



وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: ریاضیات گسسته - پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه - ۱۳۲۱۵
پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: سید محمدرضا احمدی، حمیدرضا امیری، علی ایرانشین، مهدی ایزدی، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدحسین رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، میرشهرام صدر، اکرم قایل‌رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
حمیدرضا امیری، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سید صالحی و امید نقشبند از جمند (اعضای گروه تألیف) جعفر رتکی (ویراستار)
مدیریت آماده‌سازی هنری: اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی: احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ)، جواد صفری (مدیر هنری)، زهره بهشتی‌شیرازی (صفحه‌آرا)، مریم کیوان (طراح جلد)، مریم دهقان‌زاده (رسم)، سیده فاطمه طباطبائی، سید کیوان حسینی، علیرضا ملکان، زینت بهشتی‌شیرازی و راحله زاهدفتح‌اله (امور آماده‌سازی)
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹، ۸۸۳۰۹۲۶۶-۸۸۳۰۹۲۶۶، ۸۸۳۰۹۲۶۶-۸۸۳۰۹۲۶۶، ۸۸۳۰۹۲۶۶-۸۸۳۰۹۲۶۶
وبگاه: www.irtextbook.ir و www.chap.sch.ir
ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران: کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داریوش) تلفن: ۴۴۹۸۵۱۶۱-۵، ۴۴۹۸۵۱۶۰-۴۴۹۸۵۱۶۰، ۴۴۹۸۵۱۶۰-۴۴۹۸۵۱۶۰، ۴۴۹۸۵۱۶۰-۴۴۹۸۵۱۶۰
چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «بهایی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ هفتم ۱۴۰۳

شابک ۹۷۸-۹۶۴-۰۵-۳۱۱۱-۲
ISBN: 978-964-05-3111-2



وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: ریاضیات گسسته - پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه - ۱۳۲۱۵
پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: سید محمدرضا احمدی، حمیدرضا امیری، علی ایرانشین، مهدی ایزدی، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدحسین رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، میرشهرام صدر، اکرم قایل‌رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
حمیدرضا امیری، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سید صالحی و امید نقشبند از جمند (اعضای گروه تألیف) جعفر رتکی (ویراستار)
مدیریت آماده‌سازی هنری: اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی: احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ)، جواد صفری (مدیر هنری)، زهره بهشتی‌شیرازی (صفحه‌آرا)، مریم کیوان (طراح جلد)، مریم دهقان‌زاده (رسم)، سیده فاطمه طباطبائی، سید کیوان حسینی، علیرضا ملکان، زینت بهشتی‌شیرازی و راحله زاهدفتح‌اله (امور آماده‌سازی)
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹، ۸۸۳۰۹۲۶۶-۸۸۳۰۹۲۶۶، ۸۸۳۰۹۲۶۶-۸۸۳۰۹۲۶۶، ۸۸۳۰۹۲۶۶-۸۸۳۰۹۲۶۶
وبگاه: www.irtextbook.ir و www.chap.sch.ir
ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران: کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داریوش) تلفن: ۴۴۹۸۵۱۶۱-۵، ۴۴۹۸۵۱۶۰-۴۴۹۸۵۱۶۰، ۴۴۹۸۵۱۶۰-۴۴۹۸۵۱۶۰، ۴۴۹۸۵۱۶۰-۴۴۹۸۵۱۶۰
چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «بهایی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ هفتم ۱۴۰۴

شابک ۹۷۸-۹۶۴-۰۵-۳۱۱۱-۲
ISBN: 978-964-05-3111-2

تذکر: عکس ویژگی ۲ برقرار نیست، یعنی اگر $ac \equiv bc$ ، لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که $a \equiv b$ (قانون حذف برای رابطه هم‌نهشتی در حالت کلی برقرار نیست) برای این مطلب یک مثال نقض بزنید.

$$a \equiv b \Rightarrow a^n \equiv b^n$$

ویژگی ۳: (دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند.) ($n \in \mathbb{N}$)

$$\text{مثال: } (5 \equiv 2 \Rightarrow 5^3 \equiv 2^3)$$

اثبات: (از اتحاد $(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ استفاده می‌کنیم)

$$a \equiv b \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) \Rightarrow m \mid a^n - b^n$$

$$\Rightarrow m \mid a^n - b^n \Rightarrow a^n \equiv b^n$$

تذکر: می‌دانیم $5^3 \equiv 2^3$ ولی $5 \not\equiv 2$ بنابراین نتیجه می‌گیریم که ...

$$a \equiv b, c \equiv d \Rightarrow \begin{cases} ac \equiv bd & (1) \\ a+c \equiv b+d & (2) \\ a-c \equiv b-d & (3) \end{cases}$$

ویژگی ۴: دو طرف دو رابطه هم‌نهشتی را که پیمانه‌های یکسان داشته باشند می‌توان با هم جمع یا از هم منها و یا در هم ضرب کرد.

$$(15 \equiv 10, 7 \equiv 2 \Rightarrow 15 \times 7 \equiv 10 \times 2, 15 + 7 \equiv 10 + 2)$$

$$15 + 7 \equiv 10 + 2 \Rightarrow 22 \equiv 12$$

اثبات ①:

$$\begin{aligned} a \equiv b &\Rightarrow m \mid \dots \Rightarrow m \mid ac - bc \\ c \equiv d &\Rightarrow m \mid \dots \Rightarrow m \mid bc - bd \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m \mid ac - \dots \Rightarrow m \mid bd$$

اثبات ② به عهده شما

$$a \equiv b, b \equiv c \Rightarrow a \equiv c$$

ویژگی ۵:

$$\begin{aligned} a \equiv b &\Rightarrow m \mid a-b \\ b \equiv c &\Rightarrow m \mid b-c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m \mid a-c \Rightarrow a \equiv c$$

اثبات:

تذکر: عکس ویژگی ۲ برقرار نیست، یعنی اگر $ac \equiv bc$ ، لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که $a \equiv b$ (قانون حذف برای رابطه هم‌نهشتی در حالت کلی برقرار نیست) برای این مطلب یک مثال نقض بزنید.

$$a \equiv b \Rightarrow a^n \equiv b^n$$

ویژگی ۳: (دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند.) ($n \in \mathbb{N}$)

$$\text{مثال: } (5 \equiv 2 \Rightarrow 5^3 \equiv 2^3)$$

اثبات: (از اتحاد $(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ استفاده می‌کنیم)

$$a \equiv b \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) \Rightarrow m \mid a^n - b^n$$

$$\Rightarrow m \mid a^n - b^n \Rightarrow a^n \equiv b^n$$

تذکر: می‌دانیم $5^3 \equiv 2^3$ ولی $5 \not\equiv 2$ بنابراین نتیجه می‌گیریم که ...

$$a \equiv b, c \equiv d \Rightarrow \begin{cases} ac \equiv bd & (1) \\ a+c \equiv b+d & (2) \\ a-c \equiv b-d & (3) \end{cases}$$

ویژگی ۴: دو طرف دو رابطه هم‌نهشتی را که پیمانه‌های یکسان داشته باشند می‌توان با هم جمع یا از هم منها و یا در هم ضرب کرد.

$$(15 \equiv 10, 7 \equiv 2 \Rightarrow 15 \times 7 \equiv 10 \times 2, 15 + 7 \equiv 10 + 2)$$

$$15 + 7 \equiv 10 + 2 \Rightarrow 22 \equiv 12$$

اثبات ①:

$$\begin{aligned} a \equiv b &\Rightarrow m \mid \dots \Rightarrow m \mid ac - bc \\ c \equiv d &\Rightarrow m \mid \dots \Rightarrow m \mid bc - bd \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m \mid ac - \dots \Rightarrow m \mid bd$$

اثبات ② به عهده شما

$$a \equiv b, b \equiv c \Rightarrow a \equiv c$$

ویژگی ۵:

$$\begin{aligned} a \equiv b &\Rightarrow m \mid a-b \\ b \equiv c &\Rightarrow m \mid b-c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m \mid a-c \Rightarrow a \equiv c$$

اثبات:

$$2000x + 5000y = 18000$$

$$\Rightarrow 2x + 5y = \dots$$

$$\Rightarrow 2x = 18 \text{ و } 18 = \dots$$

$$\Rightarrow x = 9$$

$$\Rightarrow x = \dots \Rightarrow x = 5k + 4$$

$$\Rightarrow 2(5k + 4) + 5y = 18$$

$$\Rightarrow 10k + 8 + 5y = 18$$

$$\Rightarrow 10k + 5y = 10 \Rightarrow y = -2k + 2$$

$$k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \text{ و } k = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 0 \end{cases} \quad (\text{فقط به ازای } 1 \text{ و } 0 \text{ برای } x \text{ و } y \text{ جواب‌ها نامنفی هستند})$$

پس به دو طریق امکان تبدیل کردن ۱۸۰۰۰ تومان به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی، وجود دارد.

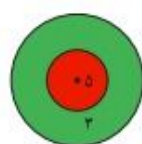
مثال: در یک رستوران فقط دو نوع خورش قورمه‌سبزی و قیمه وجود دارد. اگر ۵ نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند؟ (هر نفر فقط یک پرس غذا میل می‌کند)

حل: اگر تعداد جلو خورش قورمه‌سبزی و جلو خورش قیمه سفارش داده شده را به ترتیب با x و y نشان دهیم خواهیم داشت:

$$x + y = 5 \Rightarrow x = 5 - y \Rightarrow x = k + \dots$$

$$\Rightarrow k + k + y = 5 \Rightarrow y = \dots$$

چون x و y اعدادی نامنفی هستند پس باید $k \in \{0, -1, -2, -3, -4, -5\}$ و لذا به ۶ طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند.



مثال: تیراندازی به سمت یک هدف، شامل دو دایره هم مرکز، تیراندازی می‌کند. اگر او تیر را به دایره یا شعاع کوچک‌تر بزند ۵ امتیاز و اگر به دایره بزرگ‌تر و خارج دایره کوچک‌تر بزند ۳ امتیاز می‌گیرد. اگر او کمتر از ۱۵ تیر انداخته و همه تیرها به داخل دایره بزرگ‌تر اصابت کرده باشند و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشند چند حالت برای او در این تیراندازی می‌تواند ثبت شود؟

حل: اگر x و y را به ترتیب تعداد اصابت‌ها به دایره کوچک‌تر و بزرگ‌تر فرض کنیم، داریم:

$$5x + 3y = 42 \Rightarrow 5x = 42 - 3y$$

$$\Rightarrow 5x = 42 - 3y \Rightarrow x = \frac{42 - 3y}{5}$$

$$\Rightarrow x = 3k + 9$$

$$5(3k + 9) + 3y = 42$$

$$\Rightarrow 15k + 45 + 3y = 42$$

$$2000x + 5000y = 18000$$

$$\Rightarrow 2x + 5y = \dots$$

$$\Rightarrow 2x = 18 \text{ و } 18 = \dots$$

$$\Rightarrow x = 9$$

$$\Rightarrow x = \dots \Rightarrow x = 5k + 4$$

$$\Rightarrow 2(5k + 4) + 5y = 18$$

$$\Rightarrow 10k + 8 + 5y = 18$$

$$\Rightarrow 10k + 5y = 10 \Rightarrow y = -2k + 2$$

$$k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \text{ و } k = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 0 \end{cases} \quad (\text{فقط به ازای } 1 \text{ و } 0 \text{ برای } x \text{ و } y \text{ جواب‌ها نامنفی هستند})$$

پس به دو طریق امکان تبدیل کردن ۱۸۰۰۰ تومان به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی، وجود دارد.

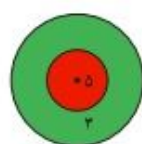
مثال: در یک رستوران فقط دو نوع خورش قورمه‌سبزی و قیمه وجود دارد. شخصی می‌خواهد ۵ پرس غذا سفارش دهد. این سفارش به چند روش قابل انجام است؟

حل: اگر تعداد جلو خورش قورمه‌سبزی و جلو خورش قیمه سفارش داده شده را به ترتیب با x و y نشان دهیم خواهیم داشت:

$$x + y = 5 \Rightarrow x = 5 - y \Rightarrow x = k + \dots$$

$$\Rightarrow k + k + y = 5 \Rightarrow y = \dots$$

چون x و y اعدادی نامنفی هستند پس باید $k \in \{0, -1, -2, -3, -4, -5\}$ و لذا به ۶ طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند.



مثال: تیراندازی به سمت یک هدف، شامل دو دایره هم مرکز، تیراندازی می‌کند. اگر او تیر را به دایره یا شعاع کوچک‌تر بزند ۵ امتیاز و اگر به دایره بزرگ‌تر و خارج دایره کوچک‌تر بزند ۳ امتیاز می‌گیرد. اگر او کمتر از ۱۵ تیر انداخته و همه تیرها به داخل دایره بزرگ‌تر اصابت کرده باشند و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشند چند حالت برای او در این تیراندازی می‌تواند ثبت شود؟

حل: اگر x و y را به ترتیب تعداد اصابت‌ها به دایره کوچک‌تر و بزرگ‌تر فرض کنیم، داریم:

$$5x + 3y = 42 \Rightarrow 5x = 42 - 3y$$

$$\Rightarrow 5x = 42 - 3y \Rightarrow x = \frac{42 - 3y}{5}$$

$$\Rightarrow x = 3k + 9$$

$$5(3k + 9) + 3y = 42$$

$$\Rightarrow 15k + 45 + 3y = 42$$

با توجه به آنچه در کار در کلاس دیدیم برای هر عدد طبیعی مانند n ، مربع لاتین $n \times n$ وجود دارد. حال فرض کنیم یک مربع لاتین مانند شکل زیر داریم و با اعمال یک جایگشت بر روی $1, 2, 3, \dots, n$ یک مربع جدید به دست آورده ایم. خواهیم دید که مربع به دست آمده نیز یک مربع لاتین خواهد بود، زیرا در غیر این صورت در سطر یا ستونی از مربع جدید عضو تکراری وجود خواهد داشت که این موضوع با توجه به خواص جایگشت ايجاب می کند که در سطر یا ستونی از مربع اول نیز عضو تکراری وجود داشته باشد و این با مربع لاتین بودن آن در تناقض است.

۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱

 $\xrightarrow{\begin{matrix} 1 \rightarrow 3 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 4 \\ 4 \rightarrow 1 \end{matrix}}$

۴	۱	۳	۲
۲	۳	۱	۴
۳	۲	۴	۱
۱	۴	۲	۳

با جایگزینی اعداد $1, 2, 3, 4$ از جدول اول به ترتیب با اعداد $3, 2, 4, 1$ و جدول دوم حاصل شده است.

کار در کلاس

برای هر یک از مربع های لاتین زیر یک جایگشت مشخص نمایید. سپس برای هر یک از جایگشت ها از روی مربع لاتین داده شده یک مربع لاتین به دست آورید.

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

۱	۳	۵	۴	۲
۵	۴	۲	۱	۳
۲	۱	۳	۵	۴
۳	۵	۴	۲	۱
۴	۲	۱	۳	۵

دو مربع لاتین متعامد

تعریف: فرض کنید A و B دو مربع لاتین متمایز هم مرتبه باشند به طوری که از کنار هم قرار دادن درایه های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانه آن حاوی یک عدد دو رقمی است که تمام رقم های سمت چپ مربوط به مربع A و تمام رقم های سمت راست مربوط به مربع B (و یا برعکس) است. در این صورت گوییم دو مربع لاتین A و B «متعامدند» هرگاه هیچ یک از اعداد دو رقمی موجود در خانه های مربع جدید تکرار نشده باشند.

با توجه به آنچه در کار در کلاس دیدیم برای هر عدد طبیعی مانند n ، مربع لاتین $n \times n$ وجود دارد. حال فرض کنیم یک مربع لاتین مانند شکل زیر داریم و با اعمال یک جایگشت بر روی $1, 2, 3, \dots, n$ یک مربع جدید به دست آورده ایم. خواهیم دید که مربع به دست آمده نیز یک مربع لاتین خواهد بود، زیرا در غیر این صورت در سطر یا ستونی از مربع جدید عضو تکراری وجود خواهد داشت که این موضوع با توجه به خواص جایگشت ايجاب می کند که در سطر یا ستونی از مربع اول نیز عضو تکراری وجود داشته باشد و این با مربع لاتین بودن آن در تناقض است.

۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱

 $\xrightarrow{\begin{matrix} 1 \rightarrow 3 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 4 \\ 4 \rightarrow 1 \end{matrix}}$

۴	۱	۳	۲
۲	۳	۱	۴
۳	۲	۴	۱
۱	۴	۲	۳

با جایگزینی اعداد $1, 2, 3, 4$ از جدول اول به ترتیب با اعداد $3, 2, 4, 1$ و جدول دوم حاصل شده است.

کار در کلاس

برای هر یک از مربع های لاتین زیر یک جایگشت مشخص نمایید. سپس برای هر یک از جایگشت ها از روی مربع لاتین داده شده یک مربع لاتین به دست آورید.

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

۱	۳	۵	۴	۲
۵	۴	۲	۱	۳
۲	۱	۳	۵	۴
۳	۵	۴	۲	۱
۴	۲	۱	۳	۵

دو مربع لاتین متعامد

تعریف: فرض کنید A و B دو مربع لاتین هم مرتبه باشند به طوری که از کنار هم قرار دادن درایه های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانه آن حاوی یک عدد دو رقمی است که تمام رقم های سمت چپ مربوط به مربع A و تمام رقم های سمت راست مربوط به مربع B (و یا برعکس) است. در این صورت گوییم دو مربع لاتین A و B «متعامدند» هرگاه هیچ یک از اعداد دو رقمی موجود در خانه های مربع جدید تکرار نشده باشند.

فعالیت

اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد و $|A|=m$ و $|B|=n$ ، در این صورت برای هر $a_i \in A$ که $1 \leq i \leq m$ می توان به طریق n طریق $f(a_i)$ را تعریف کرد $f(a_i)=b_1$ یا $f(a_i)=b_2$ یا $f(a_i)=b_3$ یا $f(a_i)=b_4$ یا $f(a_i)=b_5$ یا $f(a_i)=b_6$ و لذا طبق اصل ضرب تعداد کل توابع از A به B برابر است با: $|B|^{|A|}=n^m$. حال اگر $|A|=5$ و $|B|=3$ ، در این صورت می خواهیم تعداد توابعی چون f از A به B را تعیین کنیم به طوری که $R_f=B$. (روی تمام اعضای B ، پیکانی رسم شده باشد، به چنین تابع هایی، تابع پوشا گفته می شود.)

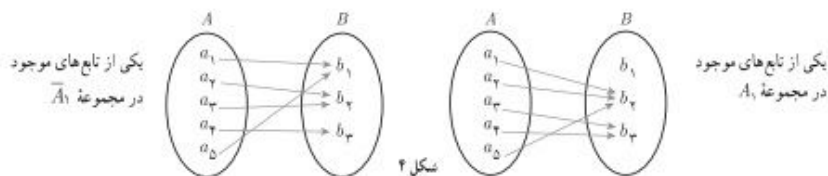
اگر فرض کنیم $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ و $B=\{b_1, b_2, b_3\}$ و تعریف کنیم،

$$A_1=\{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_1; 1 \leq i \leq 5\}$$

$$A_2=\{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq \dots; 1 \leq i \leq 5\}$$

$$A_3=\{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq \dots; 1 \leq i \leq 5\}$$

در این صورت $\bar{A}_1$ مجموعه ای شامل همه تابع هایی از A به B است که حداقل یک پیکان از اعضای A روی b_1 می آورند.



مجموعه $(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ را تعریف کنید و با استفاده از نتیجه اصل شمول، پاسخ را بیابید.

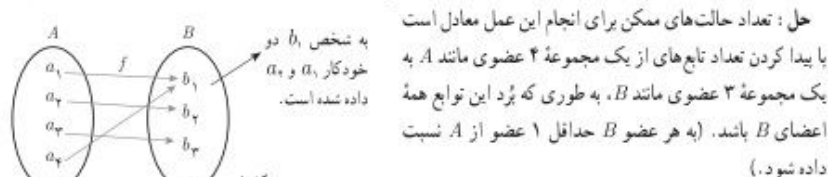
$$|S| = 3^5 = \dots, |A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^5 = \dots$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = \dots, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \dots$$

$$|\overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$= 243 - (\dots + \dots + \dots - \dots - \dots + \dots) = \dots$$

مثال: به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟



$$A_j = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 3\}$$

$$|S| = |B|^{|A|} = 3^4 = 81$$

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^4 = 16$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1^4 = 1, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \dots$$

فعالیت

اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد و $|A|=m$ و $|B|=n$ ، در این صورت برای هر $a_i \in A$ که $1 \leq i \leq m$ می توان به طریق n طریق $f(a_i)$ را تعریف کرد $f(a_i)=b_1$ یا $f(a_i)=b_2$ یا $f(a_i)=b_3$ یا $f(a_i)=b_4$ یا $f(a_i)=b_5$ یا $f(a_i)=b_6$ و لذا طبق اصل ضرب تعداد کل توابع از A به B برابر است با: $|B|^{|A|}=n^m$. حال اگر $|A|=5$ و $|B|=3$ ، در این صورت می خواهیم تعداد توابعی چون f از A به B را تعیین کنیم به طوری که $R_f=B$. (روی تمام اعضای B ، پیکانی رسم شده باشد، به چنین تابع هایی، تابع پوشا گفته می شود.)

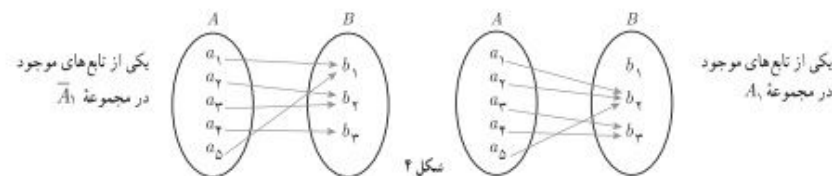
اگر فرض کنیم $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ و $B=\{b_1, b_2, b_3\}$ و تعریف کنیم،

$$A_1=\{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_1; 1 \leq i \leq 5\}$$

$$A_2=\{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq \dots; 1 \leq i \leq 5\}$$

$$A_3=\{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq \dots; 1 \leq i \leq 5\}$$

در این صورت $\bar{A}_1$ مجموعه ای شامل همه تابع هایی از A به B است که حداقل یک پیکان از اعضای A روی b_1 می آورند.



مجموعه $(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ را تعریف کنید و با استفاده از نتیجه اصل شمول، پاسخ را بیابید.

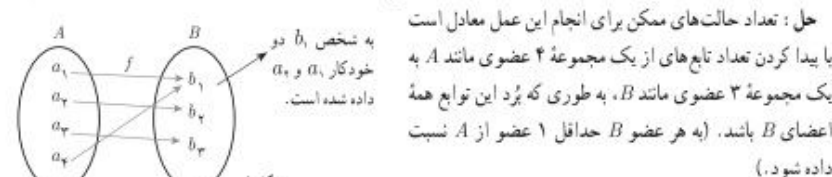
$$|S| = 3^5 = \dots, |A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^5 = \dots$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = \dots, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \dots$$

$$|\overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$= 243 - (\dots + \dots + \dots - \dots - \dots + \dots) = \dots$$

مثال: به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟



$$A_j = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 3\}$$

$$|S| = |B|^{|A|} = 3^4 = 81$$

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^4 = 16$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1^4 = 1, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \dots$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$= 81 - (3 \times 16 - 3 \times 1 + 0) = 36$$

تذکر: تعداد تابع‌هایی چون $A \rightarrow B$ با فرض $|A|=m \geq 3$ و $|B|=3$ به‌طوری که $R_f = B$ ، از رابطه $3^m - (3 \times 2^m - 3) - 3^m$ به‌دست می‌آید.

مثال: ۸ نفر را که برای یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده‌اند، انتخاب کرده‌ایم و می‌خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله ۱ جایزه را به یکی از این ۸ نفر (یا قرعه‌کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (یک نفر می‌تواند ۴ جایزه را برنده شود.)

حل: حل این مثال معادل است با یافتن تعداد تابع‌های ممکن از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۸ عضوی که برابر است با $8^4 = 4096$.

فعالیت

می‌خواهیم تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۶ عضوی را شمارش کنیم.
۱ اگر فرض کنیم $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ و $B = \{b_1, b_2, \dots, b_6\}$ برای تعریف f روی هر عضو A مثلاً $f(a_1)$ ، چند راه انتخاب داریم؟

۲ با توجه به اینکه f باید یک‌به‌یک باشد و تعریف یک‌به‌یکی در توابع، پس از تعریف $f(a_1)$ ، برای تعریف f روی a_2 چند راه انتخاب داریم؟

۳ با توجه به اصل ضرب، در کل، چند تابع یک‌به‌یک از A به B می‌توان تعریف کرد؟ پاسخ خود را توسط تبدیل r شیء از n شیء بنویسید.

به ۶ طریق می‌توان $f(a_1)$ را تعریف کرد $\rightarrow b_1$ یا b_2 یا $\dots$ یا b_6 یا $f(a_1) = b_1$

به ۵ طریق می‌توان $f(a_2)$ را تعریف کرد $\rightarrow f(a_2) \neq f(a_1) \Rightarrow f$ یک‌به‌یک است

$\dots \Rightarrow f(a_3) \neq f(a_1), f(a_2) \neq f(a_1), f(a_3) \neq f(a_2) \Rightarrow f$ یک‌به‌یک است

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \frac{6!}{1!} = (6)_6$$

در حالت کلی اگر $|A|=m$ و $|B|=k$ در این صورت با شرط $m \leq k$ تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعه A به مجموعه B برابر

$$(k)_m = \frac{k!}{(k-m)!}$$

است با تعداد انتخاب‌های m شیء از بین k شیء یا

مثال: به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم)

حل: تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن



شکل ۶

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$= 81 - (3 \times 16 - 3 \times 1 + 0) = 36$$

تذکر: تعداد تابع‌هایی چون $A \rightarrow B$ با فرض $|A|=m \geq 3$ و $|B|=3$ به‌طوری که $R_f = B$ ، از رابطه $3^m - (3 \times 2^m - 3) - 3^m$ به‌دست می‌آید.

مثال: ۸ نفر را که برای یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده‌اند، انتخاب کرده‌ایم و می‌خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله ۱ جایزه را به یکی از این ۸ نفر (یا قرعه‌کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (یک نفر می‌تواند ۴ جایزه را برنده شود.)

حل: حل این مثال معادل است با یافتن تعداد تابع‌های ممکن از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۸ عضوی که برابر است با $8^4 = 4096$.

فعالیت

می‌خواهیم تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۶ عضوی را شمارش کنیم.
۱ اگر فرض کنیم $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ و $B = \{b_1, b_2, \dots, b_6\}$ برای تعریف f روی هر عضو A مثلاً $f(a_1)$ ، چند راه انتخاب داریم؟

۲ با توجه به اینکه f باید یک‌به‌یک باشد و تعریف یک‌به‌یکی در توابع، پس از تعریف $f(a_1)$ ، برای تعریف f روی a_2 چند راه انتخاب داریم؟

۳ با توجه به اصل ضرب، در کل، چند تابع یک‌به‌یک از A به B می‌توان تعریف کرد؟ پاسخ خود را توسط تبدیل r شیء از n شیء بنویسید.

به ۶ طریق می‌توان $f(a_1)$ را تعریف کرد $\rightarrow b_1$ یا b_2 یا $\dots$ یا b_6 یا $f(a_1) = b_1$

به ۵ طریق می‌توان $f(a_2)$ را تعریف کرد $\rightarrow f(a_2) \neq f(a_1) \Rightarrow f$ یک‌به‌یک است

$\dots \Rightarrow f(a_3) \neq f(a_1), f(a_2) \neq f(a_1), f(a_3) \neq f(a_2) \Rightarrow f$ یک‌به‌یک است

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \frac{6!}{1!} = (6)_6$$

در حالت کلی اگر $|A|=m$ و $|B|=k$ در این صورت با شرط $m \leq k$ تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعه A به مجموعه B برابر

$$(k)_m = \frac{k!}{(k-m)!}$$

است با تعداد انتخاب‌های m شیء از بین k شیء یا

مثال: به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم)

حل: تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن



شکل ۶

تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعه‌ای ۴ عضوی به مجموعه‌ای ... عضوی یعنی، $\frac{4!}{1!} = \dots$ (۸).

اصل لانه کبوتری^۱

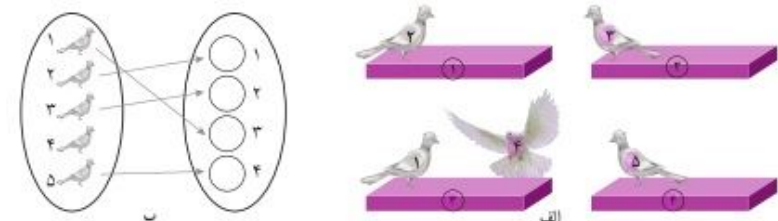
اگر از شما سؤال شود که حداقل چند نفر باید در یک کلاس حضور داشته باشند تا مطمئن شوید لااقل دو نفر از آنها ماه تولدشان یکسان است، چه پاسخی می‌دهید؟ بدترین حالت ممکن این است که افراد داخل کلاس از نفر اول هر کدام در یک ماه متفاوت با نفر قبلی به دنیا آمده باشند، تا کجا می‌توان مقاومت کرد؟ واضح است که حداکثر تا ۱۲ نفر با فرض اینکه هر نفر در یک ماه متفاوت از بقیه متولد شده باشد، می‌توان به این روند ادامه داد و هنوز اطمینانی برای اینکه حداقل دو نفر ماه تولدشان مثل هم باشد وجود ندارد، ولی اگر ۱۳ نفر در کلاس حضور داشته باشند این اطمینان حاصل می‌شود! (نفر سیزدهم در هر ماهی متولد شده باشد، ۱ نفر از آن ۱۲ نفر در آن ماه متولد شده است.)



شکل ۷

حال با توجه به مطالب فوق به نظر شما حداقل چند دانش‌آموز در یک مدرسه باید حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم، حداقل ۲ نفر از آنها روز تولدشان یکی است؟
در این قسمت به بیان اصل لانه کبوتری پرداخته و سپس مسائلی را مطرح می‌کنیم و با استفاده از این اصل و تعمیم آن، مسائل را حل خواهیم کرد.

اصل لانه کبوتری: اگر m کبوتر n لانه داشته باشیم و $m > n$ و همه کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.



شکل ۸

۱- اصل لانه کبوتری اصطلاحاً «اصل» نامیده می‌شود و در واقع قضیه‌ای است که با برهان خلف اثبات می‌شود. این اصل را اصل حجره‌ها نیز نامیده‌اند.

تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعه‌ای ۴ عضوی به مجموعه‌ای ... عضوی یعنی، $\frac{4!}{1!} = \dots$ (۸).

اصل لانه کبوتری^۱

اگر از شما سؤال شود که حداقل چند نفر باید در یک کلاس حضور داشته باشند تا مطمئن شوید لااقل دو نفر از آنها ماه تولدشان یکسان است، چه پاسخی می‌دهید؟ بدترین حالت ممکن این است که افراد داخل کلاس از نفر اول هر کدام در یک ماه متفاوت با نفر قبلی به دنیا آمده باشند، تا کجا می‌توان مقاومت کرد؟ واضح است که حداکثر تا ۱۲ نفر با فرض اینکه هر نفر در یک ماه متفاوت از بقیه متولد شده باشد، می‌توان به این روند ادامه داد و هنوز اطمینانی برای اینکه حداقل دو نفر ماه تولدشان مثل هم باشد وجود ندارد، ولی اگر ۱۳ نفر در کلاس حضور داشته باشند این اطمینان حاصل می‌شود! (نفر سیزدهم در هر ماهی متولد شده باشد، ۱ نفر از آن ۱۲ نفر در آن ماه متولد شده است.)



شکل ۷

حال با توجه به مطالب فوق به نظر شما حداقل چند دانش‌آموز در یک مدرسه باید حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم، حداقل ۲ نفر از آنها روز تولدشان یکی است؟
در این قسمت به بیان اصل لانه کبوتری پرداخته و سپس مسائلی را مطرح می‌کنیم و با استفاده از این اصل و تعمیم آن، مسائل را حل خواهیم کرد.

اصل لانه کبوتری: اگر m کبوتر n لانه داشته باشیم و $m > n$ و همه کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.



شکل ۸

۱- اصل لانه کبوتری اصطلاحاً «اصل» نامیده می‌شود و در واقع قضیه‌ای است که با برهان خلف اثبات می‌شود. این اصل را اصل حجره‌ها نیز نامیده‌اند.

مثال: نشان دهید اگر بخواهیم ضلع‌های یک مثلث را با دو رنگ آبی یا قرمز رنگ کنیم، حداقل دو ضلع این مثلث همرنگ خواهند شد.

حل: اگر ضلع‌های مثلث را کبوترها و دو رنگ آبی و قرمز را لانه‌ها فرض کنیم، طبق اصل لانه کبوتری در یکی از لانه‌ها حداقل ۲ کبوتر قرار خواهد گرفت (دو کبوتر در یک لانه معادل است با دو ضلع با یک رنگ).

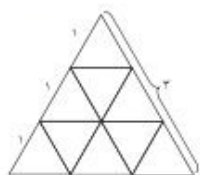
مثال: ثابت کنید در بین هر ۵ عدد طبیعی دلخواه حداقل دو عدد یافت می‌شود به طوری که به پیمانه ۴ هم‌نهشت می‌باشند.

حل: می‌دانیم باقی‌مانده‌های تقسیم هر عدد بر ۴ یکی از اعضای مجموعه $R = \{0, 1, 2, 3\}$ است، حال اگر ۵ عدد طبیعی را کبوترها و باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ را لانه‌ها فرض کنیم، طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار خواهند گرفت، یعنی حداقل دو عدد از این ۵ عدد باقی‌مانده‌های تقسیمشان بر ۴ با هم برابر است. حال اگر آن دو عدد را a و b فرض کنیم، a و b بر ۴ هم باقی‌مانده بوده و بنابر تعریف هم‌نهشتی باید $a \equiv b$ و حکم به دست می‌آید.

تمرین: در حالت کلی ثابت کنید در بین هر $(n+1)$ عدد طبیعی دلخواه و بیشتر، همواره حداقل ۲ عدد مانند a و b یافت می‌شوند به قسمی که تفاضل آنها بر n بخش‌پذیر است. (به پیمانه n هم‌نهشت‌اند).

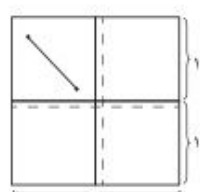
کادر طلایی

۱. یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۳ واحد را تقسیم‌بندی کرده‌ایم. نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد.



شکل ۹

۲. با توجه به ۱ برای شکل مقابل یک مسئله طرح کنید و با استفاده از اصل لانه کبوتری به آن پاسخ دهید.



شکل ۱۰

۲. نشان دهید در یک خانواده حداقل ۵ نفری، دست کم دو نفر فصل تولدشان یکی است.

۳. نشان دهید در هر گراف ساده از مرتبه $P \geq 2$ حداقل دو رأس هم‌درجه وجود دارد. (راهنمایی: مسئله را در دو حالت بررسی کنید. (۱) حالتی که رأس ایزوله یا تنها نداشته باشیم که در این صورت درجات رئوس از ۱ تا $n-1$ تغییر می‌کند. (۲) حالتی که یک رأس تنها داشته باشیم که در این صورت درجات بقیه رئوس از ۱ تا $n-2$ تغییر می‌کند) آیا نیازی هست حالتی را در نظر بگیریم که دو رأس یا بیشتر تنها باشند؟

مثال: نشان دهید اگر بخواهیم ضلع‌های یک مثلث را با دو رنگ آبی یا قرمز رنگ کنیم، حداقل دو ضلع این مثلث همرنگ خواهند شد.

حل: اگر ضلع‌های مثلث را کبوترها و دو رنگ آبی و قرمز را لانه‌ها فرض کنیم، طبق اصل لانه کبوتری در یکی از لانه‌ها حداقل ۲ کبوتر قرار خواهد گرفت (دو کبوتر در یک لانه معادل است با دو ضلع با یک رنگ).

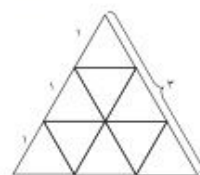
مثال: ثابت کنید در بین هر ۵ عدد طبیعی دلخواه حداقل دو عدد یافت می‌شود به طوری که به پیمانه ۴ هم‌نهشت می‌باشند.

حل: می‌دانیم باقی‌مانده‌های تقسیم هر عدد بر ۴ یکی از اعضای مجموعه $R = \{0, 1, 2, 3\}$ است، حال اگر ۵ عدد طبیعی را کبوترها و باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ را لانه‌ها فرض کنیم، طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار خواهند گرفت، یعنی حداقل دو عدد از این ۵ عدد باقی‌مانده‌های تقسیمشان بر ۴ با هم برابر است. حال اگر آن دو عدد را a و b فرض کنیم، a و b بر ۴ هم باقی‌مانده بوده و بنابر تعریف هم‌نهشتی باید $a \equiv b$ و حکم به دست می‌آید.

تمرین: در حالت کلی ثابت کنید در بین هر $(n+1)$ عدد طبیعی دلخواه و بیشتر، همواره حداقل ۲ عدد مانند a و b یافت می‌شوند به قسمی که تفاضل آنها بر n بخش‌پذیر است. (به پیمانه n هم‌نهشت‌اند).

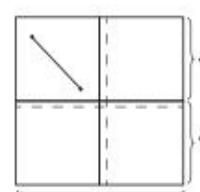
کادر طلایی

۱. یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۳ واحد را تقسیم‌بندی کرده‌ایم. نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد.



شکل ۹

۲. با توجه به ۱ برای شکل مقابل یک مسئله طرح کنید و با استفاده از اصل لانه کبوتری به آن پاسخ دهید.



شکل ۱۰

۲. نشان دهید در یک خانواده حداقل ۵ نفری، دست کم دو نفر فصل تولدشان یکی است.

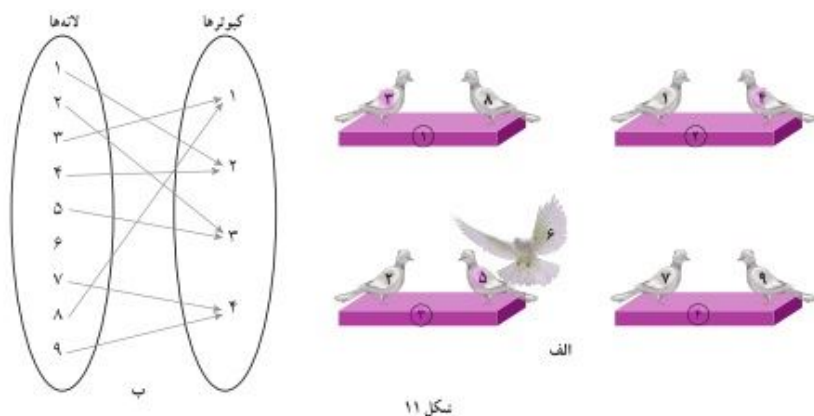
۳. نشان دهید در هر گراف ساده از مرتبه $P \geq 2$ حداقل دو رأس هم‌درجه وجود دارد. (راهنمایی: مسئله را در دو حالت بررسی کنید. (۱) حالتی که رأس ایزوله یا تنها نداشته باشیم که در این صورت درجات رئوس از ۱ تا $n-1$ تغییر می‌کند. (۲) حالتی که یک رأس تنها داشته باشیم که در این صورت درجات بقیه رئوس از ۱ تا $n-2$ تغییر می‌کند) آیا نیازی هست حالتی را در نظر بگیریم که دو رأس یا بیشتر تنها باشند؟

فعالیت

جدول زیر را (با توجه به فرار دادن n کبوتر در n لانه در هر مرحله) کامل کنید و نتیجه گیری خود را با نتیجه داخل کادر (تعمیم اصل لانه کبوتری) مقایسه کنید.

تعداد لانه‌ها (n)	تعداد کبوترها ($kn+1$)	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل $(k+1)$ کبوتر
n	$1 \times n + 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۲ کبوتر
n	$2 \times n + 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ... کبوتر
n	$\dots + 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۴ کبوتر
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\dots + 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل کبوتر

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در سطر دوم به ازای $n=4$ و $k=2$ تعداد کبوترها $2 \times 4 + 1 = 9$ می‌باشد که طبق جدول می‌بایست لانه‌ای با حداقل ۳ کبوتر یافت شود و شکل زیر گویای این روش است که اگر در هر لانه یک کبوتر قرار بگیرد و از هر ۵ کبوتر باقی‌مانده مجدد در هر لانه ۱ کبوتر قرار بگیرد در نهایت نهمین کبوتر در هر لانه‌ای قرار بگیرد همان لانه دارای ۳ کبوتر است. توجه دارید که در حالت‌های زیادی از نشستن کبوترها در لانه‌ها حداقل ۱ لانه با حداقل ۳ کبوتر می‌تواند وجود داشته باشد (همه کبوترها در ۱ لانه قرار بگیرند یا ۵ کبوتر در ۱ لانه و ۴ کبوتر در لانه‌ای دیگر یا ...).



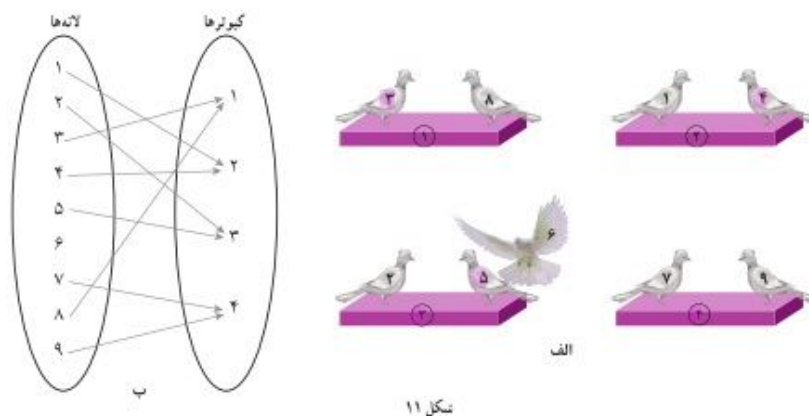
تعمیم اصل لانه کبوتری: هرگاه $(kn+1)$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k+1)$ کبوتر در آن قرار گرفته است.

فعالیت

جدول زیر را (با توجه به فرار دادن n کبوتر در n لانه در هر مرحله) کامل کنید و نتیجه گیری خود را با نتیجه داخل کادر (تعمیم اصل لانه کبوتری) مقایسه کنید.

تعداد لانه‌ها (n)	تعداد کبوترها ($kn+1$)	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل $(k+1)$ کبوتر
n	$1 \times n + 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۲ کبوتر
n	$2 \times n + 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ... کبوتر
n	$\dots + 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۴ کبوتر
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\dots + 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل کبوتر

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در سطر دوم به ازای $n=4$ و $k=2$ تعداد کبوترها $2 \times 4 + 1 = 9$ می‌باشد که طبق جدول می‌بایست لانه‌ای با حداقل ۳ کبوتر یافت شود و شکل زیر گویای این روش است که اگر در هر لانه یک کبوتر قرار بگیرد و از هر ۵ کبوتر باقی‌مانده مجدد در هر لانه ۱ کبوتر قرار بگیرد در نهایت نهمین کبوتر در هر لانه‌ای قرار بگیرد همان لانه دارای ۳ کبوتر است. توجه دارید که در حالت‌های زیادی از نشستن کبوترها در لانه‌ها حداقل ۱ لانه با حداقل ۳ کبوتر می‌تواند وجود داشته باشد (همه کبوترها در ۱ لانه قرار بگیرند یا ۵ کبوتر در ۱ لانه و ۴ کبوتر در لانه‌ای دیگر یا ...).



تعمیم اصل لانه کبوتری: هرگاه $(kn+1)$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k+1)$ کبوتر در آن قرار گرفته است.

مثال : در یک اردوی دانش آموزی حداقل چند دانش آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟

حل : در این مسئله $k+1=7$ یعنی $k=6$ است و n یا تعداد لانه‌ها همان تعداد ماه‌های سال یعنی $n=12$ است. پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش‌آموزان حداقل می‌بایست $k(n+1)=6 \times 12 + 1 = 73$ باشد.

کار در کلاس

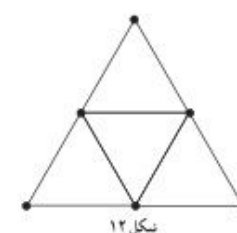
۱ در یک دبیرستان حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر از آنها ماه و روز هفته تولدشان یکی است؟

۲ ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

$$k+1=\dots \Rightarrow k=\dots$$

$$kn+1=54 \Rightarrow 4n=\dots \Rightarrow n=\left[\frac{\dots}{4}\right]=\dots$$

۳ حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۳ نفر از آنها دو حرف اول و دوم فامیلشان غیر تکراری و مثل هم است؟
(فامیلی‌هایی مثل اشتری و اشراقی مورد نظر است).



مثال : حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله‌شان کمتر از ۱ است.

حل : کافی است مطابق شکل، مثلث مفروض را به ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۱ تقسیم بندی کنید که در این صورت اگر ۵ نقطه از داخل این مثلث انتخاب کنید طبق اصل لانه کبوتری اطمینان دارید حداقل یکی از مثلث‌ها شامل دست کم ۲ نقطه از این ۵ نقطه خواهد بود و فاصله این دو نقطه از طول ضلع مثلث‌های کوچک‌تر کمتر می‌باشد.

مثال : نشان دهید در هر کلاس با n دانش‌آموز ($n \geq 2$) حداقل ۲ دانش‌آموز یافت می‌شوند که تعداد دوستان آنها در آن کلاس با هم برابر است.

حل : قبلاً ثابت کردیم که در هر گراف ساده حداقل ۲ رأس هم درجه وجود دارد، لذا کافی است گرافی تعریف کنید که رأس‌های آن دانش‌آموزان و رابطه دوستی بین هر دو دانش‌آموز را با یالی بین رأس‌های متناظرشان تعریف کنید.

مثال : در یک اردوی دانش آموزی حداقل چند دانش آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟

حل : در این مسئله $k+1=7$ یعنی $k=6$ است و n یا تعداد لانه‌ها همان تعداد ماه‌های سال یعنی $n=12$ است. پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش‌آموزان حداقل می‌بایست $k(n+1)=6 \times 12 + 1 = 73$ باشد.

کار در کلاس

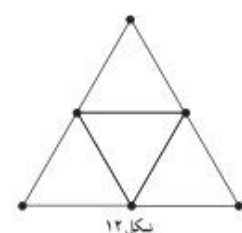
۱ در یک دبیرستان حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر از آنها ماه و روز هفته تولدشان یکی است؟

۲ ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

$$k+1=\dots \Rightarrow k=\dots$$

$$kn+1=54 \Rightarrow 4n=\dots \Rightarrow n=\left[\frac{\dots}{4}\right]=\dots$$

۳ حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۳ نفر از آنها دو حرف اول و دوم فامیلشان غیر تکراری و مثل هم است؟
(فامیلی‌هایی مثل اشتری و اشراقی مورد نظر است).



مثال : حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله‌شان کمتر از ۱ است.

حل : کافی است مطابق شکل، مثلث مفروض را به ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۱ تقسیم بندی کنید که در این صورت اگر ۵ نقطه از داخل این مثلث انتخاب کنید طبق اصل لانه کبوتری اطمینان دارید حداقل یکی از مثلث‌ها شامل دست کم ۲ نقطه از این ۵ نقطه خواهد بود و فاصله این دو نقطه از طول ضلع مثلث‌های کوچک‌تر کمتر می‌باشد.

مثال : نشان دهید در هر کلاس با n دانش‌آموز ($n \geq 2$) حداقل ۲ دانش‌آموز یافت می‌شوند که تعداد دوستان آنها در آن کلاس با هم برابر است.

حل : قبلاً ثابت کردیم که در هر گراف ساده حداقل ۲ رأس هم درجه وجود دارد، لذا کافی است گرافی تعریف کنید که رأس‌های آن دانش‌آموزان و رابطه دوستی بین هر دو دانش‌آموز را با یالی بین رأس‌های متناظرشان تعریف کنید.