



وزارت آموزش و پرورش

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

هندسه (۳) - پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه - ۱۱۳۳۱۳
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری

سیدمحمدرضا احمدی، حمیدرضا امیری، علی ابرامش، مهدی ایزدی، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو دادوی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، میرشیرام صدر، اکرم قلل‌رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
حمیدرضا امیری، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، هوشنگ شرقی و هادی مین‌باشیان (اعضای گروه تألیف)

اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) - مجتبی زند (مدیر هنری، طراح جلد و صفحه‌آرا) - مریم دهقان‌زاده (رسم) - زهره برهانی زرنندی، سوپوش سعادت‌نمندی، فاطمه گیتی‌جبین، فاطمه صفری ذوالفقاری، کبری اجابینی و حمید ثابت کلاچاهی (امور آماده‌سازی)

تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن: ۱۶۸۰۹۰۸۸۳۱۰۰۰۰، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی: ۱۵۸۲۲۲۲۳۵۹

وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir

شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران: کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۵-۴۴۹۸۵۱۶۰، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۳۷۵۱۵-۱۳۹

شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهلی خاس»

چاپ هشتم ۱۴۰۳

نام کتاب:
پدیدآورنده:
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف:
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف:

مدیریت آماده‌سازی هنری:
شناسه افزوده آماده‌سازی:

نشانی سازمان:

ناشر:

چاپخانه:

سال انتشار و توبت چاپ:

شابک ۹۷۸-۹۶۴-۰۵-۳۱۱۳-۶
ISBN: 978-964-05-3113-6



وزارت آموزش و پرورش

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

هندسه (۳) - پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه - ۱۱۳۳۱۳
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری

سیدمحمدرضا احمدی، حمیدرضا امیری، علی ابرامش، مهدی ایزدی، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو دادوی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، میرشیرام صدر، اکرم قلل‌رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
حمیدرضا امیری، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، هوشنگ شرقی و هادی مین‌باشیان (اعضای گروه تألیف)

اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) - مجتبی زند (مدیر هنری، طراح جلد و صفحه‌آرا) - مریم دهقان‌زاده (رسم) - زهره برهانی زرنندی، سوپوش سعادت‌نمندی، فاطمه گیتی‌جبین، فاطمه صفری ذوالفقاری، کبری اجابینی و حمید ثابت کلاچاهی (امور آماده‌سازی)

تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن: ۱۶۸۰۹۰۸۸۳۱۰۰۰۰، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی: ۱۵۸۲۲۲۲۳۵۹

وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir

شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران: کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۵-۴۴۹۸۵۱۶۰، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۳۷۵۱۵-۱۳۹

شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهلی خاس»

چاپ هشتم ۱۴۰۳

نام کتاب:
پدیدآورنده:
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف:
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف:

مدیریت آماده‌سازی هنری:
شناسه افزوده آماده‌سازی:

نشانی سازمان:

ناشر:

چاپخانه:

سال انتشار و توبت چاپ:

شابک ۹۷۸-۹۶۴-۰۵-۳۱۱۳-۶
ISBN: 978-964-05-3113-6

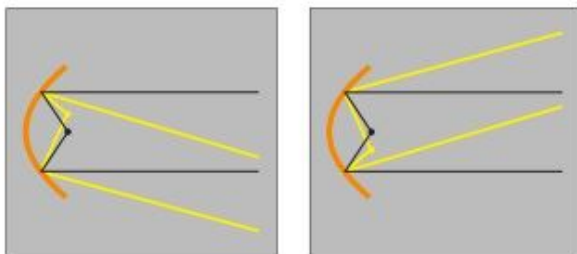
لذا معادله فوق یک سهمی با رأس $A(h, k) = (-1, 1)$ است که دهانه آن رو به چپ است. داریم: $-4a = -8$ و لذا $a = 2$ و بنابراین $F(-a + h, k) = (-3, 1)$ و معادله خط هادی آن به صورت $x = a + h = 1$ است.

در این صورت نقاط B و B' که هم طول با F و به فاصله $a = 2$ از F باشند یعنی $B(-3, 5)$ و $B'(-3, -3)$ نیز بر سهمی واقع اند. فاصله هریک از آنها را از کانون و خط هادی بررسی کنید. حال با وصل کردن نقاط B و A و B' به صورت یک منحنی و ادامه آن، شکل تقریبی سهمی مورد نظر را به دست آورید.

ویژگی بازتابندگی سهمی ها و کاربردهای آن

یکی از ویژگی های مهم سهمی این است که هر شعاع نوری که از کانون آن به بدنه سهمی بتابد بازتاب آن موازی با محور سهمی بازخواهد گشت و برعکس هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت. درواقع اگر خط d بر سهمی مماس و نقطه A نقطه تماس آن باشد زاویه های α و β برابرند. از این ویژگی در ساخت بسیاری از وسایل استفاده شده است. به طور مثال چراغ جلوی اتومبیل ها را معمولاً به گونه ای می سازند که جداره پشت لامپ به حالت سهمی باشد و جنس آینه ای داشته باشد و لامپ را در کانون این سهمی قرار می دهند. در این صورت حتی شعاع های نوری که به عقب تابیده می شوند پس از برخورد به جداره سهمی پشت لامپ به صورت شعاع هایی موازی با محور سهمی به جلو بازتاب می یابند و روشنایی بیشتری به وجود می آورند.

با قرار گرفتن لامپ در راستای عمودی پکسان با کانون سهمی اما کمی بالاتر یا پایین تر، شعاع های نور کماکان موازی باهم (نه موازی با محور) اما روبه بالا یا پایین خارج می شوند که اصطلاحاً نور بالا یا نور پایین ایجاد می کنند.

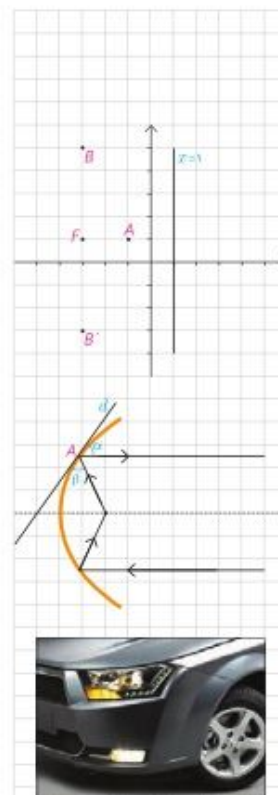


لذا معادله فوق یک سهمی با رأس $A(h, k) = (-1, 1)$ است که دهانه آن رو به چپ است. داریم: $-4a = -8$ و لذا $a = 2$ و بنابراین $F(-a + h, k) = (-3, 1)$ و معادله خط هادی آن به صورت $x = a + h = 1$ است.

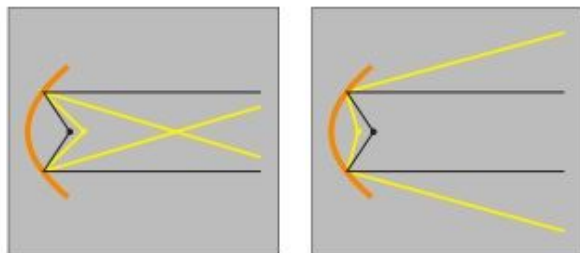
در این صورت نقاط B و B' که هم طول با F و به فاصله $a = 2$ از F باشند یعنی $B(-3, 5)$ و $B'(-3, -3)$ نیز بر سهمی واقع اند. فاصله هریک از آنها را از کانون و خط هادی بررسی کنید. حال با وصل کردن نقاط B و A و B' به صورت یک منحنی و ادامه آن، شکل تقریبی سهمی مورد نظر را به دست آورید.

ویژگی بازتابندگی سهمی ها و کاربردهای آن

یکی از ویژگی های مهم سهمی این است که هر شعاع نوری که از کانون آن به بدنه سهمی بتابد بازتاب آن موازی با محور سهمی بازخواهد گشت و برعکس هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت. درواقع اگر خط d بر سهمی مماس و نقطه A نقطه تماس آن باشد زاویه های α و β برابرند. از این ویژگی در ساخت بسیاری از وسایل استفاده شده است. به طور مثال چراغ جلوی اتومبیل ها را معمولاً به گونه ای می سازند که جداره پشت لامپ به حالت سهمی باشد و جنس آینه ای داشته باشد و لامپ را در کانون این سهمی قرار می دهند. در این صورت حتی شعاع های نوری که به عقب تابیده می شوند پس از برخورد به جداره سهمی پشت لامپ به صورت شعاع هایی موازی با محور سهمی به جلو بازتاب می یابند و روشنایی بیشتری به وجود می آورند.

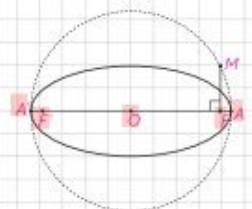


اگر لامپ در راستای افقی کانون قرار گیرد و کمی جلوتر یا کمی عقب‌تر قرار گیرد
شعاع‌های نور باهم موازی خارج نمی‌شوند.



تمرین

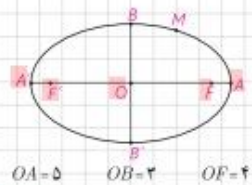
۱- دو نقطه A و B روی یک بیضی F و F' کانون‌های بیضی اند. A به کانون F' نزدیک‌تر و B به کانون F نزدیک‌تر است. اگر $AF' = BF$ باشد، نشان دهید:
(الف) در حالتی که دو پاره خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازی‌اند.
(ب) در حالتی که AF و BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.



۲- قطر دایره C ، مانند شکل، قطر بزرگ بیضی e است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



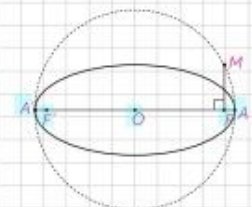
۳- در شکل مقابل نقطه M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF'$



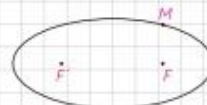
۴- نقطه M روی بیضی به افطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.
(الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$.
(ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.
(ج) طول‌های MF و MF' را به دست آورید.

تمرین

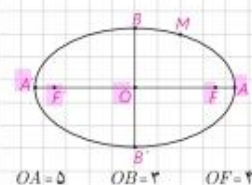
۱- دو نقطه A و B روی یک بیضی F و F' کانون‌های بیضی اند. A به کانون F' نزدیک‌تر و B به کانون F نزدیک‌تر است. اگر $AF' = BF$ باشد، نشان دهید:
(الف) در حالتی که دو پاره خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازی‌اند.
(ب) در حالتی که AF و BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.



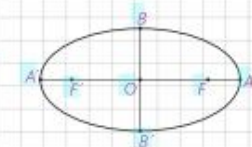
۲- قطر دایره C ، مانند شکل، قطر بزرگ بیضی e است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



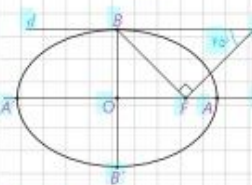
۳- در شکل مقابل نقطه M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF'$



۴- نقطه M روی بیضی به افطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.
(الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$.
(ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.
(ج) طول‌های MF و MF' را به دست آورید.

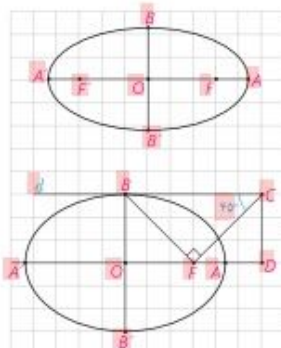


۵- در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه FBF' چند درجه است؟



۶- در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطر اند. خط d در نقطه B بر بیضی مماس است. پاره خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطه F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $\angle BCF = 45^\circ$ ، مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به دست آورید.

۵- در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه FBF' چند درجه است؟



۶- در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطرانند. خط d در نقطه B بیضی مماس است. پاره خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطه F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $\angle BCF = 45^\circ$ ، مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به دست آورید.

۷- سهمی $y = x^2 - 4x + 2$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

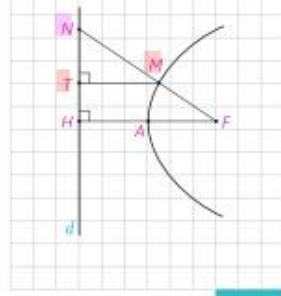
۸- مختصات رأس و کانون سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) را به دست آورید.

۹- معادله سهمی را بنویسید که رأس $S(1, 2)$ و کانون آن باشد $F(1, -2)$.

۱۰- سهمی $y = x^2 - 4x + 2$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

۱۱- سهمی P با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از F گذشته و بر d مماس است. با توجه به این موضوع تعریف دیگری از سهمی ارائه دهید.

۱۲- در شکل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطه M بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{NT}{TH}$



۷- سهمی $y = x^2 - 4x + 2$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

۸- مختصات رأس و کانون سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) را به دست آورید.

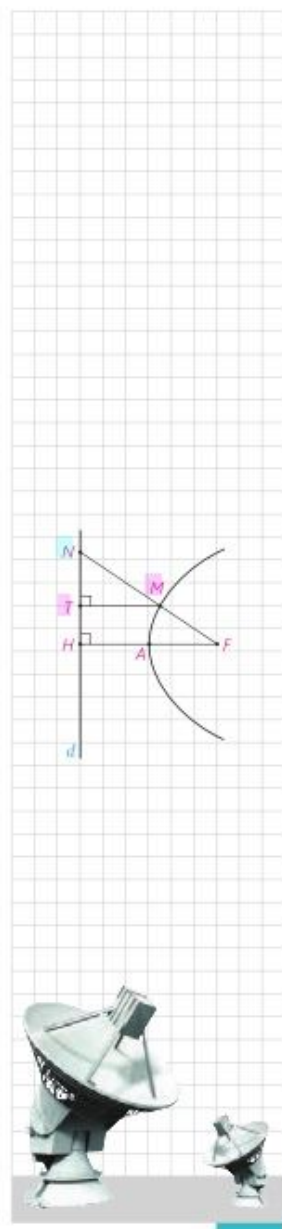
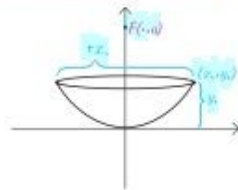
۹- معادله سهمی را بنویسید که رأس $S(1, 2)$ و کانون آن باشد $F(1, -2)$.

۱۰- سهمی $y = x^2 - 4x + 2$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

۱۱- سهمی P با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از F گذشته و بر d مماس است. با توجه به این موضوع تعریف دیگری از سهمی ارائه دهید.

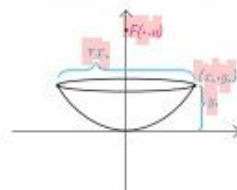
۱۲- در شکل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطه M بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{NT}{TH}$

۱۳- یک دانش‌آموز با دیدن دو دیش مخابراتی با ابعاد متفاوت و مشاهده فاصله کانونی متفاوت آنها به این فکر افتاد که چگونه می‌توان با داشتن یک دیش فاصله کانونی آن را به دست آورد. او از معلمش خواست که فرمولی برای محاسبه فاصله کانونی یک دیش به او بگوید. معلم به او گفت: باید قطر دهانه دیش را در خودش ضرب کرد و حاصل ضرب را بر اندازه گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد. حاصل فاصله کانونی دیش است. دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم شده در شکل زیر و فرمول سهمی توضیح دهید.



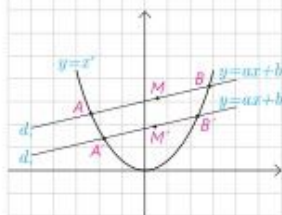


۱۳- یک دانش آموز با دیدن دو دیش مخابراتی با ابعاد متفاوت و مشاهده فاصله کانونی متفاوت آنها به این فکر افتاد که چگونه می توان با داشتن یک دیش فاصله کانونی آن را به دست آورد. او از معلمش خواست که فرمولی برای محاسبه فاصله کانونی یک دیش به او بگوید. معلم به او گفت: باید قطر دهانه دیش را در خودش ضرب کرد و حاصل ضرب را بر اندازه گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد. حاصل فاصله کانونی دیش است. دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید.



۱۴- فرض کنید از مثلث ABC ، اندازه ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث، داده شده باشد، با استفاده از خواص بیضی شیوه رسم این مثلث را توضیح دهید.

۱۵- سهمی $y = x^2$ و دو خط موازی $d_1: y = ax + b$ و $d_2: y = ax + b'$ را که با سهمی متقاطع اند، در نظر بگیرید.



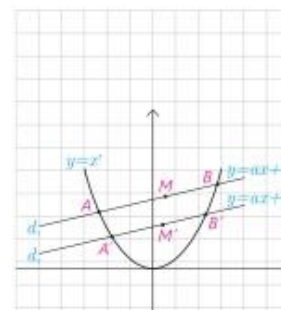
الف) معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه های آن طول نقاط برخورد خط d_1 و سهمی $y = x^2$ باشد.

ب) فرض کنید A و B نقاط برخورد خط d_1 و سهمی باشند و نقطه M وسط پاره خط AB باشد، مختصات نقطه M را به دست آورید.

ب) مراحل الف) و ب) را با جایگذاری خط d_2 به جای d_1 انجام دهید و مختصات نقطه M' (نقطه وسط پاره خط حاصل از نقاط تقاطع خط d_2 و سهمی) را به دست آورید.

ت) خط MM' نسبت به محور y ها چه وضعی دارد؟

ت) با استفاده از نتایج قسمت های قبل روشی برای رسم محور تقارن یک سهمی با داشتن نمودار آن ارائه دهید و با این روش محور تقارن سهمی مقابل را رسم کنید.



۱۴- فرض کنید از مثلث ABC ، اندازه ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث، داده شده باشد، با استفاده از خواص بیضی شیوه رسم این مثلث را توضیح دهید.

۱۵- سهمی $y = x^2$ و دو خط موازی $d_1: y = ax + b$ و $d_2: y = ax + b'$ را که با سهمی متقاطع اند، در نظر بگیرید.

الف) معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه های آن طول نقاط برخورد خط d_1 و سهمی $y = x^2$ باشد.

ب) فرض کنید A و B نقاط برخورد خط d_1 و سهمی باشند و نقطه M وسط پاره خط AB باشد، مختصات نقطه M را به دست آورید.

ب) مراحل الف) و ب) را با جایگذاری خط d_2 به جای d_1 انجام دهید و مختصات نقطه M' (نقطه وسط پاره خط حاصل از نقاط تقاطع خط d_2 و سهمی) را به دست آورید.

ت) خط MM' نسبت به محور y ها چه وضعی دارد؟

ت) با استفاده از نتایج قسمت های قبل روشی برای رسم محور تقارن یک سهمی با داشتن نمودار آن ارائه دهید و با این روش محور تقارن سهمی مقابل را رسم کنید.



پیش‌تر اشاره شد که اگر سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه باشند آنگاه حجم متوازی‌السطوح و نیز $|\vec{a} \times \vec{b}|$ برابر صفر می‌شود. عکس این مطلب نیز صادق است و از آن برای بررسی اینکه سه بردار داده شده در یک صفحه هستند یا نه استفاده می‌شود.

مثال: آیا بردارهای $\vec{a} = (1, 4, 1)$ ، $\vec{b} = (1, -1, 3)$ ، $\vec{c} = (1, 9, -1)$ در یک صفحه‌اند؟
حل: برای این منظور کافی است $(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$ را به دست آوریم. اگر مقدار آن صفر باشد یعنی حجم متوازی‌السطوح تولید شده صفر است و این یعنی سه بردار در یک صفحه‌اند در غیر این صورت سه بردار در یک صفحه نیستند.

$$\vec{b} \times \vec{c} = (-26, 4, 10) \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -26 + 4 + 10 = -12 \neq 0 \Rightarrow \text{سه بردار در یک صفحه هستند.}$$

تمرین

۱- برای هر یک از بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که در زیر آمده است تصویر قائم $\vec{a}$ را بر امتداد $\vec{b}$ به دست آورید.

الف) $\vec{b} = i$ ، $\vec{a} = (2, -1, 2)$ (ب) $\vec{b} = i$ ، $\vec{a} = (2, 3, 1)$ (پ) $\vec{b} = (-1, 2, 4)$ ، $\vec{a} = (1, 1, 0)$

۲- فرض کنید $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند به ترتیب به طول‌های ۱ و ۲ و ۳ با این خاصیت که $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ را محاسبه کنید.

۳- سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ولی $\vec{b} \neq \vec{c}$.

۴- اگر $\vec{c} = (-1, 1, 4)$ ، $\vec{b} = (3, -4, 2)$ و $\vec{a} = (1, -3, 4)$ باشند آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b} + \vec{c}$ را به دست آورید.

۵- برداری عمود بر دو بردار $\vec{a} = (1, -3, 2)$ و $\vec{b} = (-2, 1, -5)$ پیدا کنید.

۶- سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ ولی $\vec{b} \neq \vec{c}$. آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟ در این باره در کلاس بحث کنید.

۷- بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به طوری که $|\vec{a}| = 3$ ، $|\vec{b}| = 26$ و $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$. مقدار $a \cdot b$ را محاسبه کنید.

۸- مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A = (3, 5, 7)$ ، $B = (5, 5, 0)$ ، $C = (-4, 0, 4)$ داده شده است را بیابید.

پیش‌تر اشاره شد که اگر سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه باشند آنگاه حجم متوازی‌السطوح و نیز $|\vec{a} \times \vec{b}|$ برابر صفر می‌شود. عکس این مطلب نیز صادق است و از آن برای بررسی اینکه سه بردار داده شده در یک صفحه هستند یا نه استفاده می‌شود.

مثال: آیا بردارهای $\vec{a} = (1, 4, 1)$ ، $\vec{b} = (1, -1, 3)$ ، $\vec{c} = (1, 9, -1)$ در یک صفحه‌اند؟
حل: برای این منظور کافی است $(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$ را به دست آوریم. اگر مقدار آن صفر باشد یعنی حجم متوازی‌السطوح تولید شده صفر است و این یعنی سه بردار در یک صفحه‌اند در غیر این صورت سه بردار در یک صفحه نیستند.

$$\vec{b} \times \vec{c} = (-26, 4, 10) \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -26 + 4 + 10 = -12 \neq 0 \Rightarrow \text{سه بردار در یک صفحه هستند.}$$

تمرین

۱- برای هر یک از بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که در زیر آمده است تصویر قائم $\vec{a}$ را بر امتداد $\vec{b}$ به دست آورید.

الف) $\vec{b} = i$ ، $\vec{a} = (2, -1, 2)$ (ب) $\vec{b} = i$ ، $\vec{a} = (2, 3, 1)$ (پ) $\vec{b} = (-1, 2, 4)$ ، $\vec{a} = (1, 1, 0)$

۲- فرض کنید $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند به ترتیب به طول‌های ۱ و ۲ و ۳ با این خاصیت که $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ را محاسبه کنید.

۳- سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ولی $\vec{b} \neq \vec{c}$.

۴- اگر $\vec{c} = (-1, 1, 4)$ ، $\vec{b} = (3, -4, 2)$ و $\vec{a} = (1, -3, 4)$ باشند آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b} + \vec{c}$ را به دست آورید.

۵- برداری عمود بر دو بردار $\vec{a} = (1, -3, 2)$ و $\vec{b} = (-2, 1, -5)$ پیدا کنید.

۶- سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ ولی $\vec{b} \neq \vec{c}$. آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟ در این باره در کلاس بحث کنید.

۷- بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به طوری که $|\vec{a}| = 3$ ، $|\vec{b}| = 26$ و $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$. مقدار $a \cdot b$ را محاسبه کنید.

۸- مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A = (3, 5, 7)$ ، $B = (5, 5, 0)$ ، $C = (-4, 0, 4)$ داده شده است را بیابید.

منابع

- ۱- پورنگی، محمدرضا، تابش، یحیی (۱۳۸۱)، کتاب درسی هندسه تحلیلی و جبر خطی، تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
- ۲- غفور، حسین، مجذوب زنجانی، حسین، معیری، محمدطاهر (۱۳۷۳)، کتاب درسی هندسه تحلیلی، تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
- ۳- فیروزیان، احمد، باوری، احمدرضا (۱۳۷۰)، هندسه تحلیلی، تهران: نشر فردوس.
- ۴- برانمنش، علی، جمالی، محسن و ... (۱۳۸۸)، کتاب درسی ریاضیات ۲، تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
- ۵- میری حمیدرضا، ماتریس و دستگاه‌های معادلات خطی (۱۳۷۸)، انتشارات مدرسه.
- ۶- شهریار، پرویز، محاسبه برداری (۱۳۶۹)، انتشارات تهران.
- 7- T. Grenfell, Analytical Geometry for beginners Nabu Press 2010.
- 8- Mittal & Shanti Nrayan, Analytical Solid **Geometry** international Book Distributing Company 2005.
- 9- Larson, R. & Falvo, D.C. (2009). Elementary Linear Algebra, Sixth Edition. Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company, Boston, MA.
- 10- Larson, R. (2017) Elementary Linear Algebra, Eighth Edition. Cengage Learning, Boston, **MA**.



منابع

- ۱- پورنگی، محمدرضا، تابش، یحیی (۱۳۸۱)، کتاب درسی هندسه تحلیلی و جبر خطی، تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
- ۲- غفور، حسین، مجذوب زنجانی، حسین، معیری، محمدطاهر (۱۳۷۳)، کتاب درسی هندسه تحلیلی، تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
- ۳- فیروزیان، احمد، باوری، احمدرضا (۱۳۷۰)، هندسه تحلیلی، تهران: نشر فردوس.
- ۴- برانمنش، علی، جمالی، محسن و ... (۱۳۸۸)، کتاب درسی ریاضیات ۲، تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
- ۵- میری حمیدرضا، ماتریس و دستگاه‌های معادلات خطی (۱۳۷۸)، انتشارات مدرسه.
- ۶- شهریار، پرویز، محاسبه برداری (۱۳۶۹)، انتشارات تهران.
- 7- T. Grenfell, Analytical Geometry for beginners Nabu Press 2010.
- 8- Mittal & Shanti Nrayan, Analytical Solid **Gedetry** international Book Distributing Company 2005.
- 9- Larson, R. & Falvo, D.C. (2009). Elementary Linear Algebra, Sixth Edition. Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company, Boston, MA.
- 10- Larson, R. (2017) Elementary Linear Algebra, Eighth Edition. Cengage Learning, Boston, **MA**.

