

مقدمه مؤلف

سلام به همه دانش آموزان و دبیران

می گن آگه خودتون رو با تغییرات وفق ندید، یه جایی متوجه می شید که از همه چیز عقب افتادین! کنکور در سال های اخیر چند بار همه مون رو سورپرایز کرد. یک بار سخت شد، دوباره برگشت به روال سابق، دوباره سخت شد و باز هم برگشت به روال سابق و ... ما تصمیم گرفتیم کتابی بنویسیم که شما را برای هر شرایطی آماده کنه. این کتاب با تمام کتاب های ریاضی انسانی دنیا فرق داره! هدفش اینه که **کل طیف دانش آموزان انسانی** را پوشش بده.

❖ در مورد درسنامه کتاب باید بدانید که:

- هر درس به چند بخش کوچک تقسیم شده است و مطالب مربوط به آن قسمت کامل مورد بررسی قرار گرفته است.
- در هر عنوان، ابتدا توضیح در مورد آن بخش به همراه فرمول هایش آمده است. بعد از آن معمولاً یک **مثال آموزشی** که برای فهم بهتر مطالب است، آورده ایم. بعد از آن، یک **تست** آمده که کمی از مثال آموزشی جدی تر است و هدفش آشنا کردن شما با تست های آن بخش است.
- اگر مطلب مهمی، قابل بیان به صورت **مرحله به مرحله** بوده، حتماً این کار را کردیم و با **مهر مراحل** ... آن را مشخص کرده ایم.
- اگر مطلبی خارج از کتاب درسی بوده ولی در بعضی آزمون ها (حتی کنکور) احتمال سؤال دادن ازش وجود داشته، آن را تحت عنوان **برای حرفه ای ها** آورده ایم. اگر دنبال درصدهای خیلی بالا هستید، این قسمت ها را بخوانید.
- تمامی مطالب درسنامه با تست ها و پاسخ شان سینک هستن و اگر به مطالب درسنامه تسلط داشته باشین، از پس تست های سطح ۱ و حتی سطح ۲ در جلد اول بر خواهید آمد.

تشکر از دوستانی که در طول مدت تألیف و تولید این کتاب کنارمان بودند:

- دکتر کامیل نصری، مهندس سبزمیدانی و مهندس بقایی عزیز؛ مرسی که انقدر همراهین. • تشکر ویژه از مسعود شفیعی.
- کیوان صارمی و کوثر صادقی که اوایل کار خیلی وقتشونو گرفتیم. • محمد مازنی که لحظه به لحظه از وضعیت کارهای کتاب خبر داشت و به من استرس می داد! • خانم ها الهه آرانی و یگانه فلاحتی که پیگیر کارهای کتاب بودند؛ هر لحظه و هر جا! سپاس فراوان از شما. • آقای فرامرز سلطان کریمی که زحمت کلیدزنی کتاب را داشتند. • خانم ها راهبریان، جالینوسی، نظری، صابری و آقایان محمدی، راش، راسخ و قنبری که زحمت ویراستاری این کتاب را کشیدند. • آقای سمایی، خانم معصومی و سایر دوستانمان در واحد تولید که خیلی اذیتشون کردم. • از دوستانم در خیلی سبز که همراهم بودند: ایمان سلیمان زاده، امین امینی، محمدرضا محمدی و مرضیه قاسمی. • در آخر تشکر از مادر و همسر عزیزم.

تشکر از اساتید عزیز:

از آقایان محمد یگانه، خسرو محمدرزاده، علی قهرمان زاده، محمدرضا امیری و فاروق منوچهری که به من لطف داشتند و نظراتشان را در راستای بهتر شدن کتاب به من دادند، بسیار تشکر می کنم.

حرف آخر:

به نظرم هر آن چه از ریاضی انسانی برای کنکورتان نیاز داشتید را در این کتاب آورده ایم ولی اگر جایی نقصی می بینید آن را از طریق سایت خیلی سبز یا آیدی @alishmath با ما در میان بگذارید. ممنون از شما. **شهرابی**

این کتاب شامل محتوای تکمیلی است. ✓

توی بعضی از صفحه های این کتاب آیکون  رو می بینی. هر کدوم از این آیکون های شماره دار ممکنه کلید یه گنج باشه! فقط کافیه دستورالعمل ساده زیر رو اجرا کنی تا به گنج برسی:

1 QR CODE پشت جلد کتاب رو اسکن کن.

2 شماره آیکون رو در بکس «جست و جوی گد» وارد کن و دکمه جست و جوی رو بزنی و محتوای تکمیلی رو ببین.

فهرست مطالب

صفحه

فصل صفر: یادآوری

۵

فصل اول: معادله درجه دوم

فصل ۱ دهم

- درس ۱: معادله درجه اول و مسائل توصیفی ۱۴
- درس ۲: معادله درجه دو و کاربردها ۲۰
- درس ۳: معادله های شامل عبارت های گویا ۳۸

فصل دوم: تابع

فصل ۲ دهم. فصل ۲ یازدهم

- درس ۱: مفهوم تابع ۴۸
- درس ۲: ضابطه جبری تابع ۵۲
- درس ۳: تابع خطی ۵۷
- درس ۴: تابع درجه ۲ ۶۵
- درس ۵: توابع ثابت، چندضابطه ای و همانی ۷۹
- درس ۶: توابع پلکانی، علامت، جزء صحیح و قدر مطلق ۸۴
- درس ۷: اعمال بر روی توابع ۹۸

فصل سوم: کار با داده های آماری / چرخه آمار در حل مسائل

فصل ۳ دهم. فصل ۱ (درس ۳) دوازدهم

- درس ۱: گردآوری داده ها، انواع متغیرها ۱۰۴
- درس ۲: معیارهای گرایش به مرکز ۱۰۹
- درس ۳: معیارهای پراکندگی ۱۱۶
- درس ۴: چرخه آمار در حل مسائل ۱۲۵

فصل چهارم: نمایش داده ها

فصل ۴ دهم

- درس ۱: نمودارهای یک متغیره ۱۲۹
- درس ۲: نمودارهای چندمتغیره ۱۳۴

فصل پنجم: آمار

فصل ۳ یازدهم

- درس ۱: شاخص های آماری ۱۴۱
- درس ۲: سری های زمانی ۱۴۷

فصل ششم: آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

فصل ۱ یازدهم

- درس ۱: گزاره ها و ترکیب گزاره ها ۱۵۵
- درس ۲: استدلال ریاضی ۱۶۹

فصل هفتم: شمارش و احتمال

فصل ۱ دوازدهم (درس ۱ و ۲)

- درس ۱: شمارش ۱۷۷
- درس ۲: احتمال ۱۹۳

فصل هشتم: دنباله ها

فصل ۲ دوازدهم. فصل ۳ (درس ۱) دوازدهم

- درس ۱: مدل سازی و دنباله ها ۲۱۲
- درس ۲: دنباله حسابی ۲۲۰
- درس ۳: دنباله هندسی ۲۳۱

فصل نهم: توان های گویا و تابع نمایی

فصل ۳ دوازدهم (درس ۲ و ۳)

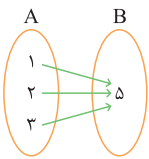
- درس ۱: ریشه n ام و توان گویا ۲۴۴
- درس ۲: تابع نمایی ۲۵۳



درس ۵: توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی

تابع ثابت

تابع روبه‌رو را ببینید:



این تابع به ازای تمام ورودی‌هایش، فقط یک خروجی (یعنی ۵) می‌دهد.

به توابعی که همیشه یک خروجی یکسان دارند، تابع ثابت می‌گوییم.

در واقع تابع ثابت، تابعی است که برد آن، دقیقاً یک عضو دارد. همین تعریف برای تابع ثابت کافی است.

مثال آموزشی: اگر برد تابع ثابت f برابر با مجموعه $R_f = \{5, a+1\}$ و زوج مرتب $(3, 2b-1)$ عضو f باشد، مقدار a و b را به دست آورید.

پاسخ: چون تابع f ثابت است، برد آن فقط یک عضو دارد. سؤال گفته برد f مجموعه $\{5, a+1\}$ است. برای این‌که این مجموعه تک‌عضوی باشد، باید $a+1 = 5$ و برابر باشند:

$$a+1=5 \Rightarrow a=4$$

پس تابع f فقط عدد ۵ را به عنوان خروجی به ما می‌دهد. زوج مرتب $(3, 2b-1)$ عضو تابع است؛ یعنی به ازای ورودی ۳، خروجی $2b-1$ است که این خروجی باید

$$2b-1=5 \Rightarrow 2b=6 \Rightarrow b=3$$

برابر با ۵ باشد:

چهره‌توابع ثابت در نمایش‌های مختلف یک تابع

۱) نمایش زوج مرتبی: نمایش زوج مرتبی یک تابع، زمانی نشان‌دهنده یک تابع ثابت است که مؤلفه‌های دوم همه زوج مرتب‌ها با هم برابر باشند.

مثلاً تابع $f = \{(1, 2), (-3, 2), (0, 2), (7, 2)\}$ تابعی ثابت است، زیرا مؤلفه دوم تمام زوج مرتب‌های آن ۲ است.

تست: اگر تابع $f = \{(a, a^2 + 2a), (-4, 8), (b, b^2 - 6b + 17)\}$ یک تابع ثابت دوعضوی باشد، مقدار $b - a$ کدام است؟

۴ (۴)

۵ (۳)

۱ (۲)

۷ (۱)

$$a^2 + 2a = 8 = b^2 - 6b + 17$$

پاسخ ۱: چون f ثابت است، باید مؤلفه دوم همه زوج مرتب‌ها یکسان باشد:

$$a^2 + 2a = 8 \Rightarrow a^2 + 2a - 8 = 0 \Rightarrow (a+4)(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ a = 2 \end{cases}$$

اول $a^2 + 2a$ را مساوی ۸ می‌گذاریم:

$$b^2 - 6b + 17 = 8 \Rightarrow b^2 - 6b + 9 = 0 \Rightarrow (b-3)^2 = 0 \Rightarrow b = 3$$

بعد $b^2 - 6b + 17$ و ۸ را:

حالا رسیدیم به جای حساس سؤال! چون سؤال گفته f دوعضوی است، پس از این سه زوج مرتبی که در ظاهر می‌بینیم، یکی به خاطر تکراری بودن باید حذف شود.

● به ازای $a = -4$ ، زوج مرتب $(a, a^2 + 2a)$ و $(-4, 8)$ مثل هم‌اند که باعث دوعضوی شدن f می‌شود؛ پس باید $a = -4$ را قبول کنیم. در نتیجه:

$$b - a = 3 - (-4) = 7$$

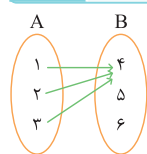
● اما به ازای $a = 2$ و $b = 3$ ، تابع به صورت زیر می‌شود:

$$f = \{(a, a^2 + 2a), (-4, 8), (b, b^2 - 6b + 17)\} = \{(2, 2^2 + 2(2)), (-4, 8), (3, 3^2 - 6(3) + 17)\} = \{(2, 8), (-4, 8), (3, 8)\}$$

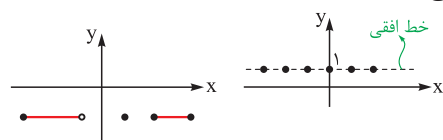
این تابع یک تابع ۳ عضو است؛ پس در شرط سؤال صدق نمی‌کند و رد می‌شود.

x	۱	۳	-۲	۵
y	۴	۴	۴	۴

(۲) نمایش جدولی: نمایش جدولی یک تابع، زمانی نشان‌دهنده یک تابع ثابت است که مولفه‌های سطر دوم (مربوط به خروجی‌ها) همه با هم برابر باشند. مثلاً نمایش جدولی مقابل، مربوط به یک تابع ثابت است.



(۳) نمایش پیکانی: نمایش پیکانی یک تابع، زمانی نشان‌دهنده یک تابع ثابت است که همه پیکان‌ها به یک عدد وارد شده باشند. مثلاً نمایش پیکانی روبه‌رو نشان‌دهنده یک تابع ثابت است، زیرا تمام پیکان‌ها به عدد ۴ وارد شده‌اند:



(۴) نمایش نموداری: نمایش مختصاتی یک تابع، زمانی نشان‌دهنده یک تابع ثابت است که همه نقاط آن تابع روی یک خط افقی قرار داشته باشند. مثلاً دو نمودار مقابل توابعی ثابت هستند، چون تمام نقاط نمودار، روی یک خط افقی قرار دارند:

(۵) نمایش ضابطه‌ای: از آن جایی که خروجی تابع ثابت همیشه یک عدد (مثل c) است، پس ضابطه آن به صورت $f(x) = c$ یا $y = c$ است که در آن c یک عدد است.

مثلاً توابع $f(x) = 2$ ، $f(x) = -1$ و $f(x) = \sqrt{6}$ ، همگی توابع ثابت هستند.

حالا که در سؤالی ضابطه تابع ثابت را نداشتیم، جای تمام (☁️)‌ها، عدد c قرار می‌دهیم.

مثال آموزشی: اگر f تابعی ثابت و $f(1) + f(2) = 5f(3) - 12$ باشد، مقدار $f(0)$ را به دست آورید.

پاسخ: چون f تابع ثابت است، پس جای $f(1)$ ، $f(2)$ و $f(3)$ را c قرار می‌دهیم:

$$f(1) + f(2) = 5f(3) - 12 \Rightarrow c + c = 5c - 12 \Rightarrow 2c = 5c - 12 \Rightarrow -3c = -12 \Rightarrow c = 4$$

پس ضابطه تابع f به صورت $f(x) = 4$ است و $f(0)$ نیز همان ۴ می‌شود: $f(0) = 4$

حالا که یک ضابطه شلوغ پلوغ به ما دادند و گفتند این ضابطه مربوط به یک تابع ثابت است، باید آن را تا حد امکان ساده کنیم، بعد ضریب هر عبارت درجه یک یا دو یا ... را مساوی صفر قرار دهیم تا فقط یک عدد تنها باقی بماند، چون ضابطه تابع ثابت، x یا x^2 یا $\frac{1}{x}$... ندارد و فقط یک عدد خشک و خالی است! مثلاً اگر $f(x) = (a-2)x^2 + (b+3)x + ab$ یک تابع ثابت باشد، باید ضریب x و x^2 صفر باشند؛ یعنی $b+3$ و $a-2$ را مساوی صفر قرار می‌دهیم که از حلشان به $a = 2$ و $b = -3$ می‌رسیم. در آخر فقط ab در ضابطه می‌ماند که با جای‌گذاری مقادیرشان به $-6 = 2 \times (-3)$ می‌رسیم؛ یعنی ضابطه f به شکل $f(x) = -6$ می‌شود.

تست: اگر $f(x) = (x+2)^2 + ax^2 + bx + c$ تابعی ثابت با برد $\{a\}$ باشد، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

-۸ (۴)

-۹ (۳)

-۱۰ (۲)

-۷ (۱)

$$f(x) = x^2 + 4x + 4 + ax^2 + bx + c$$

پاسخ ۲: ضابطه f را به کمک اتحاد مربع باز می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 + ax^2 + 4x + bx + 4 + c$$

x^2 و ax^2 را کنار هم، $4x$ و bx را کنار هم و 4 و c را نیز کنار هم می‌نویسیم:

$$f(x) = x^2(1+a) + x(4+b) + 4 + c$$

بین دوتای اول از x^2 و بین دوتای بعدی از x فاکتور می‌گیریم:

$$x \text{ ضریب } x^2 = 0 \Rightarrow 1+a=0 \Rightarrow a=-1 \quad \text{و} \quad x \text{ ضریب } x = 0 \Rightarrow 4+b=0 \Rightarrow b=-4$$

باید ضریب x و x^2 صفر باشند:

$$f(x) = 4 + c \text{ در ضابطه باقی می‌ماند: } f(x) = 4 + c$$

$$4 + c = a \xrightarrow{a=-1} 4 + c = -1 \Rightarrow c = -5$$

برد f ، عدد a است؛ پس $4 + c$ باید برابر با a باشد:

$$a + b + c = -1 + (-4) + (-5) = -10$$

پس:

مشاوره طراح می‌توانست در صورت سؤال، قید نکند f تابع ثابت است. باید خودتان از تک‌عضوی بودن برد، این موضوع را می‌فهمیدید.

تابع چندضابطه‌ای

تا الان تمام توابعی که خواندیم، فقط از یک ضابطه پیروی می‌کردند، مثلاً تابعی که به ازای هر عددی که وارد شود، ۳ برابر آن را بیرون می‌دهد، تک‌ضابطه‌ای و به صورت $f(x) = 3x$ است.

حالا می‌خواهیم با توابعی آشنا شویم که چند ضابطه دارند.

فرض کنید تابع f ، به ازای اعداد مثبتی که واردش می‌شوند، ۲ برابر آن اعداد را بیرون می‌دهد و به ازای اعداد منفی که واردش می‌شوند، مربع آن اعداد را بیرون می‌دهد. یعنی اگر $x > 0$ باشد، خروجی $2x$ و اگر $x < 0$ باشد، خروجی x^2 می‌شود.

این تابع به زبان ریاضی، این‌جوری می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$$

ضابطه و دامنه اول $\rightarrow$

ضابطه و دامنه دوم $\rightarrow$

که به آن، تابع دوضابطه‌ای می‌گوییم (چون دو تا ضابطه دارد!)

مثال آموزشی: تابع f به ازای هر عدد بزرگ‌تر از یک، قرینه آن عدد و به ازای هر عدد کوچک‌تر یا مساوی -2 ، یک واحد بیشتر از 3 برابر آن را بیرون می‌دهد. ضابطه f را بنویسید.

پاسخ: دو ضابطه را جدا می‌نویسیم:

• به ازای اعداد بزرگ‌تر از 1 ($x > 1$)، قرینه آن عدد (یعنی $-x$) را بیرون می‌دهد.

• به ازای اعداد کوچک‌تر یا مساوی -2 ($x \leq -2$)، یک واحد بیشتر از 3 برابر آن (یعنی $3x+1$) را بیرون می‌دهد.

پس ضابطه f به صورت مقابل است:

$$f(x) = \begin{cases} -x & x > 1 \\ 3x+1 & x \leq -2 \end{cases}$$

حالا که یک تابع دوضابطه‌ای (یا سه‌ضابطه‌ای یا بیشتر) به ما بدهند و مقدار آن تابع را در $x=a$ بخواهند، باید ببینیم a در محدوده دامنه کدام ضابطه قرار می‌گیرد. در هر محدوده‌ای که بود، برای محاسبه $f(a)$ از ضابطه همان محدوده استفاده می‌کنیم.

مثال آموزشی: اگر $-1 < x \leq 2$ ، $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x > 2 \\ \frac{x+4}{x+2} & -1 < x \leq 2 \\ 5 & x \leq -1 \end{cases}$ باشد، مقادیر $f(2)$ ، $f(-\pi)$ و $f(1+\sqrt{3})$ را به دست آورید.

پاسخ:

• $x=2$ در محدوده $-1 < x \leq 2$ قرار دارد؛ پس برای محاسبه $f(2)$ از ضابطه وسط کمک می‌گیریم و جای x هایش 2 قرار می‌دهیم: $f(2) = \frac{2+4}{2+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

• $x = -\pi$ در محدوده $x \leq -1$ قرار دارد؛ پس برای محاسبه $f(-\pi)$ از ضابطه پایینی که یک تابع ثابت است کمک می‌گیریم. خروجی‌اش هم 5 است؛ پس: $f(-\pi) = 5$

• $\sqrt{3}$ تقریباً $1/7$ است، پس $1+\sqrt{3}$ تقریباً $2/7$ می‌شود و در محدوده $x > 2$ قرار می‌گیرد؛ پس برای محاسبه $f(1+\sqrt{3})$ از ضابطه بالایی کمک می‌گیریم و جای x هایش $1+\sqrt{3}$ قرار می‌دهیم:

$$f(1+\sqrt{3}) = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{1+\sqrt{3}+2} = \frac{1+3+2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{4+2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = 2$$

حالا که عددی در دوتا از دامنه‌ها بود، باید مقدار هر دو ضابطه به ازای آن عدد، یکسان باشد، چون در غیر این صورت به ازای یک ورودی، دوتا خروجی داریم و آن رابطه تابع نیست. مثلاً اگر $f(x) = \begin{cases} \bigcirc & x \geq a \\ \square & x \leq a \end{cases}$ باشد، چون $x=a$ در هر دو دامنه وجود دارد، پس مقدار $\bigcirc$ و $\square$ به ازای $x=a$ باید یکسان شود.

تست: در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & x \geq 2 \\ a - x^2 & x \leq 2 \end{cases}$ مقدار $f(a-1)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

پاسخ: $x=2$ در هر دو دامنه بالایی و پایینی وجود دارد؛ پس مقدار هر دو ضابطه به ازای آن، باید یکسان شود:

$$\left. \begin{array}{l} \text{مقدار ضابطه بالایی به ازای } x=2: x^2 - ax = 2^2 - a(2) = 4 - 2a \\ \text{مقدار ضابطه پایینی به ازای } x=2: a - x^2 = a - (2)^2 = a - 4 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{برابری}} 4 - 2a = a - 4 \Rightarrow -3a = -8 \Rightarrow a = \frac{-12}{-3} = 4$$

با جای‌گذاری $a=4$ ، ضابطه به شکل $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 2 \\ 4 - x^2 & x \leq 2 \end{cases}$ می‌شود.

سؤال مقدار $f(a-1)$ که $f(3)$ می‌شود را می‌خواهد. $x=3$ در محدوده ضابطه بالایی قرار دارد؛ پس در ضابطه بالا، جای x ، 3 قرار می‌دهیم:

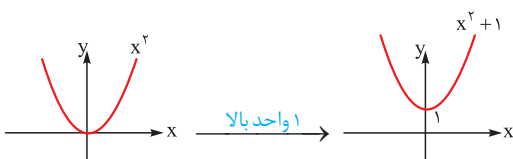
$$x \geq 2: f(x) = x^2 - 4x \xrightarrow{x=3} f(3) = 3^2 - 4(3) = 9 - 12 = -3$$

رسم نمودار توابع چندضابطه‌ای تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ 2x - 4 & 1 \leq x < 3 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم نمودار این تابع دوضابطه‌ای را رسم کنیم. برای

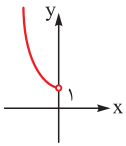
این کار باید نمودار هر ضابطه را در دامنه‌اش رسم کنیم:

• ضابطه اول به صورت $y = x^2 + 1$ با دامنه $x < 0$ است.

برای رسم سهمی $y = x^2 + 1$ کافیست سهمی $y = x^2$ را یک واحد به بالا ببریم:

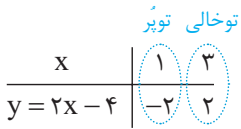


با توجه به دامنه این قسمت که $x < 0$ است، فقط قسمت سمت چپ محور y ها را نگه می‌داریم و بقیه نمودار را پاک می‌کنیم:

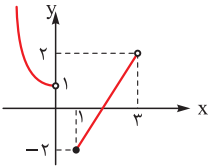


ضابطه دوم به صورت $y = 2x - 4$ با دامنه $1 \leq x < 3$ است.

برای رسم خط کافیت دو نقطه از آن را داشته باشیم. در این جا از نقاط ابتدا و انتهای دامنه استفاده می‌کنیم:

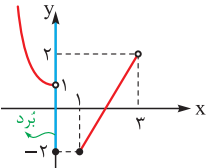


این دو نقطه را روی نموداری که ضابطه اول در آن رسم شده به هم وصل می‌کنیم تا به نمودار نهایی برسیم:



حالا که سؤال از ما برد یک تابع چندضابطه‌ای را می‌خواست، بعد از رسم نمودارش، آن را روی محور y ها می‌گوییم.

مثلاً برد تابع مثال بالا به صورت $y \geq -2$ است:



تست: کدام خط، نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 0 \\ x + 3 & x < 0 \end{cases}$ را در نقاط بیشتری قطع می‌کند؟

$y = 1$ (۴)

$y = -0.5$ (۳)

$y = -1$ (۲)

$y = -1.5$ (۱)

پاسخ ۳: ضابطه اول یک سهمی است که C ندارد. بهتر است این سهمی‌ها را به کمک ریشه‌هایش رسم کنیم. ضابطه را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

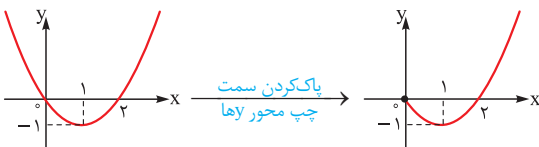
$x^2 - 2x = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور از } x} x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

میانگین ریشه‌ها، طول رأس را می‌دهد: $x_S = \frac{0+2}{2} = 1$

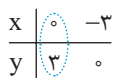
به ازای $x = 1$ ، عرض رأس به دست می‌آید:

دهانه سهمی رو به بالا است (چون $a > 0$). رأسش هم $(1, -1)$ و ریشه‌هایش هم 0 و 2 هستند. نمودارش را می‌کشیم. چون دامنه این ضابطه، $x \geq 0$ است، پس سمت چپ محور y ها را پاک می‌کنیم:

$y_S = 1^2 - 2(1) = 1 - 2 = -1$



توخالی

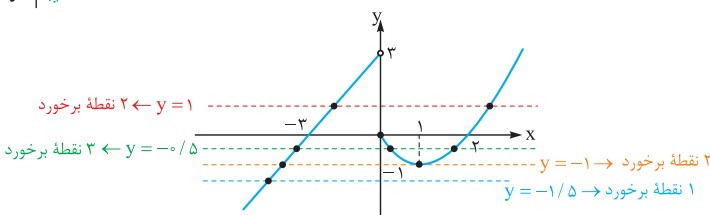


ضابطه دوم $y = x + 3$ با دامنه $x < 0$ است. برای رسم خط دو نقطه کافی است:

دو نقطه $(0, 3)$ و $(-3, 0)$ را به هم وصل می‌کنیم و از سمت نقطه

$(-3, 0)$ امتداد می‌دهیم و هر چهار خط افقی که در گزینه‌ها آمده را رسم می‌کنیم:

خط $y = -0.5$ ، نمودار را در ۳ نقطه قطع می‌کند که نسبت به سه خط دیگر بیشتر است.

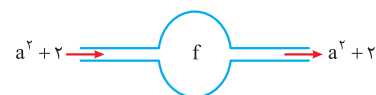
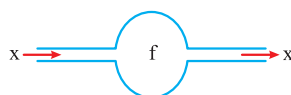
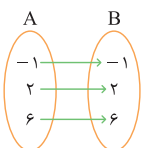


تابع همانی

تابع روبه‌رو را ببینید:

هر عددی که وارد این تابع شده، همان عدد هم از تابع خارج شده است.

به توابعی که به ازای هر عددی که واردشان می‌شود، همان عدد را بیرون می‌دهند، تابع همانی می‌گوییم. (اسم این تابع، واقعاً برازندشه!)



مثال آموزشی: اگر f تابعی همانی باشد، مقدار a را به دست آورید.

پاسخ: به ازای ورودی $a+2$ ، خروجی مان $11-2a$ شده. چون f همانی است، باید این دو مقدار برابر باشند؛ پس:

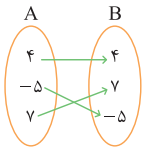
$$11-2a = a+2 \Rightarrow 11-2a = a+2 \Rightarrow 3a = 9 \Rightarrow a = \frac{9}{3} = 3$$

چهره تابع همانی در نمایش های مختلف یک تابع

(۱) نمایش زوج مرتبی: در نمایش زوج مرتبی تابع همانی، در هر زوج مرتب، مؤلفه اول و دوم با هم برابرند؛ مثلاً تابع $f = \{(2, 2), (-3, -3), (\frac{1}{5}, \frac{1}{5})\}$ یک تابع همانی است.

x	۴	-۳	۷
y	۴	-۳	۷

(۲) نمایش جدولی: در نمایش جدولی تابع همانی، هر دو عددی که در یک ستون نوشته می شوند باید با هم برابر باشند. مثلاً تابع مقابل یک تابع همانی است.



(۳) نمایش پیکانی: در نمایش پیکانی تابع همانی باید اعداد سر و ته هر فلش (پیکان) یکسان باشند؛ مثلاً نمایش پیکانی روبه رو یک تابع همانی است:

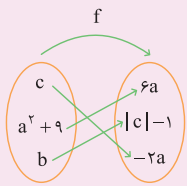
تست: نمودار مقابل مربوط به تابع همانی f است. اگر $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ تابعی ثابت باشد، d کدام است؟

۱۰ (۱)

۲۰ (۲)

-۱۰ (۳)

-۲۰ (۴)



پاسخ ۳: اعداد سر و ته هر فلش باید یکسان باشند. با فلشی شروع می کنیم که از a^2+9 به $6a$ وارد شده (چون فقط متغیر a دارد). این دو را برابر قرار می دهیم:

$$a^2+9 = 6a \Rightarrow a^2-6a+9 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع}} (a-3)^2 = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$c = -2a \xrightarrow{a=3} c = -2(3) = -6$$

$$b = |c|-1 \xrightarrow{c=-6} b = |-6|-1 = 6-1 = 5$$

$$g(x) = \frac{3x+5}{-6x+d}$$

سه پارامتر $a=3$ ، $b=5$ و $c=-6$ را در $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ جای گذاری می کنیم:

نکته: تابع به فرم $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ در دو حالت، تابع ثابت می شود:

۱ a و c هر دو صفر باشند.

۲ نسبت ضریب x بالا به پایین با نسبت عدد ثابت بالا به پایین یکسان باشد؛ یعنی $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$$\frac{3}{-6} = \frac{5}{d} \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} 3d = -30 \Rightarrow d = -10$$

در این جا حالت ۱ که نیست، پس باید حالت ۲ باشد؛ در نتیجه:

(۴) نمایش ضابطه ای: گفتیم در تابع همانی، هر عددی که وارد تابع شود، همان عدد از تابع خارج می شود؛ پس ضابطه تابع همانی به صورت مقابل است: $f(x) = x$

پس اگر f همانی باشد، آن وقت $f(2) = 2$ یا $f(x^2-1) = x^2-1$ یا ...

حالا اگه f همانی بود و یک عبارت داشتیم که پر از f بود، باید جای تمام f ها، f را قرار دهیم.

مثال آموزشی: اگر f تابعی همانی و $f(13) + f(a-1) = f(2) \times f(2a)$ باشد، مقدار a را به دست آورید.

پاسخ: جای تمام f ها، f را قرار می دهیم. مثلاً جای $f(13)$ ، 13 را قرار می دهیم:

$$f(13) + f(a-1) = f(2) \times f(2a) \Rightarrow 13 + a-1 = 2(2a) \Rightarrow 12 + a = 4a \Rightarrow 12 = 4a - a \Rightarrow 12 = 3a \Rightarrow a = 4$$

حالا اگه یک ضابطه شلوغ بلوغ به ما دادند و گفتند این ضابطه مربوط به یک تابع همانی است، آن را تا حد امکان ساده می کنیم. بعد ضریب x را مساوی

یک و ضریب بقیه جملات (شامل x^2 ، x^3 ، عدد ثابت و ...) را مساوی صفر قرار می دهیم. مثلاً اگر $f(x) = (a-2)x^2 + (b+3)x + c - 1$ تابعی همانی باشد، باید $\underbrace{b+3=0}_{\text{ضریب } x}$ ، $\underbrace{a-2=0}_{\text{ضریب } x^2}$ و $\underbrace{c-1=0}_{\text{عدد ثابت}}$ باشد. در نتیجه $a=2$ ، $b=-3$ و $c=1$ می شود.



تست: تابع $f(x) = (x-1)^2 + ax^2 + bx + c$ همانی است. مقدار abc کدام است؟

۳ (۴)

-۳ (۳)

-۶ (۲)

۶ (۱)

پاسخ ۴: اول ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \underbrace{(x-1)^2}_{\text{اتحاد مربع}} + ax^2 + bx + c = (x^2 - 2x + 1) + ax^2 + bx + c = x^2 - 2x + 1 + ax^2 + bx + c$$

جملات هم‌درجه را کنار هم می‌نویسیم:

$$f(x) = \underbrace{ax^2 + x^2}_{\text{فاکتوراز } x^2} - 2x + \underbrace{bx + 1}_{\text{فاکتوراز } x} + c = (a+1)x^2 + (-2+b)x + 1+c$$

$$a+1=0 \Rightarrow a=-1$$

$$-2+b=1 \Rightarrow b=3$$

$$1+c=0 \Rightarrow c=-1$$

$$abc = -1 \times 3 \times (-1) = 3$$

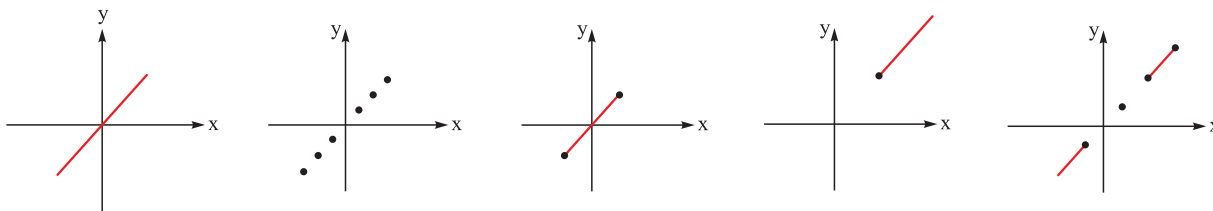
چون f همانی است، ضریب x^2 باید صفر باشد:

ضریب x باید ۱ باشد:

عدد ثابت هم باید صفر باشد:

پس:

۵) نمایش نموداری: همان‌طور که گفتیم ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است؛ پس نمودار این تابع حتماً روی خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرار دارد که می‌تواند «کل خط»، «یک یا چند نقطه روی این خط»، «یک یا چند پاره‌خط روی این خط» و ... باشد. مثلاً تمام نمودارهای زیر نشان‌دهنده یک تابع همانی هستند:



نکته: ۱) هر نقطه‌ای که روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشد، طول و عرض برابری دارد. مثلاً نقاط $(2,2)$ ، $(-4,-4)$ و $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ روی آن هستند.

۲) هر نقطه‌ای که روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم باشد، طول و عرضش قرینه‌اند. مثلاً نقاط $(-2,2)$ ، $(-4,4)$ و $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ روی آن هستند.

۳) معادله نیمساز ناحیه اول و سوم $y = x$ و معادله نیمساز ناحیه دوم و چهارم $y = -x$ است. فقط نقطه $(0,0)$ روی هر دوی آن‌ها قرار دارد.

تست: f تابعی همانی و نقطه $(f(1-2a) + f(2), 4 - af(a))$ روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم قرار دارد. حاصل ضرب مقادیر ممکن برای a کدام است؟ (مثل کتور)

۴) -۲

۳) ۲

۲) -۷

۱) ۷

پاسخ ۲: با توجه به همانی بودن f ، مختصات نقطه را ساده می‌کنیم:

$$\underbrace{(f(1-2a) + f(2))}_{1-2a} - \underbrace{af(a)}_a = (1-2a+2, 4-a^2) = (3-2a, 4-a^2)$$

چون نقطه داده شده روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم است، پس طول و عرضش قرینه‌اند:

$$\text{طول} = -(\text{عرض}) \Rightarrow 3-2a = -(4-a^2) \Rightarrow 3-2a = -4+a^2 \Rightarrow a^2+2a-7=0$$

حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم برابر با $P = \frac{C}{A}$ است؛ پس حاصل ضرب مقادیر a در معادله $\underbrace{1}_A \underbrace{a^2}_B + \underbrace{2a}_{-7} - 7 = 0$ برابر است با: $P = \frac{C}{A} = \frac{-7}{1} = -7$

