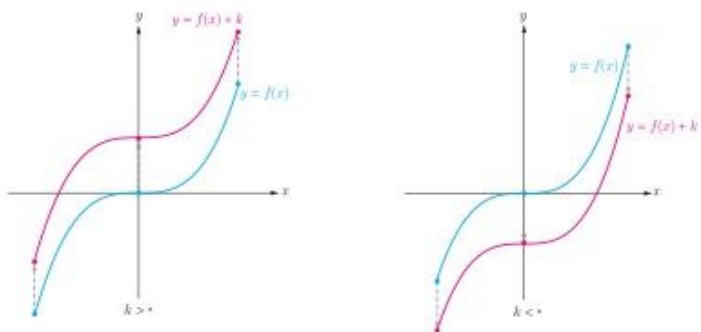


فصل اول: تابع

برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ ، اگر $k > 0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k < 0$ این انتقال به سمت پایین انجام می‌شود.

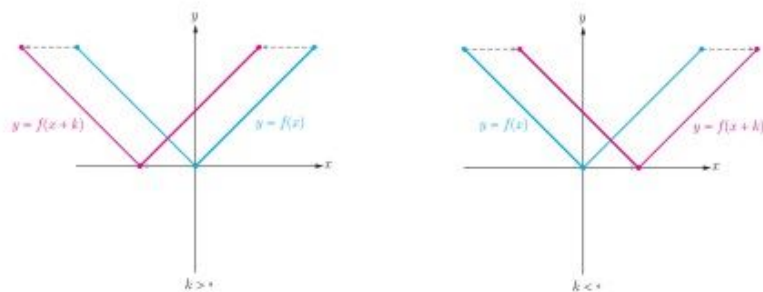


به روش مشابه، اگر یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و تابع h به صورت $h(x) = f(x + k)$ تعریف شده باشد، آنگاه:

$$h(x, -k) = f(x, -k + k) = f(x) = y.$$

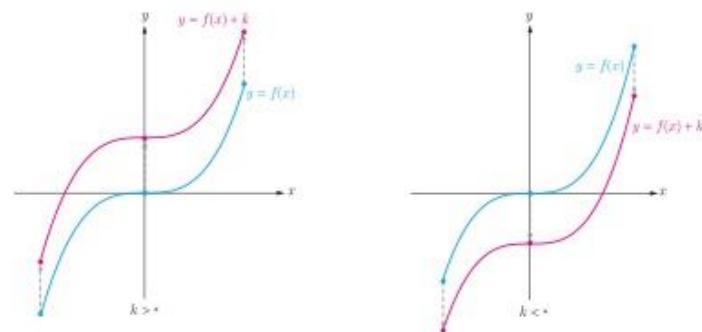
بنابراین نقطه $(x, -k)$ از نمودار تابع h متناظر با نقطه (x, y) از نمودار تابع f است.

برای رسم نمودار $y = f(x + k)$ ، اگر $k > 0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < 0$ این انتقال به اندازه $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.



فصل اول: تابع

برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ ، اگر $k > 0$ باشد، کافی است نمودار تابع f را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای حالت $k < 0$ نمودار تابع f را $|k|$ واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال دهیم.

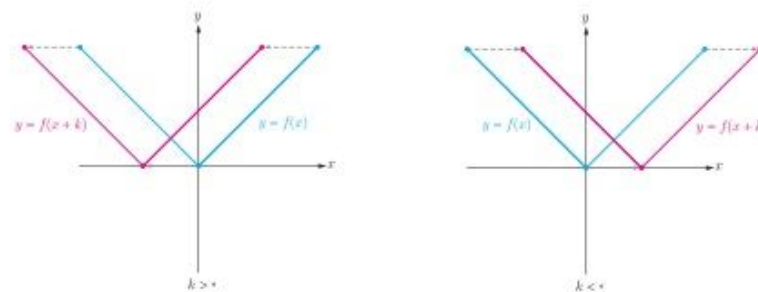


به روش مشابه، اگر یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و تابع h به صورت $h(x) = f(x + k)$ تعریف شده باشد، آنگاه:

$$h(x, -k) = f(x, -k + k) = f(x) = y.$$

بنابراین نقطه $(x, -k)$ از نمودار تابع h متناظر با نقطه (x, y) از نمودار تابع f است.

برای رسم نمودار $y = f(x + k)$ ، اگر $k > 0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < 0$ این انتقال به اندازه $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.



فصل اول: تابع

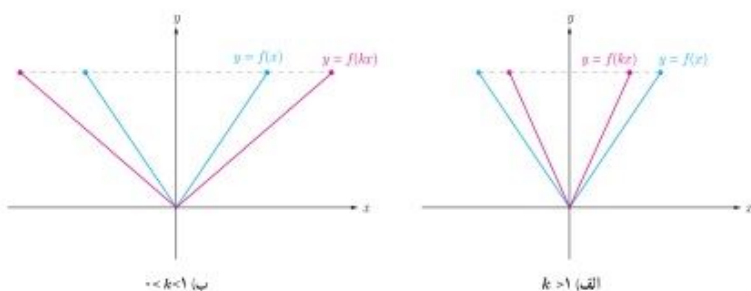
در حالت کلی اگر (x, y) یک نقطه دلخواه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و تابع y به صورت $g(x) = f(kx)$ تعریف شده باشد،

$$g\left(\frac{x}{k}\right) = f\left(k \cdot \frac{x}{k}\right) = f(x) = y, \quad \text{آنگاه:}$$

بنابراین نقطه $\left(\frac{x}{k}, y\right)$ یک نقطه از نمودار تابع و متناظر با نقطه (x, y) از نمودار تابع f است.

برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ ، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

در شکل های زیر، نمودار تابع $y = f(kx)$ برای دو حالت $k > 1$ و $0 < k < 1$ رسم شده است.



اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x به دست می آید و اگر $0 < k < 1$ باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می شود.

اگر طول نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = f(-x)$ به دست می آیند. بنابراین نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y است.

فصل اول: تابع

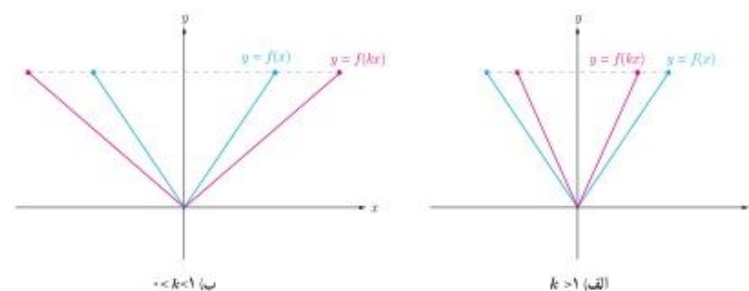
در حالت کلی اگر (x, y) یک نقطه دلخواه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و تابع y به صورت $g(x) = f(kx)$ تعریف شده باشد،

$$g\left(\frac{x}{k}\right) = f\left(k \cdot \frac{x}{k}\right) = f(x) = y, \quad \text{آنگاه:}$$

بنابراین نقطه $\left(\frac{x}{k}, y\right)$ یک نقطه از نمودار تابع و متناظر با نقطه (x, y) از نمودار تابع f است.

برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ ، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم. ($k \neq 0$)

در شکل های زیر، نمودار تابع $y = f(kx)$ برای دو حالت $k > 1$ و $0 < k < 1$ رسم شده است.



اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x به دست می آید و اگر $0 < k < 1$ باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می شود.

اگر طول نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = f(-x)$ به دست می آیند. بنابراین نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y است.



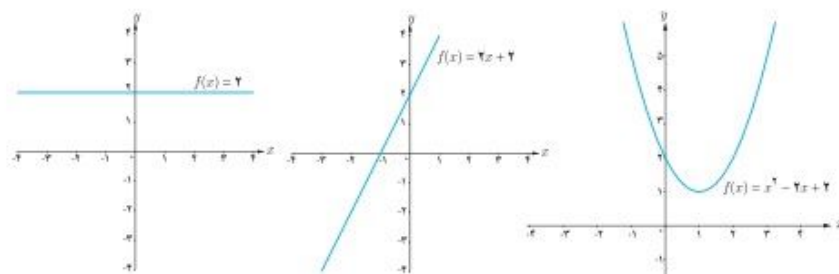
درس

تابع درجه سوم، توابع یکتا و بخش پذیری و تقسیم

فرض کنید n یک عدد صحیح نامنفی و $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ اعداد حقیقی باشند که $a_n \neq 0$. تابع $f(x)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، تابع چند جمله‌ای از درجه n نامیده می‌شود.^۱

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

تابع ثابت $f(x) = c$ ، یک تابع چند جمله‌ای از درجه صفر و تابع خطی $f(x) = mx + b$ که $m \neq 0$ ، یک تابع چند جمله‌ای از درجه یک است. به همین ترتیب یک سهمی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ یک تابع چند جمله‌ای از درجه دو است.



تابع درجه صفر

تابع درجه یک

تابع درجه دو

کاردر کلاس

در زیر چند تابع چند جمله‌ای نوشته شده‌اند. درجه هر کدام را مشخص کنید.

$$f(x) = 2x - 3, \quad h(x) = x^2 + x - 4, \quad n(x) = 2x - x^2$$

$$g(x) = (x-1)^2 + 3, \quad m(x) = 5, \quad p(x) = x^2(1-x)^2$$

۱- برای $f(x) = 0$ ، درجه تعریف نمی‌شود.



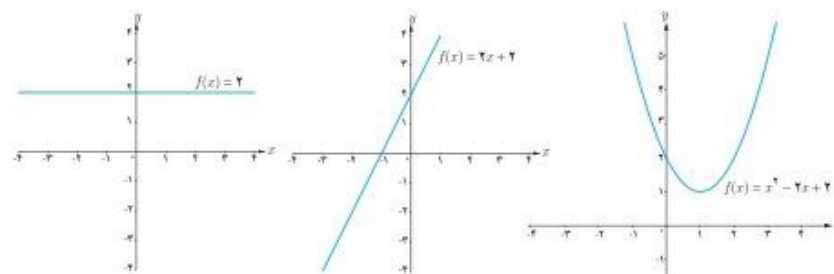
درس

تابع درجه سوم، توابع یکتا و بخش پذیری و تقسیم

فرض کنید n یک عدد صحیح نامنفی و $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ اعداد حقیقی باشند که $a_n \neq 0$. تابع $f(x)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، تابع چند جمله‌ای از درجه n نامیده می‌شود.^۱

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

تابع ثابت $f(x) = c$ ($c \neq 0$)، یک تابع چند جمله‌ای از درجه صفر و تابع خطی $f(x) = mx + b$ که $m \neq 0$ ، یک تابع چند جمله‌ای از درجه یک است. به همین ترتیب یک سهمی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ یک تابع چند جمله‌ای از درجه دو است.



تابع درجه صفر

تابع درجه یک

تابع درجه دو

کاردر کلاس

در زیر چند تابع چند جمله‌ای نوشته شده‌اند. درجه هر کدام را مشخص کنید.

$$f(x) = 2x - 3, \quad h(x) = x^2 + x - 4, \quad n(x) = 2x - x^2$$

$$g(x) = (x-1)^2 + 3, \quad m(x) = 5, \quad p(x) = x^2(1-x)^2$$

۱- برای $f(x) = 0$ ، درجه تعریف نمی‌شود.

۱۲

فعالیت

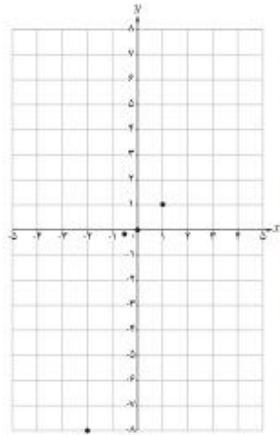
یکی از توابع چند جمله‌ای درجه سه،
تابع $f(x) = x^3$ است.

۱ با تکمیل جدول مقابل، نمودار تابع $f(x) = x^3$ را رسم کنید.

x	$y = x^3$
-۲	$(-2)^3 = -8$
-۱	
$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2})^3 = -\frac{1}{8}$
۰	
$\frac{1}{2}$	
۱	۱
۲	

۲ به کمک نمودار رسم شده برای تابع $f(x) = x^3$ ، نشان دهید که این تابع وارون پذیر است.

۳ نمودار تابع f^{-1} را رسم کنید و ضابطه f^{-1} را تعیین کنید.



گارد کلاس

۱ نمودار هر یک از توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

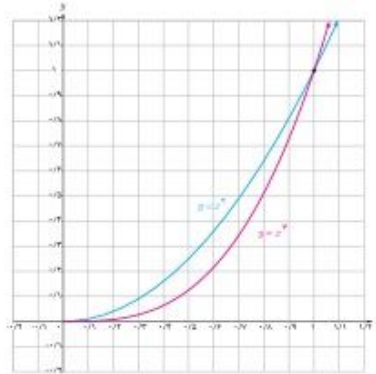
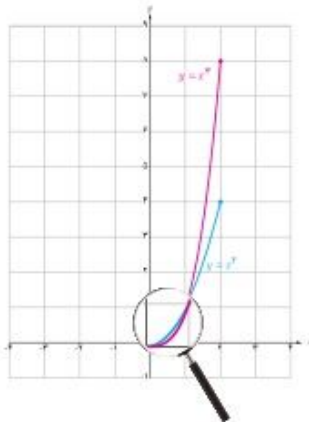
الف) $y = (x+1)^3$

ب) $y = -x^3 + 1$

پ) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$

۲ نمودار هر یک از توابع $y = x^3$ و $y = x^2$ در فاصله $[0, 2]$ رسم شده است.

در فاصله $[0, 1]$ ، نمودار کدام تابع پایین‌تر و نمودار کدام تابع بالاتر است؟ در فاصله $[1, 2]$ چگونه؟



۱۲

فعالیت

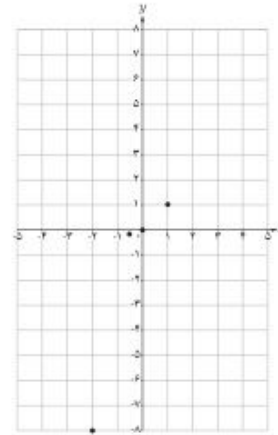
یکی از توابع چند جمله‌ای درجه سه،
تابع $f(x) = x^3$ است.

۱ با تکمیل جدول مقابل، نمودار تابع $f(x) = x^3$ را رسم کنید.

x	$y = x^3$
-۲	$(-2)^3 = -8$
-۱	
$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2})^3 = -\frac{1}{8}$
۰	
$\frac{1}{2}$	
۱	۱
۲	

۲ به کمک نمودار رسم شده برای تابع $f(x) = x^3$ ، نشان دهید که این تابع وارون پذیر است.

۳ نمودار تابع f^{-1} را رسم کنید و ضابطه f^{-1} را تعیین کنید.



گارد کلاس

۱ نمودار هر یک از توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

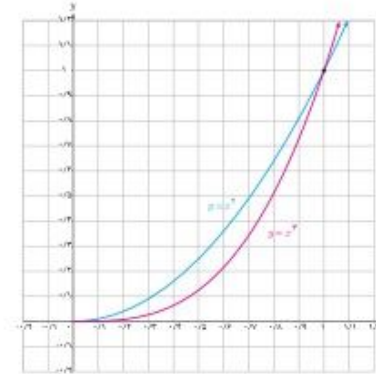
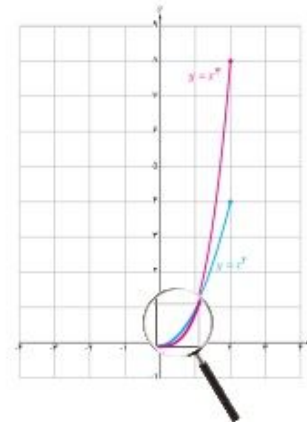
الف) $y = (x+1)^3$

ب) $y = -x^3 + 1$

پ) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$

۲ نمودار هر یک از توابع $y = x^3$ و $y = x^2$ در فاصله $[0, 2]$ رسم شده است.

در فاصله $[0, 1]$ ، نمودار کدام تابع پایین‌تر و نمودار کدام تابع بالاتر است؟ در فاصله $[1, 2]$ چگونه؟



فصل اول: تابع ۱۹

کاردرکلاس

اگر $f(x) = x^2 - 16$ و $p(x) = x + 2$ ، نشان دهید که $f(x)$ بر $p(x)$ بخش پذیر است.

فعالیت

در تقسیم $f(x) = x^2 + 2$ بر $p(x) = 2x - 1$ ، $q(x)$ و $r(x)$ به ترتیب خارج قسمت و باقی مانده اند.

الف) نشان دهید که $r(x)$ از درجه صفر است.

ب) با توجه به قضیه تقسیم می توان نوشت:

$$f(x) = (2x - 1)q(x) + r(x)$$

اکنون ریشه چند جمله ای $p(x) = 2x - 1$ را به دست آورید و با قرار دادن در رابطه بالا نشان دهید که $r(x) = f(\frac{1}{2})$. به طور کلی می توان گفت:

قضیه: باقی مانده تقسیم چند جمله ای $f(x)$ بر $ax + b$ عبارت است از $r(x) = f(\frac{-b}{a})$.

کاردرکلاس

۱ باقی مانده تقسیم چند جمله ای $x^2 + x - 2$ بر $x + 1$ به دست آورید.

۲ اگر چند جمله ای $x^2 + ax - 2$ بر $x - a$ بخش پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید.

فصل اول: تابع ۱۹

کاردرکلاس

اگر $f(x) = x^2 - 16$ و $p(x) = x + 2$ ، نشان دهید که $f(x)$ بر $p(x)$ بخش پذیر است.

فعالیت

در تقسیم $f(x) = x^2 + 2$ بر $p(x) = 2x - 1$ ، $q(x)$ و $r(x)$ به ترتیب خارج قسمت و باقی مانده اند.

الف) نشان دهید که $r(x)$ از درجه صفر است.

ب) با توجه به قضیه تقسیم می توان نوشت:

$$f(x) = (2x - 1)q(x) + r(x)$$

اکنون ریشه چند جمله ای $p(x) = 2x - 1$ را به دست آورید و با قرار دادن در رابطه بالا نشان دهید که $r(x) = f(\frac{1}{2})$. به طور کلی می توان گفت:

قضیه: باقی مانده تقسیم چند جمله ای $f(x)$ بر $ax + b$ عبارت است از $r(x) = f(\frac{-b}{a})$ ، $(a \neq 0)$.

کاردرکلاس

۱ باقی مانده تقسیم چند جمله ای $x^2 + x - 2$ بر $x + 1$ به دست آورید.

۲ اگر چند جمله ای $x^2 + ax - 2$ بر $x - a$ بخش پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید.

فصل دوم: مثلثات ۲۹

با توجه به تأثیری که منفی بودن هر کدام از a و b بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محورهای x و y دارد، هر دوی a و b باید مثبت باشند لذا ضابطه تابع مورد نظر به صورت مقابل است:

$$y = 3 \sin(2x) + 4$$

(ب) با توجه به نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب از روی نمودار، $c = 0$ و $|a| = \frac{1}{4}$ و $|b| = 2$ به دست می‌آید که در آن علامت a منفی (مثبت) b مثبت (منفی) است. بنابراین داریم:

$$y = -\frac{1}{4} \sin 2x$$

(ب) با توجه به شکل نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و دوره تناوب برابر 4π است. بنابراین $c = 3$ و $|b| = \frac{1}{4}$ و $|a| = 2$ لذا $a = 2$ و $b = \frac{1}{4}$ و بنابراین داریم: $y = 2 \cos(\frac{x}{4}) + 3$.
ت) ضابطه این نمودار نیز می‌تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و $c = 0$ و $|a| = 2$ و $|b| = 1$ و a منفی و b مثبت است. بنابراین داریم:

$$y = -2 \cos x$$

تأخرات

فعالیت

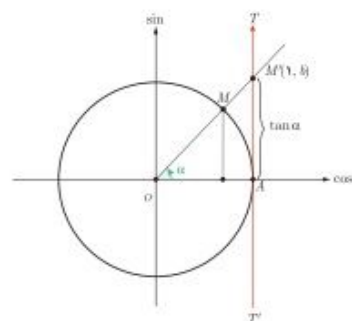
در دایره مثلثاتی روبه‌رو خط TAT' در نقطه A بر محور کسینوس‌ها عمود است.

الفا زاویه α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم و پاره خط OM را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطه M' قطع کند. نشان دهید:

$$\tan \alpha = AM' = b$$

می‌توان دید که تأخرات هر زاویه دلخواه مانند α ، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می‌شود. بنابراین خط TAT' را محور تأخرات می‌نامیم. نقطه A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

(ب) چرا تأخرات زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تأخرات زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟
(پ) آیا $\tan \frac{\pi}{4}$ عددی حقیقی است؟ $\tan \frac{3\pi}{4}$ چطور؟ به کمک شکل، پاسخ خود را توجیه کنید.



فصل دوم: مثلثات ۲۹

با توجه به تأثیری که منفی بودن هر کدام از a و b بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محورهای x و y دارد، هر دوی a و b باید مثبت (یا هر دو منفی) باشند لذا ضابطه تابع مورد نظر به صورت مقابل است:

$$y = 3 \sin(2x) + 4$$

(ب) با توجه به نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب از روی نمودار، $c = 0$ و $|a| = \frac{1}{4}$ و $|b| = 2$ به دست می‌آید که در آن علامت a منفی (مثبت) b مثبت (منفی) است. بنابراین داریم:

$$y = -\frac{1}{4} \sin 2x$$

(ب) با توجه به شکل نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و دوره تناوب برابر 4π است. بنابراین $c = 3$ و $|b| = \frac{1}{4}$ و $|a| = 2$ لذا $a = 2$ و $b = \frac{1}{4}$ و بنابراین داریم: $y = 2 \cos(\frac{x}{4}) + 3$.
ت) ضابطه این نمودار نیز می‌تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و $c = 0$ و $|a| = 2$ و $|b| = 1$ و a منفی و b مثبت است. بنابراین داریم:

$$y = -2 \cos x$$

تأخرات

فعالیت

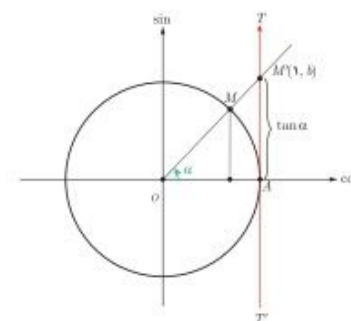
در دایره مثلثاتی روبه‌رو خط TAT' در نقطه A بر محور کسینوس‌ها عمود است.

الفا زاویه α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم و پاره خط OM را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطه M' قطع کند. نشان دهید:

$$\tan \alpha = AM' = b$$

می‌توان دید که تأخرات هر زاویه دلخواه مانند α ، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می‌شود. بنابراین خط TAT' را محور تأخرات می‌نامیم. نقطه A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

(ب) چرا تأخرات زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تأخرات زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟
(پ) آیا $\tan \frac{\pi}{4}$ عددی حقیقی است؟ $\tan \frac{3\pi}{4}$ چطور؟ به کمک شکل، پاسخ خود را توجیه کنید.



۳۴

۴ در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

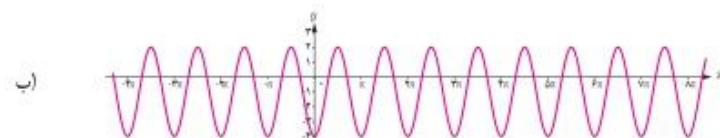
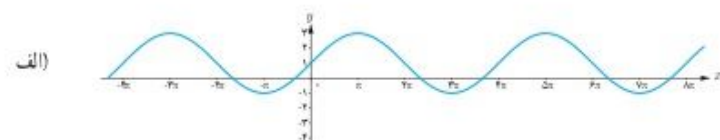
الف) $T = \pi$, $\max = 3$, $\min = -3$

ب) $T = 3$, $\max = 9$, $\min = 3$

پ) $T = 4\pi$, $\max = -1$, $\min = -7$

ت) $T = \frac{\pi}{4}$, $\max = 1$, $\min = -1$

۵ ضابطه مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.



۵ کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است.

ب) می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

پ) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

۶ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید:

الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ ب) $\frac{3\pi}{4} < \alpha < 2\pi$

۳۴

۴ در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده را بنویسید.

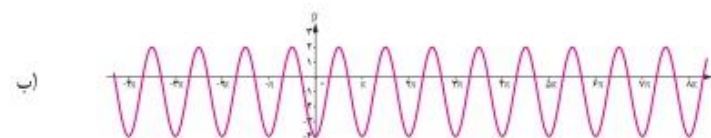
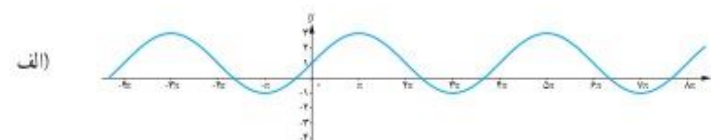
الف) $T = \pi$, $\max = 3$, $\min = -3$

ب) $T = 3$, $\max = 9$, $\min = 3$

پ) $T = 4\pi$, $\max = -1$, $\min = -7$

ت) $T = \frac{\pi}{4}$, $\max = 1$, $\min = -1$

۵ ضابطه مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.



۵ کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است.

ب) می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

پ) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

۶ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید:

الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ ب) $\frac{3\pi}{4} < \alpha < 2\pi$

۶۶

کاردو کلاسی

۱ الف) اگر $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ و $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ دو چند جمله‌ای باشند نشان دهید.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

۲ در هر یک از حالت‌های $m > n$ و $m = n$ و $m < n$ حد قسمت قبل به چه صورت‌هایی نوشته می‌شود؟

۳ به کمک نتیجه قسمت قبل حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3 - 7x + 1}{2x^2 - x + 3}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^3 + x - 1}{2x^3 - 2x + 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 - x + 1}{2x^3 + 2x - 1}$



گروه‌های مرتفعی جاذبه‌ها

۶۶

کاردو کلاسی

۱ الف) اگر $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ و $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ دو چند جمله‌ای باشند نشان دهید.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \quad (b_m \neq 0)$$

۲ در هر یک از حالت‌های $m > n$ و $m = n$ و $m < n$ حد قسمت قبل به چه صورت‌هایی نوشته می‌شود؟

۳ به کمک نتیجه قسمت قبل حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3 - 7x + 1}{2x^2 - x + 3}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^3 + x - 1}{2x^3 - 2x + 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 - x + 1}{2x^3 + 2x - 1}$



گروه‌های مرتفعی جاذبه‌ها