac{8}{25} = \frac{17}{25} \times \frac{4}{4} = \frac{68}{25}$$

می دانیم $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ، باز شده است؛ پس:

$$\cos^2 22^\circ / 5^\circ - \sin^2 22^\circ / 5^\circ = \cos 2(22^\circ / 5^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

هر دو عبارت را ساده می کنیم:

$$\tan \frac{2\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = -\cos x$$

اسم عوض می شه

جای گذاری می کنیم:

$$\tan \frac{2\pi}{3} \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = 1 \Rightarrow (-\sqrt{3})(-\cos x) = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

مقدار $\cos 2x$ را حساب می کنیم:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

در رابطه $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ ، جای α ، قرار می دهیم

$$\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$$

$$2\sin^2 2x + \cos 4x = 2\sin^2 2x + 1 - 2\sin^2 2x = 1$$

هر ۴ عبارت را برحسب نسبت مثلثاتی زاویه 2° ،

می نویسیم:

$$\sin 83^\circ = \sin(72^\circ + 9^\circ + 2^\circ) = \cos 2^\circ$$

$$\cos 56^\circ = \cos(36^\circ + 18^\circ + 2^\circ) = -\cos 2^\circ$$

$$\cos 43^\circ = \cos(36^\circ + 7^\circ) = \cos 7^\circ = \sin 2^\circ$$

$$\sin 92^\circ = \sin(72^\circ + 18^\circ + 2^\circ) = -\sin 2^\circ$$

جای گذاری می کنیم:

$$(\sin 83^\circ)(\cos 56^\circ) - (\cos 43^\circ)(\sin 92^\circ)$$

$$= (\cos 2^\circ)(-\cos 2^\circ) - (\sin 2^\circ)(-\sin 2^\circ)$$

$$= -\cos^2 2^\circ + \sin^2 2^\circ = -(\cos^2 2^\circ - \sin^2 2^\circ) = -\cos 4^\circ$$

$$= -\sin 5^\circ$$

با داشتن $\sin \alpha = \frac{-\sqrt{11}}{3}$ ، مقدار $\cos 2\alpha$ را حساب می کنیم:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2\left(\frac{-\sqrt{11}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{16}{9} = -\frac{7}{9}$$

حالا با داشتن $\cos 2\alpha = -\frac{7}{9}$ ، مقدار $\cos 4\alpha$ را پیدا می کنیم:

$$\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2\left(-\frac{7}{9}\right)^2 - 1 = \frac{98}{81} - 1 = \frac{17}{81}$$

ابتدا عبارت $\sin^2 x - \cos^2 x$ را با استفاده از اتحاد

مزدوج تجزیه می کنیم:

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{9}$$

۸۳۵ برای هر دو پرانتز صورت، اتحاد داریم:

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{1}{\sin^2 \theta}}{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)} = \frac{1}{\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta - \cos^4 \theta}}$$

فاکتور از $\cos^2 \theta$

$$= \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)} = \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} = \frac{1}{(\sin \theta \cos \theta)^2}$$

جای $\sin \theta \cos \theta$ می نویسیم:

$$\frac{1}{(\frac{1}{2} \sin 2\theta)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4} \sin^2 2\theta} = \frac{4}{\sin^2 2\theta} = 4 \sin^{-2} 2\theta$$

۸۳۶ مجموع زوایای $\frac{\pi}{\lambda}$ و $\frac{3\pi}{\lambda}$ برابر با $\frac{\pi}{\lambda}$ است؛ پس این دو زاویه،

متمم‌اند. در نتیجه «جای $\cos \frac{3\pi}{\lambda}$ می نویسیم $\sin \frac{\pi}{\lambda}$ » و «جای $\sin \frac{3\pi}{\lambda}$ می نویسیم $-\cos \frac{\pi}{\lambda}$ ».

$$A = (1 - \sin \frac{3\pi}{\lambda})(1 - \cos \frac{3\pi}{\lambda})(1 + \sin \frac{\pi}{\lambda})(1 + \cos \frac{\pi}{\lambda})$$

$$\Rightarrow A = (1 - \cos \frac{\pi}{\lambda})(1 - \sin \frac{\pi}{\lambda})(1 + \sin \frac{\pi}{\lambda})(1 + \cos \frac{\pi}{\lambda})$$

مزدوج‌ها را کنار هم می نویسیم:

$$A = (1 - \cos \frac{\pi}{\lambda})(1 + \cos \frac{\pi}{\lambda})(1 - \sin \frac{\pi}{\lambda})(1 + \sin \frac{\pi}{\lambda})$$

$$= (1 - \cos^2 \frac{\pi}{\lambda})(1 - \sin^2 \frac{\pi}{\lambda}) = \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \cos^2 \frac{\pi}{\lambda}$$

$$= (\sin \frac{\pi}{\lambda} \cos \frac{\pi}{\lambda})^2 = (\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{\lambda})^2 = (\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{\lambda}$$

قرینه می کنیم

۸۳۷ اول کسرمان را ساده می کنیم:

$$\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{4}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot 2\alpha} = \frac{\cos(\frac{\pi}{4} - 2\alpha) + \cos(\pi + \alpha)}{\cot 2\alpha}$$

$$= \frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot 2\alpha}$$

با توجه به $\tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$ ، مثلث مقابل را می کشیم:

با توجه به در ربع سوم بودن α ، داریم:

$$\begin{cases} \sin \alpha = -\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = -\frac{3}{5} \\ \cos \alpha = -\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

حاصل $\sin 2\alpha$ و $\cot 2\alpha$ را حساب می کنیم:

$$\bullet \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(-\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$\bullet \cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{(-\frac{4}{5})^2 - (-\frac{3}{5})^2}{\frac{24}{25}} = \frac{\frac{16}{25} - \frac{9}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{7}{24}$$

سه مقدار به دست آمده را در عبارتمان جای گذاری می کنیم:

$$\frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot 2\alpha} = \frac{\frac{24}{25} - (-\frac{4}{5})}{\frac{7}{24}} = \frac{\frac{24}{25} + \frac{4}{5}}{\frac{7}{24}} = \frac{\frac{24 + 20}{25}}{\frac{7}{24}} = \frac{44 \times 24}{25 \times 7} = \frac{1056}{175}$$

در تساوی $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ جای α قرار می دهیم $\frac{C}{\sqrt{3}}$:

$$\cos C = 2\cos^2 \frac{C}{\sqrt{3}} - 1 \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{3}} = 2\cos^2 \frac{C}{\sqrt{3}} - 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 \frac{C}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \xrightarrow{45^\circ < \frac{C}{\sqrt{3}} < 90^\circ} \cos \frac{C}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

۸۳۹ جای $\log x^2$ می نویسیم $2 \log x$:

$$f(x) = \cos(2 \log x) + 2 \sin^2(\log x) - 4$$

با فرض $\log x = \alpha$ ، داریم:

$$f(x) = \cos 2\alpha + 2 \sin^2 \alpha - 4 = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + 2 \sin^2 \alpha - 4 = -3$$

باز می کنیم

پس f تابعی ثابت با ضابطه $f(x) = -3$ است. در نتیجه:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3 + (-3) = -6$$

۸۳۰ برای $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ ، مثلث قائم الزامه مناسب رسم می کنیم:

بنا بر این، داریم:

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{4}{5} \\ \cos \alpha = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

با داشتن $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ ، مقدار $\sin 2\alpha$ را پیدا می کنیم:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

۸۳۱ در اتحاد $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ ، جای α قرار می دهیم 15° :

$$\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

۸۳۲ طرفین تساوی $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{4}$ را به توان ۲ می رسانیم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{16} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{3}{4}$$

تغییر اسم می ده

عبارت خواسته شده را ساده می کنیم:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha \xrightarrow{\text{طبق گام ۱}} -\frac{3}{4}$$

ربع ۳

۸۳۳ جای x های $f(x)$ می نویسیم $g(x)$:

$$f(x) = x - \sqrt{x} \Rightarrow f(g(x)) = g(x) - \sqrt{g(x)}$$

$$= \sin^4 x - \sqrt{\sin^4 x} = \sin^4 x - |\sin^2 x| = \sin^4 x - \sin^2 x$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور}} \sin^2 x (\sin^2 x - 1) = -(\sin x \cos x)^2 = -\frac{1}{4} \sin^2 2x$$

-cos^2 x 1/4 sin 2x

۸۳۴ در نامساوی دوم، جای $\cot \alpha$ ، عبارت مساوی با آن را قرار

می دهیم:

$$\frac{\cot \alpha}{\sin \alpha} > 0 \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} > 0 \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} > 0$$

ربع ۱ یا ۴ $\Rightarrow \cos \alpha > 0$ $\xrightarrow{\text{مخرج مثبت}}$

در نامساوی اول، $\sin 2\alpha$ را باز می کنیم:

$$2 \sin \alpha < \sin 2\alpha \Rightarrow \sin \alpha < \sin \alpha \cos \alpha$$

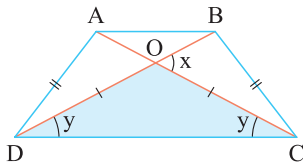
$$\Rightarrow \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha < 0 \xrightarrow{\text{فاکتور}} \sin \alpha (1 - \cos \alpha) < 0$$

نامنفیه

$$\Rightarrow \sin \alpha < 0 \xrightarrow{\text{پس}} \text{ربع ۳ یا ۴}$$

اشتراک می گیریم:

$$(4 \text{ یا } 1) \cap (4 \text{ یا } 3) = 4 \text{ ربع}$$



چون دوزنقه متساوی الساقین است، مثلث OCD هم متساوی الساقین است و $OC = OD$ هم برابر y است.

در همین مثلث، رابطه زاویه خارجی را می نویسیم:

$$\Rightarrow x = y + y \Rightarrow x = 2y \quad \text{مجموع دوزاویه داخلی غیرمجاور = زاویه خارجی}$$

در کسر داده شده به جای x می نویسیم $2y$ و آن را ساده می کنیم:

$$\frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2} \cos y} = \frac{\sin 2y}{\sin y \cos y} = \frac{2 \sin y \cos y}{\sin y \cos y} = 2$$

در مثلث ABC، مجموع زوایای A و C، 90° است:

$$\alpha + 5\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AC} \quad \text{در مثلث ABC، داریم:}$$

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AD} \quad \text{در مثلث ADC، داریم:}$$

طرفین دو تساوی گام قبل را در هم ضرب می کنیم:

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{BC}{AC} \times \frac{AC}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2\alpha = \frac{BC}{AD} \xrightarrow{\alpha=15^\circ} \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{BC}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{AD} \Rightarrow AD = 2BC \quad \text{جواب}$$

دو مرتبه از اتحاد $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ استفاده می کنیم:

$$4 \sin x \cos x \cos 2x = 2 \sin 2x \cos 2x = \sin 4x$$

$$\sin(4 \times 7.5^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{جای } x \text{ قرار می دهیم } 7.5^\circ:$$

واسطه هندسی $\frac{\pi}{16}$ و $x = \sin \frac{\pi}{16}$ و $y = \cos \frac{\pi}{16}$ برابر است با:

$$\begin{aligned} \sqrt{xy} &= \sqrt{\sin \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16}} = \sqrt{\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{8}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

زوایا در حال 2 برابر شدن هستند:

$$A = 8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$$

دو طرف را در $\sin 20^\circ$ ضرب می کنیم:

$$A \sin 20^\circ = 8 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$$

حالا 3 بار از اتحاد $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} A \sin 20^\circ &= 8 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \\ &= 4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ = \sin 160^\circ \\ &= \sin 20^\circ \end{aligned}$$

می دانیم سینوس زوایای مکمل باهم برابر است: پس $\sin 20^\circ = \sin 160^\circ$

$$A \sin 20^\circ = \sin 160^\circ \Rightarrow A = 1 \quad \text{و داریم:}$$

رادیان همان 75° است. عبارت داده شده را مساوی A قرار می دهیم:

$$A = \sqrt{2 \sin 75^\circ} + \sqrt{2 \cos 75^\circ}$$

طرفین را به توان 2 می رسانیم:

$$A^2 = 2 \sin 75^\circ + 2 \cos 75^\circ + 2 \sqrt{2 \sin 75^\circ \cos 75^\circ} = 2 + 2 \sqrt{\sin 150^\circ}$$

$$\Rightarrow A^2 = 2(\sin 75^\circ + \cos 75^\circ) + 2 \sqrt{2 \sin 15^\circ}$$

$$\Rightarrow A^2 = 2(\sin 75^\circ + \cos 75^\circ) + 2$$

الان دوتا کار می توانیم انجام دهیم:

1 اگر سینوس و کسینوس 75° را حفظ باشید که آن ها را جای گذاری می کنید:

$$A^2 = 2\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right) + 2 = 2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) + 2 = \sqrt{6} + 2$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} A = \sqrt{\sqrt{6} + 2}$$

2 عبارت $\sin 75^\circ + \cos 75^\circ$ را مساوی B قرار می دهیم و از B کمک می گیریم:

$$B^2 = \sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ + 2 \sin 75^\circ \cos 75^\circ = 1 + 2 \sin 150^\circ = 2$$

$$\xrightarrow{\text{پس}} B = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$A^2 = 2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) + 2 = \sqrt{6} + 2 \xrightarrow{\text{جذر}} A = \sqrt{\sqrt{6} + 2} \quad \text{در نتیجه:}$$

در مثلث، مجموع سه زاویه π رادیان است: پس:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \pi - \hat{B} \xrightarrow{+2} \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} = \frac{\pi - \hat{B}}{2}$$

تساوی اولیه را ساده می کنیم:

$$\cos \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} = \cos \frac{\hat{B}}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi - \hat{B}}{2}\right) - \cos \frac{\hat{B}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\hat{B}}{2} - \cos \frac{\hat{B}}{2} = \frac{1}{2}$$

طرفین را به توان 2 می رسانیم:

$$\sin^2 \frac{\hat{B}}{2} + \cos^2 \frac{\hat{B}}{2} - 2 \sin \frac{\hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{B}}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{1}{2}$$

اول قضیه سینوس ها را می نویسیم:

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{5}{\sin \hat{B}} = \frac{3}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}} = \frac{5}{3}$$

مقدار کسر داده شده را حساب می کنیم:

$$\frac{\sin 2\hat{B}}{\sin \hat{C}} = \frac{2 \sin \hat{B} \cos \hat{B}}{\sin \hat{C}} = 2 \times \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}} \times \cos \hat{B} = 2 \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{9} = \frac{50}{27}$$

نسبت مساحت مثلث به متوازی الاضلاع $\frac{40}{100}$ است: پس:

$$\frac{S_{\Delta}}{S_{\square}} = \frac{40}{100} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \times 3a \times 4b \times \sin 2\alpha}{2a \times 5b \times \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{6ab \cdot \sin 2\alpha}{5ab \cos \alpha} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{3 \times \cancel{2} \sin \alpha \cos \alpha}{\cancel{5} \cos \alpha} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow 3 \sin \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9} \quad \text{خواسته سؤال:}$$

۸۵۲ در مخرج به جای $\sin 1^\circ$ می‌نویسیم $\cos 8^\circ$ و از رابطه طلایی استفاده می‌کنیم:

$$1 + \sin 1^\circ = 1 + \cos 8^\circ = 2\cos^2 4^\circ$$

$\sin 8^\circ$ را با رابطه $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$ باز می‌کنیم:

$$\sin 8^\circ = 2\sin 4^\circ \cos 4^\circ$$

تا این جاکسرمان این جوری شد:

$$\frac{\sin 8^\circ \cos 4^\circ}{(1 + \sin 1^\circ) \sin 2^\circ} = \frac{\cancel{\sin 4^\circ} \cos 4^\circ \cos 4^\circ}{\cancel{\cos 4^\circ} \sin 2^\circ} = \frac{\sin 4^\circ}{\sin 2^\circ}$$

$\sin 4^\circ$ را مثل گام دوم باز می‌کنیم:

$$\frac{2\sin 2^\circ \cos 2^\circ}{\sin 2^\circ} = 2\cos 2^\circ \stackrel{\text{متمم}}{=} 2\sin 7^\circ$$

۸۵۳ همان $\frac{\pi}{12}$ است.

برای به دست آوردن $\sin 15^\circ$ ، در رابطه $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ جای α می‌نویسیم 15° :

$$\cos 30^\circ = 1 - 2\sin^2 15^\circ$$

جای $\cos 30^\circ$ مقدارش را قرار می‌دهیم:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2 15^\circ \Rightarrow 2\sin^2 15^\circ = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

$$\sin^2 15^\circ = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \xrightarrow{\text{جذر}} \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \rightarrow a$$

$\rightarrow b$

$$ab = 3 \times 2 = 6$$

پس: **تذکره:** $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ همان $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$ است.

۸۵۴ روش اول:

$\frac{\pi}{12}$ رادین همان 15° است. جای x ها قرار می‌دهیم 15° :

$$3\cos 4x + \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x$$

$\sqrt{2}$ فاکتور از $\sqrt{2}$

$$= 3\cos 6^\circ + \sqrt{2}(\sin 15^\circ - \cos 15^\circ)$$

مقادیر عددی $\sin 15^\circ$ و $\cos 15^\circ$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$3\left(\frac{1}{2}\right) + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right) = \frac{3}{2} + \sqrt{2}\left(\frac{-2\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

روش دوم: برای محاسبه $\sin 15^\circ - \cos 15^\circ$ ، اگر مقدارشان را حفظ نیستند،

کافی است آن را برابر با A قرار دهیم و A^2 را حساب کنیم؛ فقط دقت کنید چون

$\sin 15^\circ < \cos 15^\circ$ ، پس $A < 0$:

$$A^2 = (\sin 15^\circ - \cos 15^\circ)^2$$

$$\Rightarrow A^2 = \underbrace{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ}_{=1} - \underbrace{2\sin 15^\circ \cos 15^\circ}_{\sin 30^\circ = \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} |A| = \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{A < 0} A = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

۸۵۵ روش اول:

مکمل زاویه $\frac{11\pi}{12}$ می‌شود $\frac{\pi}{12}$ رادین که معادل 15° است.

اگر دو زاویه مکمل باشند، «سینوس هایشان برابر» و

«کسینوس هایشان قرینه هم» است؛ پس جای $\sin \frac{11\pi}{12}$ می‌نویسیم $\sin \frac{\pi}{12}$

و به جای $\cos \frac{11\pi}{12}$ می‌نویسیم $-\cos \frac{\pi}{12}$:

$$\frac{\sin \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{11\pi}{12}}{\sin \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{11\pi}{12}} = \frac{\sin \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}} = \frac{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}$$

۸۴۷ جای $\tan x$ و $\cot x$ ، به ترتیب $\frac{\sin x}{\cos x}$ و $\frac{\cos x}{\sin x}$ می‌نویسیم:

$$\sin^6 x \cot x - \cos^6 x \tan x = \sin^6 x \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) - \cos^6 x \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \sin^5 x \cos x - \cos^5 x \sin x$$

فاکتور می‌گیریم:

$$\sin x \cos x (\sin^4 x - \cos^4 x)$$

$\frac{1}{2} \sin 2x$ تجزیه یا مزدوج

$$= \sin x \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)$$

$\frac{1}{2} \sin 2x$ 1 $-\cos 2x$

$$= -\frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = -\frac{1}{4} \sin 4x$$

$\frac{1}{2} \sin 4x$

جای x ، قرار می‌دهیم $\frac{\pi}{4}$:

$$-\frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$$

۸۴۸ صورت را با اتحاد $1 + \cos \alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2}$ و مخرج را با

اتحاد $1 - \cos \alpha = 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ ساده می‌کنیم:

$$\frac{1 + \cos 8^\circ}{1 - \cos 8^\circ} = \frac{\cancel{2} \cos^2 4^\circ}{\cancel{2} \sin^2 4^\circ} = \cot^2 4^\circ$$

4° و 5° متمم‌اند؛ پس $\cot^2 4^\circ$ با $\tan^2 5^\circ$ برابر است.

۸۴۹ در صورت از اتحاد $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ و در مخرج از

$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \cos x} = \frac{\sin x + 2\sin x \cos x}{2\cos^2 x + \cos x}$$

$$\stackrel{\text{فاکتور}}{=} \frac{\sin x (1 + 2\cos x)}{\cos x (2\cos x + 1)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

۸۵۰ در صورت از اتحاد $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$ و در

مخرج از اتحاد طلایی $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\cancel{\sin \frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cancel{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

عبارت خواسته شده را ساده می‌کنیم:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = -\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{-1}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

$\frac{\pi}{2}$ ربع $\frac{\alpha}{2}$

۸۵۱

در صورت کسر اول از $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$ و در مخرجش از

$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{\cancel{\sin \frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2}}{\cancel{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \cot \frac{\theta}{2}$$

در صورت کسر دوم از $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha$ و در مخرجش از

$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\cancel{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\cancel{\sin \frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \cot \frac{\theta}{2}$$

جمع دو کسر برابر است با:

$$\cot \frac{\theta}{2} + \cot \frac{\theta}{2} = 2\cot \frac{\theta}{2}$$



برای هر دو عبارت صورت و مخرج می‌توانیم از اتحادها استفاده کنیم:

$$\frac{1 + \tan^2 x}{1 + \cot^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$$

در تساوی $f(\tan x) = \tan^2 x$ ، جای $\tan x$ می‌نویسیم: $f(t) = t^2$

$$f\left(\cos \frac{\pi}{\lambda}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} \quad \text{حالا جای } t \text{ می‌نویسیم } \cos \frac{\pi}{\lambda}$$

در اتحاد طلایی $\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \cos^2 \alpha$ ، جای α قرار می‌دهیم $\frac{\pi}{\lambda}$:

$$\cos^2 \frac{\pi}{\lambda} = \frac{1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

۸۵۹ ۲۲/۵ درجه همان $\frac{\pi}{\lambda}$ رادین است.

۷۰ می‌شود $\frac{7\pi}{\lambda}$ که مکملش $\frac{\pi}{\lambda}$ است.

دو زاویه که مکمل هم هستند، تانژانتشان قرینه هم است:

$$\tan \frac{7\pi}{\lambda} = -\tan \frac{\pi}{\lambda}$$

در اتحاد $\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \tan \frac{\theta}{2}$ ، جای θ قرار می‌دهیم 45° :

$$\tan 22.5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\sin 45^\circ} - \cot 45^\circ = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

حاصل A را حساب می‌کنیم:

$$A = -1 + \tan 70^\circ = -1 + \tan \frac{7\pi}{\lambda} = -1 - \tan \frac{\pi}{\lambda} = -1 - (\sqrt{2} - 1) = -\sqrt{2}$$

تیزبازی:

$$A = -1 + \tan\left(\frac{7\pi}{\lambda}\right) = -1 - \tan \frac{\pi}{\lambda}$$

فقط $-\sqrt{2}$ در این محدوده است $\rightarrow$ چک گزینه‌ها $\rightarrow -2 < A < -1$ پس

۸۶۰ ۶۷/۵ همان $\frac{3\pi}{\lambda}$ رادین است.

با جای‌گذاری $\alpha = \frac{3\pi}{\lambda}$ ، کسر داده شده را ساده می‌کنیم:

$$A = \frac{\cot 3\alpha + \tan \alpha}{\cos^2 3\alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\cot \frac{9\pi}{\lambda} + \tan \frac{\pi}{\lambda}}{\cos^2 \frac{9\pi}{\lambda} - \cos^2 \frac{\pi}{\lambda}}$$

$$= \frac{\cot\left(\pi + \frac{\pi}{\lambda}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)}{\cos^2\left(\pi + \frac{\pi}{\lambda}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)} = \frac{\cot \frac{\pi}{\lambda} + \cot \frac{\pi}{\lambda}}{\cos^2 \frac{\pi}{\lambda} - \sin^2 \frac{\pi}{\lambda}}$$

$$= \frac{2 \cot \frac{\pi}{\lambda}}{\cos^2 \frac{\pi}{\lambda} - \sin^2 \frac{\pi}{\lambda}} = \frac{2 \cot \frac{\pi}{\lambda}}{\cos \frac{\pi}{\lambda}} = \frac{2 \cot \frac{\pi}{\lambda}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2} \cot \frac{\pi}{\lambda}$$

باز شده $\cos 2\alpha$

در اتحاد $\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \cot \frac{\theta}{2}$ ، جای θ قرار می‌دهیم 45° :

$$\cot 22.5^\circ = \frac{1 + \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\sin 45^\circ} + \cot 45^\circ = \sqrt{2} + 1$$

در نتیجه

$$A = 2\sqrt{2} \cot \frac{\pi}{\lambda} = 2\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) = 4 + 2\sqrt{2} = 6/\lambda \rightarrow [A] = 6$$

جای سینوس و کسینوس 15° ، مقدارشان را قرار می‌دهیم:

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

روش دوم:

و مثل روش ۱.

چون 15° در نیمه اول ربع اول است، پس کسینوسش بزرگ‌تر است و صورت کسر، عددی منفی است:

$$A = \frac{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ} < 0$$

A^2 را حساب می‌کنیم:

$$A^2 = \frac{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ - 2\sin 15^\circ \cos 15^\circ}{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ + 2\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{جنر}} |A| = \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{A < 0} A = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

هر ۴ عبارت را برحسب نسبتی از زاویه 15° می‌نویسیم:

- $\sin(-285^\circ) = \sin(-36^\circ + 75^\circ) = \sin 75^\circ = \cos 15^\circ$ (حذف)
- $\cos(-105^\circ) = \cos 105^\circ = \cos(75^\circ + 30^\circ) = -\cos 75^\circ = -\sin 15^\circ$ (کسینوس منفی شو می‌خوره)
- $\sin 165^\circ = \sin 15^\circ$ (مکمل)
- $\sin 375^\circ = \sin(36^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ$ (حذف)

عبارات بالا را در کسر اولیه جای‌گذاری می‌کنیم:

$$A = \frac{\sin(-285^\circ) + 2\cos(-105^\circ)}{2\sin(165^\circ) + 3\sin(375^\circ)} = \frac{\cos 15^\circ + 2(-\sin 15^\circ)}{2\sin 15^\circ + 3\sin 15^\circ}$$

$$= \frac{\cos 15^\circ - 2\sin 15^\circ}{5\sin 15^\circ} = \frac{1}{5} \times \left(\frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} - 2 \right)$$

جای $\cos 15^\circ$ و $\sin 15^\circ$ ، مقدارشان را قرار می‌دهیم:

$$A = \frac{1}{5} \times \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} - 2 \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} - 2 \right)$$

صورت و مخرج کسر را به $\sqrt{2}$ ساده می‌کنیم و بعد، مخرجش را گویا می‌کنیم:

$$A = \frac{1}{5} \times \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} - 2 \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} - 2 \right)$$

$$= \frac{1}{5} (\sqrt{3} - 2) = 0/2\sqrt{3}$$

۸۵۷ $\frac{\pi}{36} \times \frac{18^\circ}{\pi} = 5^\circ$ رادین را به درجه تبدیل می‌کنیم:

در ضابطه f ، جای x قرار می‌دهیم 5° :

$$f(x) = 16 \cos^2(3x) \cos^2(6x) \cos^2(12x) \cos^2(24x)$$

$$\xrightarrow{x=5^\circ} f(5^\circ) = 16 \cos^2 15^\circ \cos^2 30^\circ \cos^2 60^\circ \cos^2 120^\circ$$

جای هر ۴ عبارت، مقدارشان را قرار می‌دهیم:

$$f(5^\circ) = 16 \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{-1}{2} \right)^2$$

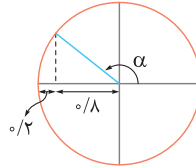
$$= 16 \left(\frac{8 + 4\sqrt{3}}{16} \right) \left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} \right) = (2 + \sqrt{3}) \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{16}$$

۸۶۱ از $\cot \alpha = \frac{1}{3}$ ، نتیجه می گیریم $\tan \alpha = 3$.

حالا از اتحاد $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ استفاده می کنیم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2(3)}{1 - 3^2} = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4}$$

۸۶۲ شکل را 90° می چرخانیم:



در مورد α ، می دانیم که:

$$\cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$\tan \alpha$ را حساب می کنیم: $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{25}{16}$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{9}{16} \xrightarrow{\text{ریشه}} \tan \alpha = -\frac{3}{4}$$

$\tan 2\alpha$ را حساب می کنیم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2(-\frac{3}{4})}{1 - (\frac{9}{16})} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = -\frac{24}{7}$$

معکوس می کنیم: $\cot 2\alpha = \frac{-7}{24}$

۸۶۳ $\tan 2\alpha = 4 \cot \alpha \Rightarrow \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{4}{\tan \alpha}$

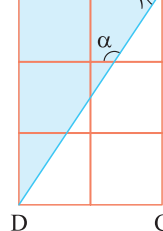
$$\Rightarrow 2 \tan^2 \alpha = 4 - 4 \tan^2 \alpha \Rightarrow 6 \tan^2 \alpha = 4 \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{2}{3}$$

$\cos^2 \alpha$ را حساب می کنیم:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{2}{3} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{3}{5}$$

$\cos 2\alpha$ را حساب می کنیم: $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2(\frac{3}{5}) - 1 = \frac{1}{5}$

۸۶۴ طبق خطوط موازی مورب، زاویه B_1 مکمل α یعنی $\pi - \alpha$ است.



در مثلث ABD ، برای B_1 ، تانژانت

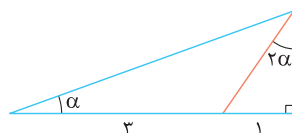
می نویسیم:

$$\tan(\pi - \alpha) = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{2} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{2}$$

تانژانت 2α را حساب می کنیم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2(-\frac{3}{2})}{1 - (\frac{9}{4})} = \frac{-3}{-\frac{5}{4}} = \frac{12}{5}$$

۸۶۵ ضلع عمودی مثلث بزرگ را x می گیریم:



در مثلث قائم الزاویه کوچک، داریم:

$$\tan 2\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{1}{x}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{x}{4}$$

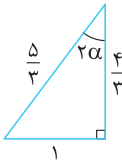
در مثلث قائم الزاویه بزرگ، داریم:

$$\text{دو مقدار به دست آمده را در اتحاد } \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \text{ قرار می دهیم:}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{2(\frac{x}{4})}{1 - (\frac{x}{4})^2} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{\frac{x}{2}}{1 - \frac{x^2}{16}} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x(\frac{x}{2}) = 1 - \frac{x^2}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} = 1 - \frac{x^2}{16} \xrightarrow{\times 16} 8x^2 = 16 - x^2 \Rightarrow 9x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

در مثلث قائم الزاویه کوچک $x = \frac{4}{3}$ را جای گذاری و وتر را با فیثاغورس حساب می کنیم:



$$\Rightarrow \text{وتر} = \sqrt{1^2 + (\frac{4}{3})^2} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{5}$$

برای زاویه 2α ، کسینوس می نویسیم:

۸۶۶ در دو مثلث قائم الزاویه ایجاد شده، برای زوایای α و 2α ،

تانژانت می نویسیم:

$$\bullet \text{ AHB: } \tan 2\alpha = \frac{AH}{BH} \Rightarrow AH = \tan 2\alpha$$

$$\bullet \text{ ACH: } \tan \alpha = \frac{AH}{HC} \Rightarrow AH = 4 \tan \alpha$$

با توجه به دو تساوی قبل، باید $\tan 2\alpha$ و $4 \tan \alpha$ برابر باشند:

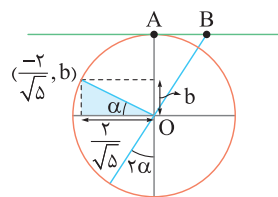
$$\tan 2\alpha = 4 \tan \alpha \xrightarrow{\text{باز می کنیم}} \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = 4 \tan \alpha$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} 1 - \tan^2 \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$AH = 4 \tan \alpha = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times 5}{2} = 5\sqrt{2}$$

۸۶۷ یک سری اطلاعات روی شکل اضافه می کنیم:



$$(\frac{2}{\sqrt{5}})^2 + b^2 = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\tan \alpha = \frac{1/\sqrt{5}}{2/\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$

پس:

در مثلث OAB ، داریم:

$$\tan 2\alpha = \frac{AB}{OA} = AB$$

با داشتن $\tan \alpha$ ، مقدار $\tan 2\alpha$ را حساب می کنیم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2(\frac{1}{2})}{1 - (\frac{1}{4})} = \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{پس}} AB = \frac{4}{3}$$

۸۶۸ در رابطه $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$ ، جای α می نویسیم $\frac{x}{y}$:

$$\cot \frac{x}{y} - \tan \frac{x}{y} = 2 \cot x \Rightarrow \cot x = \frac{-1}{2} \xrightarrow{\text{معکوس}} \tan x = -2$$

سوال داده -۱

حالا از اتحاد $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ استفاده می کنیم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2(-2)}{1 - (-2)^2} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

۸۶۹ مجموع ریشه های معادله $x^2 - 5x + 1 = 0$ برابر با $\frac{-b}{a} = 5$ است. پس جمع $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ باید ۵ باشد:

$$\tan \alpha + \cot \alpha = 5 \Rightarrow \frac{2}{\sin 2\alpha} = 5 \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{2}{5}$$



از اتحاد $\sin^2 x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$ کمک می‌گیریم:

$$\frac{4}{5} = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \xrightarrow{\div 2} \frac{2}{5} = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\Rightarrow 2 \tan^2 x - 5 \tan x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{روسی}} \tan^2 x - 5 \tan x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (\tan x - 4)(\tan x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = 4 \\ \tan x = 1 \end{cases} \xrightarrow{\div 2} \begin{cases} \tan x = 2 \\ \tan x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

۸۷۴

برای نوشتن $\cos^4 x$ ، در رابطه $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ ، جای α

$$f(x) = \cos^4 x = 2 \cos^2 2x - 1 \quad \text{می‌نویسیم:}$$

حالا جای $\cos^2 x$ می‌نویسیم $1 - \sin^2 x$:

$$f(x) = \cos^4 x = 2(1 - \sin^2 x) - 1$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مربع}} 2(1 - \sin^2 x - \sin^2 x + 1) - 1 = 4 - 4 \sin^2 x - 1 = 3 - 4 \sin^2 x$$

جای $\cos^2 x$ می‌نویسیم $1 - \sin^2 x$:

$$f(x) = 4 - 4 \sin^2 x + 1 = 5 - 4 \sin^2 x = 5 - 4 \left(\frac{1 - \cos^2 x}{2} \right) = 5 - 2 + 2 \cos^2 x = 3 + 2 \cos^2 x$$

$$\left[\frac{ab}{c} \right] = \left[\frac{a \times b}{c} \right] = \left[\frac{64}{-7} \right] = \left[-9 \dots \right] = -10 \quad \text{پس:}$$

هر دو تساوی لگاریتمی را به تساوی نمایی معادلشان

$$\bullet \log_7(1 - \sin x) = a \Rightarrow 7^a = 1 - \sin x \quad \text{تبدیل می‌کنیم:}$$

$$\bullet \log_7(1 + \sin x) = b \Rightarrow 7^b = 1 + \sin x$$

طرفین دو تساوی را در هم ضرب می‌کنیم:

$$7^a \times 7^b = (1 - \sin x)(1 + \sin x) \Rightarrow 7^{a+b} = 1 - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x$$

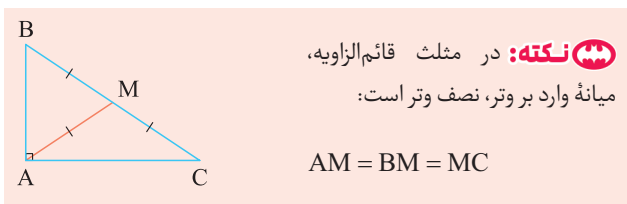
برای ساده‌کردن عبارتی که سؤال می‌خواهد به جای $\cos^2 x$

$$\text{می‌نویسیم } 1 - \sin^2 x$$

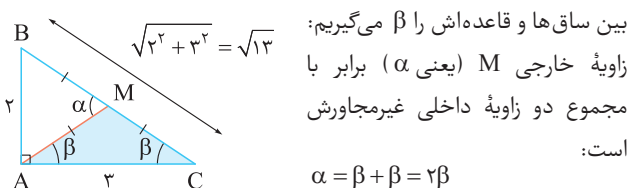
$$\log_7(1 + \cos^2 x) = \log_7(1 + 2 \cos^2 x - 1) = \log_7(2 \cos^2 x)$$

$$\xrightarrow{\text{خواص لگاریتم}} \log_7 2 + \log_7 \cos^2 x = 1 + \log_7(2^{a+b}) = 1 + a + b$$

۸۷۷



با توجه به نکته بالا، مثلث AMC متساوی الساقین است. اندازه زوایای



در مثلث ABC، برای زاویه رأس C، کسینوس می‌نویسیم:

$$\cos \beta = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

پس:

$$\cos \alpha = \cos 2\beta = 2 \cos^2 \beta - 1 = 2 \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \right)^2 - 1 = \frac{4}{13} - 1 = -\frac{9}{13}$$

تساوی اولیه را ساده می‌کنیم:

۸۷۶

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 5$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 4 \xrightarrow{+2} \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 = 6$$

$$\xrightarrow{\text{به شکل مربع کامل می‌نویسیم}} \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 \tan \alpha \cot \alpha = 6$$

$$\Rightarrow (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 = 6 \Rightarrow \tan \alpha + \cot \alpha = \pm \sqrt{6}$$

به کمک اتحاد $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$ ، داریم:

$$\left(\frac{2}{\sin 2\alpha} \right)^2 = 6 \Rightarrow \frac{2}{\sin 2\alpha} = \pm \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \pm \frac{2\sqrt{6}}{6} = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

۸۷۱

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 4 \Rightarrow 1 - \sin x = 4(1 + \sin x) \Rightarrow 1 - \sin x = 4 + 4 \sin x \Rightarrow -3 = 5 \sin x \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \sin x = -\frac{3}{5} \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{5}$$

از اتحاد $\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$ کمک می‌گیریم:

$$\frac{-3}{5} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \xrightarrow{\tan \frac{x}{2} = A} 10A = -3 - 2A^2$$

$$\Rightarrow 2A^2 + 10A + 3 = 0 \xrightarrow{\text{روسی}} A^2 + 5A + 1.5 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} A = -1 \\ A = -9 \end{cases} \xrightarrow{\div 3} \begin{cases} A = -\frac{1}{3} \\ A = -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{پس}} \begin{cases} \tan \frac{x}{2} = -\frac{1}{3} \\ \tan \frac{x}{2} = -3 \end{cases}$$

تذکره: چون x در ربع سوم است، پس: $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{2}$

در نیمه اول ربع دوم، تانژانت در بازه $(-\infty, -1)$ قرار دارد، پس فقط -3 می‌تواند جواب باشد. در نتیجه در صورت سؤال، عبارت «صحیح» لازم نبود قید شود.

۸۷۲

به کمک اتحادها، هر سه مقدار $\sin \alpha$ ، $\tan \alpha$ و $\cos \alpha$ را از روی $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$ حساب می‌کنیم:

$$\bullet \tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2(\frac{1}{4})}{1 - (\frac{1}{4})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{15}{16}} = \frac{8}{15}$$

$$\bullet \sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2(\frac{1}{4})}{1 + (\frac{1}{4})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{17}{16}} = \frac{8}{17}$$

$$\bullet \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha} = \frac{\frac{8}{17}}{\frac{8}{15}} = \frac{15}{17}$$

پس:

$$\frac{\tan \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\frac{8}{15} - \frac{8}{17}}{\frac{8}{17} - \frac{15}{17}} = \frac{\frac{8}{15} - \frac{8}{17}}{\frac{-7}{17}} = \frac{\frac{8}{15} \times \frac{17}{17} - \frac{8}{17} \times \frac{15}{15}}{\frac{-7}{17}} = \frac{-\frac{16}{15}}{\frac{-7}{17}} = \frac{16}{105}$$

۸۷۳

طرفین تساوی داده‌شده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(10(\sin x + \cos x))^2 = (6\sqrt{5})^2$$

$$\Rightarrow 100(\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x) = 180$$

$$\xrightarrow{\div 100} 1 + \sin 2x = 1.8 \Rightarrow \sin 2x = 0.8 \Rightarrow \sin 2x = \frac{4}{5}$$

سعی می‌کنیم همه نسبت‌ها را برحسب نسبتی از زاویه

$$\frac{2 \sin 50^\circ + \cos 20^\circ}{1/5 \cos 31^\circ + 2 \sin 25^\circ}$$

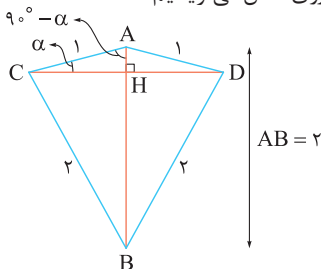
$$\frac{2 \sin(36^\circ + 18^\circ - 4^\circ) + \cos(18^\circ + 2^\circ)}{1/5 \cos(27^\circ + 4^\circ) + 2 \sin(27^\circ - 2^\circ)}$$

$$\frac{2 \sin 4^\circ - \cos 2^\circ}{1/5 \sin 4^\circ - 2 \cos 2^\circ}$$

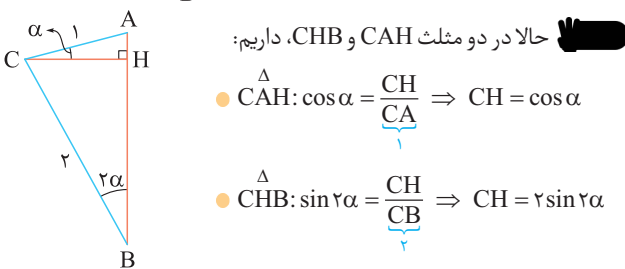
با $\sin 4^\circ = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ باز می‌کنیم:

$$\frac{4 \sin 2^\circ \cos 2^\circ - \cos 2^\circ}{2 \sin 2^\circ \cos 2^\circ - 2 \cos 2^\circ} = \frac{4 \sin 2^\circ - 1}{2 \sin 2^\circ - 2} = \frac{4 \sin 2^\circ - 1}{2(\sin 2^\circ - 1)}$$

اندازه اضلاع را روی شکل می‌نویسیم:



مثلث CAB، متساوی الساقین است، پس $\hat{CAB} = 90^\circ - \alpha$ هم $\hat{ACB}$ است. زاویه B را برحسب α پیدا می‌کنیم:

$$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 180^\circ - 2(90^\circ - \alpha) = 2\alpha$$


از برابر قراردادن دو مقدار CH، داریم:

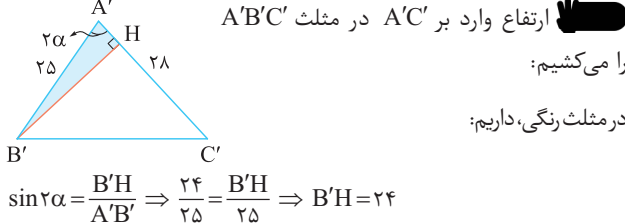
$$\cos \alpha = 2 \sin 2\alpha \Rightarrow \cos \alpha = 4 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha = 1/4$$

مساحت مثلث ABC، 36 است؛ پس:

$$\frac{1}{2} \times 15 \times 4 \times \sin \alpha = 36 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$$

چون $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ، پس $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و در نتیجه:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$



چون $\hat{A} = 90^\circ$ ، پس $\hat{B}$ و $\hat{C}$ متمم‌اند، در نتیجه $\sin \hat{C}$ همان $\cos \hat{B}$ است.

تساوی داده‌شده را برحسب $\cos \hat{B}$ می‌نویسیم:

$$\frac{\sin \hat{C} \cos 2\hat{B}}{\cos \hat{B} \cos 2\hat{B}} = \frac{1}{4} \Rightarrow 2 \cos^2 \hat{B} - \cos \hat{B} = \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\times 4} 8 \cos^2 \hat{B} - 4 \cos \hat{B} - 1 = 0$$

جای $\cos \hat{B}$ می‌نویسیم:

$$8t^2 - 4t - 1 = 0 \xrightarrow[\text{می‌نویسیم } -2+1]{\text{به جای } -1} \frac{8t^2 + 1}{-2+1} = 0 \Rightarrow (8t^2 + 1)(-2+1) = 0$$

$$(2t+1)(4t^2-2t+1) - 2(2t+1) = 0 \Rightarrow (2t+1)(4t^2-2t+1-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2t+1=0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \times \\ 4t^2-2t-1=0 \end{cases}$$

چون $\hat{B}$ حاده است، پس $\cos \hat{B} = -\frac{1}{4}$ قبول نیست. معادله دوم را حل می‌کنیم:

$$4t^2 - 2t - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=20} t = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$\xrightarrow{\cos \hat{B} > 0} \cos \hat{B} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

عدد طلایی $\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ بود؛ پس $\cos \hat{B} = \frac{1}{4}$ ، برابر عدد طلایی است.

شکل می‌کشیم:



$$3 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} \times \sin \alpha \Rightarrow 3 = 9 \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{3}$$

از آن جایی که دو زاویه مکمل، سینوس هایشان برابر است، پس اگر $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ باشد، آن وقت $\sin(\pi - \alpha) = \frac{1}{3}$ ؛ پس زاویه مورد نظر یا α است یا $\pi - \alpha$ است.

$$(\pi - \alpha) - \alpha = \pi - 2\alpha$$

اختلاف این دو زاویه برابر است با: کسینوس $\pi - 2\alpha$ را می‌خواهیم:

$$\cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = -(1 - 2 \sin^2 \alpha) = -(1 - 2(\frac{1}{3})^2) = -(1 - \frac{2}{9}) = -\frac{7}{9}$$

فرضول داره

از اتحادهای $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ و $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x + k \cos 2x = 1 - 2(\sin x \cos x)^2 + k(1 - 2 \sin^2 x)$$

$$= 1 - 2(\frac{1}{2} \sin 2x)^2 + k(1 - 2 \sin^2 x) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x + k - 2k \sin^2 x$$

$$\xrightarrow[\text{فکتور از } -\sin^2 2x]{\text{فکتور از } -\sin^2 2x} f(x) = 1 + k - \sin^2 2x (\frac{1}{2} + 2k)$$

برای آن‌که f ثابت باشد، باید ضریب $\sin^2 2x$ صفر باشد:

$$\frac{1}{2} + 2k = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$$

$$f(x) = 1 + k = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

پس ضابطه f به شکل مقابل است:

$$\frac{f(140^\circ)}{k} = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{1}{4}} = -3$$

در نتیجه:

پس: $AE \times ED = 4 \sin \beta \cos \alpha \times 4 \sin \alpha \cos \beta$
 $= 16 \underbrace{\sin \alpha \cos \alpha}_{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} \underbrace{\sin \beta \cos \beta}_{\frac{1}{2} \sin 2\beta} = 4 \sin 2\alpha \sin 2\beta$
 چون $\alpha + \beta = 45^\circ$ ، پس $2\alpha + 2\beta = 90^\circ$ ؛ یعنی 2α و 2β متمم اند و
 می‌توانیم جای $\sin 2\beta$ بنویسیم $\cos 2\alpha$:
 $4 \sin 2\alpha \underbrace{\sin 2\beta}_{\cos 2\alpha} = 4 \underbrace{\sin 2\alpha \cos 2\alpha}_{\frac{1}{2} \sin 4\alpha} = 2 \sin 4\alpha$

در پیرانتز از رابطه $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ استفاده می‌کنیم:
 $(1 + \cos \frac{\pi}{4}) \cot \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} \cot \frac{\pi}{4}$
 جای $\frac{3\pi}{4}$ می‌نویسیم $\frac{\pi}{4}$ ؛ زوایای $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{6\pi}{4}$ متمم اند (جمعشان $\frac{\pi}{2}$ است) و می‌توانیم جای $\cot \frac{6\pi}{4}$ بنویسیم $\tan \frac{\pi}{4}$:
 $2 \cos^2 \frac{\pi}{8} \cot \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} \tan \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} \times \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}}$
 $= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \sin(\frac{\pi}{2}) = \sin \frac{\pi}{2}$
 باز شده $\sin 2\alpha$

اندازه چند زاویه را روی شکل مشخص می‌کنیم:
 در مثلث AHC:
 $\cos \hat{C} = \frac{HC}{AC} \Rightarrow \cos 75^\circ = \frac{HC}{6}$
 $\Rightarrow HC = 6 \cos 75^\circ$
 در مثلث HOC:
 $\tan \hat{C} = \frac{OH}{HC} \Rightarrow \tan 15^\circ = \frac{OH}{6 \cos 75^\circ} \Rightarrow OH = 6 \cos 75^\circ \tan 15^\circ$

نکته: نسبت‌های مثلثاتی زاویه 15° به صورت زیر است:

$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$
---	---	--------------------------------

مساحت مثلث OHC برابر است با:

$$S_{\triangle OHC} = \frac{1}{2} \times OH \times HC = \frac{1}{2} \times 6 \cos 75^\circ \tan 15^\circ \times 6 \cos 75^\circ$$

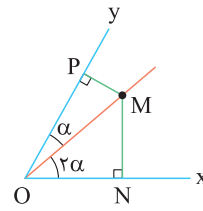
$$= 18 \underbrace{\cos^2 75^\circ}_{\sin^2 15^\circ} \tan 15^\circ = 18 \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right)^2 (2 - \sqrt{3})$$

$$= 18 \left(\frac{6 - 4\sqrt{3} + 2}{16} \right) (2 - \sqrt{3}) = 9 \left(\frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} \right) (2 - \sqrt{3})$$

$$= \frac{9}{2} (2 - \sqrt{3})^2 = \frac{9(7 - 4\sqrt{3})}{2} \times \frac{7 + 4\sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{3}} = \frac{9(49 - 48)}{2(7 + 4\sqrt{3})} = \frac{9}{14 + 8\sqrt{3}}$$

چون $x_P = y_P$ و P در ناحیه اول است، پس P روی انتهای کمان 45° قرار دارد؛ از طرفی چون $OA = OP$ ، پس مثلث AOP متساوی الساقین است و $\hat{P} = \alpha$ می‌شود.

شکل گفته شده در سؤال را می‌کشیم:
 در دو مثلث قائم‌الزاویه ایجاد شده، برای زوایای α و 2α ، سینوس می‌نویسیم:



$$\triangle OMN : \sin 2\alpha = \frac{MN}{OM}$$

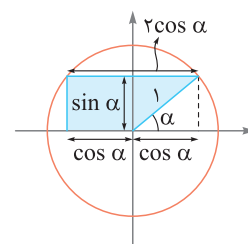
$$\triangle OPM : \sin \alpha = \frac{PM}{OM}$$

از تقسیم طرفین دو تساوی بر هم، داریم:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{MN}{OM}}{\frac{PM}{OM}} \Rightarrow \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{MN}{PM}$$

جای $\cos \alpha$ هم در مثلث OPM، می‌توانیم بنویسیم $\frac{OP}{OM}$:

$$\frac{MN}{PM} = 2 \cos \alpha \Rightarrow \frac{MN}{PM} = \frac{2OP}{OM}$$



روی دایره، اندازه پاره‌ها را مشخص می‌کنیم:
 مساحت دوزنقه را می‌نویسیم:

$$S = \frac{(\text{ارتفاع} \times \text{قاعده} + \text{قاعده} \times \text{ارتفاع})}{2} = \frac{(\cos \alpha + 2 \cos \alpha) \times \sin \alpha}{2}$$

$$= \frac{3}{2} \sin \alpha \cos \alpha$$

جای $\sin \alpha \cos \alpha$ می‌نویسیم $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$:

$$S = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) = \frac{3}{4} \sin 2\alpha$$

حداکثر می‌شه

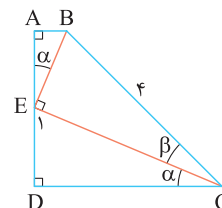
زمانی S ماکزیمم است که $\sin 2\alpha = 1$ باشد؛ پس:

$$S_{\max} = \frac{3}{4}$$

در چهارضلعی ABCD، مجموع زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ ، 180° است؛ پس:

$$\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{B} = 3, \hat{C} \text{ برابر است}} 4\hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 45^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 45^\circ$$

اندازه یک زاویه دیگر را روی شکل مشخص می‌کنیم:



$$\left. \begin{array}{l} \triangle EDC : \hat{E}_1 + \alpha = 90^\circ \\ \triangle AEB : \hat{E}_1 + \alpha = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{AEB} = \alpha$$

در مثلث BCE:

$$\sin \beta = \frac{BE}{4} \Rightarrow BE = 4 \sin \beta$$

$$\cos \beta = \frac{EC}{4} \Rightarrow EC = 4 \cos \beta$$

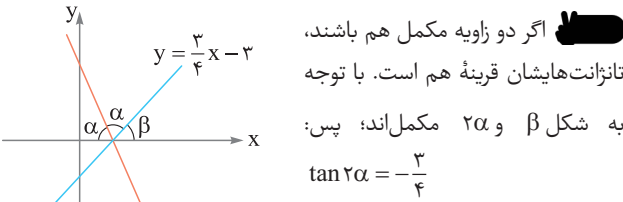
در مثلث DEC:

$$\sin \alpha = \frac{ED}{EC} \Rightarrow ED = 4 \sin \alpha \cos \beta$$

در مثلث ABE:

$$\cos \alpha = \frac{AE}{BE} \Rightarrow AE = 4 \sin \beta \cos \alpha$$

۸۹۱ **۱** چون شیب خط d' برابر $\frac{3}{4}$ است، پس: $\tan \beta = \frac{3}{4}$



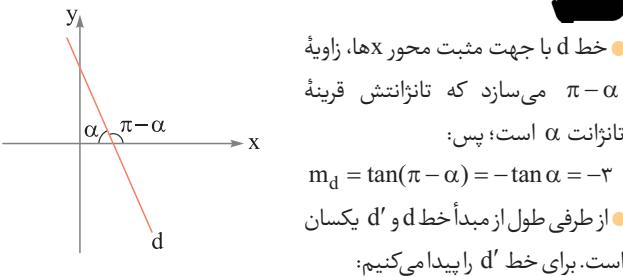
به کمک فرمول $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ مقدار $\tan \alpha$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = -\frac{3}{4} \Rightarrow 8 \tan \alpha = -3 + 3 \tan^2 \alpha$$

$$\Rightarrow 3 \tan^2 \alpha - 8 \tan \alpha - 3 = 0 \xrightarrow{\text{روسی}} \tan^2 \alpha - 8 \tan \alpha - 9 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} \tan \alpha = -1 \\ \tan \alpha = 9 \end{cases} \xrightarrow{\div 3} \begin{cases} \tan \alpha = -\frac{1}{3} \\ \tan \alpha = 3 \end{cases}$$

چون α حاده است، پس $\tan \alpha = 3$ قبول است.



$$y = \frac{3}{4}x - 3 \xrightarrow{y=0} \frac{3}{4}x - 3 = 0 \Rightarrow x = 4$$

معادله خط d را با داشتن شیب و نقطه $(4, 0)$ می‌نویسیم:

$$y - 0 = -3(x - 4) \Rightarrow y = -3x + 12$$

$$m + h = -3 + 12 = 9$$

پس:

۸۹۲ **۲** دو بار از اتحاد $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$ استفاده

$$\bullet \cot 12^\circ - \tan 12^\circ = 2 \cot 24^\circ$$

$$\bullet 2 \cot 48^\circ \xrightarrow{\text{برعکس}} \cot 24^\circ - \tan 24^\circ$$

جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A &= (\cot 12^\circ - \tan 12^\circ)(1 - 2 \cot 48^\circ \tan 24^\circ) \\ &= 2 \cot 24^\circ (1 - (\cot 24^\circ - \tan 24^\circ) \times \tan 24^\circ) \\ &= 2 \cot 24^\circ (1 - \cot 24^\circ \tan 24^\circ + \tan^2 24^\circ) \\ &= 2 \cot 24^\circ \cdot \tan^2 24^\circ = 2 \cot 24^\circ \tan 24^\circ \tan 24^\circ = 2 \tan 24^\circ \end{aligned}$$

۸۹۳ **۳** به کمک قواعد لگاریتم، معادله را ساده می‌کنیم:

$$\log_7 (\sin^2 \alpha) - \log_7 (1 + \cos \alpha) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \log_7 (\sin \alpha) - \log_7 (1 + \cos \alpha) = 1$$

$$\Rightarrow \log_7 (\sin \alpha) - \log_7 (1 + \cos \alpha) = 1$$

$$\xrightarrow{\log C A - \log C B = \log C \frac{A}{B}} \log_7 \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = 1 \xrightarrow{\text{تبدیل به نمایی}} 7^1 = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

در هر مثلث، مجموع دو زاویه داخلی برابر با زاویه خارجی رأس سوم است؛ پس:

$$\alpha + \alpha = 45^\circ \Rightarrow \alpha = 22.5^\circ$$

در رابطه $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ ، جای α می‌نویسیم 22.5° :

$$\cos 45^\circ = 2 \cos^2 22.5^\circ - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2 \cos^2 22.5^\circ$$

$$\xrightarrow{\div 2} \cos^2 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}$$

عدد $\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}$ به اندازه $\frac{\sqrt{2}}{4}$ از $\frac{1}{2}$ بیشتر است.

$$\frac{1}{2} = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

را توان دار می‌نویسیم:

۸۸۹ **۳** چون $\hat{O}B$ نیمساز $\hat{O}$ است، پس:

هر دو زاویه ایجاد شده در $\hat{O}$ را α می‌گیریم:

در مثلث OAC ، داریم:

$$\tan 2\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{24}{7}$$

$\tan 2\alpha$ را باز می‌کنیم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{24}{7} \Rightarrow 7 \tan 2\alpha = 24(1 - \tan^2 \alpha)$$

$$\xrightarrow{\text{روسی}} \tan^2 \alpha + 7 \tan \alpha - 144 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (\tan \alpha + 16)(\tan \alpha - 9) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = -16 \\ \tan \alpha = 9 \end{cases} \xrightarrow{\div 12} \begin{cases} \tan \alpha = -\frac{4}{3} \\ \tan \alpha = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\tan \alpha = \frac{BC}{1} \Rightarrow BC = \frac{3}{4}$$

$$AB = AC - BC = \frac{24}{7} - \frac{3}{4} = \frac{75}{28}$$

در نتیجه:

$$\tan \alpha = \frac{BC}{1} \Rightarrow BC = \frac{3}{4}$$

$$AB = AC - BC = \frac{24}{7} - \frac{3}{4} = \frac{75}{28}$$

در نتیجه:

$$AB = AC - BC = \frac{24}{7} - \frac{3}{4} = \frac{75}{28}$$

$$AB = AC - BC = \frac{24}{7} - \frac{3}{4} = \frac{75}{28}$$

$$AB = AC - BC = \frac{24}{7} - \frac{3}{4} = \frac{75}{28}$$

$$AB = AC - BC = \frac{24}{7} - \frac{3}{4} = \frac{75}{28}$$

$$AB = AC - BC = \frac{24}{7} - \frac{3}{4} = \frac{75}{28}$$

$$AB = AC - BC = \frac{24}{7} - \frac{3}{4} = \frac{75}{28}$$

$$AB = AC - BC = \frac{24}{7} - \frac{3}{4} = \frac{75}{28}$$

$$AB = AC - BC = \frac{24}{7} - \frac{3}{4} = \frac{75}{28}$$

$$AB = AC - BC = \frac{24}{7} - \frac{3}{4} = \frac{75}{28}$$

$$AB = AC - BC = \frac{24}{7} - \frac{3}{4} = \frac{75}{28}$$

$$AB = AC - BC = \frac{24}{7} - \frac{3}{4} = \frac{75}{28}$$

$$AB = AC - BC = \frac{24}{7} - \frac{3}{4} = \frac{75}{28}$$

$$AB = AC - BC = \frac{24}{7} - \frac{3}{4} = \frac{75}{28}$$

$$AB = AC - BC = \frac{24}{7} - \frac{3}{4} = \frac{75}{28}$$

$$AB = AC - BC = \frac{24}{7} - \frac{3}{4} = \frac{75}{28}$$

$$AB = AC - BC = \frac{24}{7} - \frac{3}{4} = \frac{75}{28}$$

$$AB = AC - BC = \frac{24}{7} - \frac{3}{4} = \frac{75}{28}$$

$$AB = AC - BC = \frac{24}{7} - \frac{3}{4} = \frac{75}{28}$$

$$AB = AC - BC = \frac{24}{7} - \frac{3}{4} = \frac{75}{28}$$

$$AB = AC - BC = \frac{24}{7} - \frac{3}{4} = \frac{75}{28}$$

$$AB = AC - BC = \frac{24}{7} - \frac{3}{4} = \frac{75}{28}$$

$$AB = AC - BC = \frac{24}{7} - \frac{3}{4} = \frac{75}{28}$$



در صورت از اتحاد $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ و در مخرج از اتحاد

طلایی $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$2 = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = 2 \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = 2$$

از اتحاد تانژانت 2α استفاده می‌کنیم:

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2(2)}{1 - 2^2} = \frac{-4}{3} \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{معکوس}} \cot \alpha = \frac{-3}{4}$$

سه عدد $\cot \alpha^\circ$ ، $\cot 2^\circ$ و $\cot 1^\circ$ ، سه جمله متوالی

یک دنباله حسابی‌اند؛ پس:

$$\cot 2^\circ = \frac{\cot \alpha^\circ + \cot 1^\circ}{2} \Rightarrow \cot 2^\circ = \frac{\cot \alpha^\circ + \cot 1^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow \cot 1^\circ + \cot \alpha^\circ = 2 \cot 2^\circ \quad (*)$$

در رابطه $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$ ، اگر $\alpha = 1^\circ$ باشد، داریم:

$$\cot 1^\circ - \tan 1^\circ = 2 \cot 2^\circ \quad (**)$$

از مقایسه $(*)$ و $(**)$ ، داریم:

$$\cot 1^\circ + \cot \alpha^\circ = \cot 1^\circ - \tan 1^\circ \Rightarrow \cot \alpha^\circ = -\tan 1^\circ$$

$$\cot \alpha^\circ = -\cot 8^\circ \quad \text{جای } \tan 1^\circ \text{ می‌نویسیم } \cot 8^\circ$$

دو زاویه که مکمل‌اند، کتانژانت‌هایشان قرینه هم است. 1° و 8°

مکمل‌اند؛ پس $-\cot 8^\circ$ با $\cot 1^\circ$ برابر است:

$$\cot \alpha^\circ = -\cot 8^\circ \Rightarrow \alpha = 100^\circ$$

می‌دانیم $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$ ، پس به جای

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha} \quad \text{می‌نویسیم}$$

$$2\left(\frac{2}{\sin 2\alpha}\right) + 6 \tan \alpha = 2(\tan \alpha + \cot \alpha) + 6 \tan \alpha$$

$$= 4 \tan \alpha + 2 \cot \alpha$$

اگر a و b اعدادی مثبت باشند، آن وقت $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ؛ پس با فرض

$$a = 4 \tan \alpha \text{ و } b = 2 \cot \alpha \text{، داریم:}$$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow 4 \tan \alpha + 2 \cot \alpha \geq 2\sqrt{(4 \tan \alpha)(2 \cot \alpha)} = 8$$

پس عبارت‌مان بزرگ‌تر یا مساوی ۸ است و در نتیجه کم‌ترین مقدارش ۸ است.