

...مقدمه ناشر...

بعضی وقت‌ها با خودم فکر می‌کنم که اگر می‌شد به چند سال قبل برگردم، چه کارهایی انجام می‌دادم و چه کارهایی انجام نمی‌دادم. معمولاً هم نتیجه این فکرها می‌شود یک سری حسرت و ناراحتی و گاهی هم لبخند و خوشحالی! 😊 چند وقت پیش‌ها یک فیلمی دیدم به اسم About time؛ داستان کلی این فیلم، در مورد پسری بود که می‌توانست در زندگی گذشته خودش سفر کند. این جوری که می‌رفت یک جایی که فقط و فقط خودش باشد و به یک لحظه در گذشته خودش فکر می‌کرد، دقیقاً همون لحظه‌ای که دلش می‌خواست تغییرش بده! بعد وقتی که از اون‌جا می‌اومد بیرون، دقیقاً به همون لحظه برمی‌گشت و اون کاری که احساس می‌کرد باید انجام می‌داده و نداده رو انجام می‌داد!! مثلاً همین الان فرض کنید اگر برمی‌گشتید به گذشته خودتون، چه جوری زندگی می‌کردید و چه چیزی را تغییر می‌دادید؟ قسمت جالب فیلم این بود که نتیجه این تغییرات بعضی موقع‌ها خوب می‌شد، بعضی موقع‌ها هم بد و بعضی موقع‌ها هم چیزی رو تغییر نمی‌داد! مثلاً این که سفر در زمان، نمی‌تواند کسی را وادار به عشق کند! آخر فیلم هم به دیالوگ خوب داره که می‌گه: «هر روزی رو دو بار تکرار می‌کردم. بار اول به خاطر استرسی که مشکلات زندگی باعثش می‌شه، مانع لذت بردن من از زندگی می‌شد. اما بار دوم همون روز رو بدون استرس و نگرانی می‌گذروندم و این باعث می‌شد از کوچک‌ترین چیزها هم لذت ببرم!»

حالا تصور کنید که ۱ سال از امروز گذشته! حسرت چه چیزهایی را می‌خورید؟ به خاطر چه کارهایی لبخند می‌زنید؟ همین الان یک جدولی شبیه جدول زیر درست کنید، این چیزها را بنویسید و یک جایی بگذارید که جلوی چشمتون باشد. هر روز به این جدول نگاه کنید و مرتب به‌روزش کنید. حتماً به دردتون خواهد خورد!

کارهایی که به خاطرشون خوشحال می‌شم.	چیزهایی که حسرتشو می‌خورم.
- به قدر خوب شد که ریاضی نردبام رو خوب خوندم. - ورزش خیلی به روحیه‌ام کمک کرد. خوشفالم که با این همه درس نذاشتمش کنار!	- کاش بهتر برنامه‌ریزی می‌کردم... - کاش کم‌تر می‌رفتم تو اینستا!
⋮	⋮

نوشتن کتاب‌های سری نردبام اصلاً کار آسونی نیست؛ چرا که با توجه به محدودیت‌های کتاب درسی، باید کتابی بنویسی که هم از چارچوب کتاب درسی خارج نشود، هم در مسیر کنکور باشد و مهم‌تر از همه تست‌های جون‌دار و خفن داشته باشد! مؤلفان کتاب به خوبی از پس این کار براومدند! به این دوستان تبریک می‌گم به خاطر محصولی که تولید کردند! دست واحد تولید هم درد نکند که مثل همیشه پایه‌پای تألیف، کارها را جلو بردند!

زندگی به بار بیشتر نیست! قدرشو بدون ...

این کتاب شامل محتوای تکمیلی است. ✓



با اسکن کیوآرکد پشت جلد، می‌تونن بخش‌های زیر رو به صورت رایگان ببینن:

۱- درس‌نامه کامل کتاب

۲- پاسخ تشریحی آزمون‌های جامع

...مقدمه مؤلفان...

سلام

به ویرایش جدید کتاب تست جامع نردبام خوش آمدید.

ویرایش قبلی، مورد استقبال بسیار خوبی از سوی دبیران، مشاوران و داوطلبان قرار گرفت.

با توجه به نیازهای داوطلبان، تغییرات جدی کنکور و بازخوردهای دریافتی، بازنگری اساسی در کتاب انجام شده است. ویژگی‌های کتاب فعلی را با هم ببینیم:

- تمام تست‌های کنکور در درس‌نامه کتاب به صورت QRcode آمده‌اند.
- تمام تست‌های کتاب تألیفی‌اند و با توجه به رویکرد جدید کنکور انتخاب شده‌اند.
- حجم معقول کتاب اجازه می‌دهد در طول سال کنکور داوطلب بتواند تمام تست‌ها را بررسی و حل کند.
- آزمون‌های انتهایی کتاب امکان جمع‌بندی کاملی را برای داوطلب فراهم کرده‌اند.
- چیدمان منظم تست‌ها از آسان به سخت، دانش‌آموز را تا رسیدن به بالاترین سطح آمادگی یاری می‌کند.
- پاسخ‌های تشریحی کتاب فراگیر و با توضیح کافی ارائه شده‌اند و راه‌های بهتر و سریع‌تر هم در اختیار خوانندگان قرار دارد.

■ نحوه استفاده از کتاب

اول درس‌نامه را خوب بخوانید و مثال‌های آن را حل کنید. سپس تست‌ها را در دسته‌های ۱۰ تا ۲۰ تایی حل کنید و پاسخ‌های تشریحی همه سؤالات را بخوانید.

⚠ با توجه به تعداد معقول تست‌ها و چیدمان سؤالات، استفاده از تمام تست‌ها لازم است و حل منتخب سؤالات (مثلاً شماره‌های زوج یا فرد) را توصیه نمی‌کنیم.

✓ مؤلفان کتاب، تجربه سال‌ها تدریس در برترین مدارس تهران و طراحی سؤال آزمون‌های آزمایشی کشوری را در تست‌ها، ایده‌ها و پاسخ و درس‌نامه قرار داده‌اند و حالا نوبت شماست که خودتان را برای کنکور، خیلی جدی آماده کنید. ایمان داریم که این کتاب بهترین منبع برای رسیدن به درصد عالی در ریاضی است.

اما تشکرها ...

■ ویراستاران کتاب، آقایان فرامرز سلطان‌کریمی و امیرحسین شریفیان و خانم‌ها پریسا سلامت، سحر شاه‌سنایی و ملیحه حاجی‌بابا، زحمت فراوانی کشیدند تا کتاب تا حد امکان کم‌غلط به شما ارائه شود. از دقتشان ممنونیم.

■ در پایان از دکتر نصری مدیر خیلی سبز و ایمان سلیمان‌زاده عزیز، مدیر تألیف، سپاسگزاریم.

مسئول اجرایی کتاب خانم فاطمه جان‌محمدی، مدیر محتوایی خانم‌ها مریم براتی و کیمیا توکلی هم لطف فراوانی به ما داشتند.

گروه مؤلفان



فهرست

فصل اول: مجموعه‌ها	۷
فصل دوم: الگو و دنباله	۱۰
فصل سوم: ریشه‌گیری و عبارت‌های جبری	۱۶
فصل چهارم: معادله و تابع درجه دوم	۲۲
فصل پنجم: نامعادلات گویا و تعیین علامت	۳۱
فصل ششم: قدرمطلق و جزء صحیح	۳۶
فصل هفتم: هندسه تحلیلی	۴۳
فصل هشتم: هندسه پایه	۴۸
فصل نهم: توابع نمایی و لگاریتمی	۵۷
فصل دهم: تابع	۶۷
فصل یازدهم: مثلثات	۹۶
فصل دوازدهم: حد و پیوستگی	۱۱۶
فصل سیزدهم: مشتق	۱۳۵
فصل چهاردهم: کاربرد مشتق	۱۵۰
فصل پانزدهم: مقاطع مخروطی	۱۶۲
فصل شانزدهم: ترکیبیات	۱۷۰
فصل هفدهم: احتمال	۱۷۶
فصل هجدهم: آمار	۱۸۷
آزمون‌های مبحثی و جامع	۱۹۱
پاسخ‌نامه تشریحی	۲۷۰
پاسخ‌نامه کلیدی	۴۸۶



مجموعه‌های اعداد

در ابتدا مجموعه‌هایی را به عنوان مجموعه مرجع معرفی می‌کنیم که قبلاً با برخی از آن‌ها آشنا شده‌اید.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \text{ مجموعه اعداد طبیعی}$$

$$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ مجموعه اعداد حسابی}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ مجموعه اعداد صحیح}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \right\} \text{ مجموعه اعداد گویا}$$

$$\mathbb{Q}' = \{x : x \text{ را نتوان به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد}\} \text{ مجموعه اعداد گنگ}$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' \text{ اعداد حقیقی}$$

دقت کنید $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

تذکره هر عدد حقیقی یک نقطه روی محور اعداد است و بالعکس.

تست اگر α و β دو عدد گویا با شرط $\alpha < \beta$ باشند، کدام عدد گویا بین α و β است؟

$$\beta - \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (۴)$$

$$\beta - \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (۳)$$

$$\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2} \quad (۲)$$

$$\alpha + \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (۱)$$

پاسخ گزینه «۲» ابتدا تک‌تک آن‌ها را بررسی می‌کنیم:

اگر $\alpha = 1$ و $\beta = 2$ ، آن‌گاه $\frac{2\alpha + \beta}{2} = \frac{2 + 2}{2} = 2$ پس گزینه (۱) نادرست است.

میانگین دو عدد، بین دو عدد است، پس گزینه (۲) همواره صحیح است.

اگر $\alpha = 1$ و $\beta = 2$ ، آن‌گاه $\frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{1}{2}$ پس گزینه (۳) نادرست است.

اگر $\alpha = 1$ و $\beta = 2$ ، آن‌گاه $\frac{2\beta - \alpha}{2} = \frac{4 - 1}{2} = \frac{3}{2}$ پس گزینه (۴) نادرست است.

$$\alpha + \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3\alpha + \beta}{2}$$

$$\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} \Rightarrow \alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$$

$$\beta - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\beta - \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{2\beta - \alpha}{2}$$

بازه‌ها: اگر α و β دو عدد حقیقی با شرط $\alpha < \beta$ باشند، آن‌گاه:

$$[\alpha, \beta] = \{x : \alpha \leq x \leq \beta\} \text{ بازه بسته}$$

$$[\alpha, \beta) = \{x : \alpha \leq x < \beta\} \text{ بازه نیم‌باز}$$

$$(\alpha, \beta] = \{x : \alpha < x \leq \beta\} \text{ بازه نیم‌باز}$$

$$(\alpha, \beta) = \{x : \alpha < x < \beta\} \text{ بازه باز}$$

$$(\alpha, +\infty) = \{x : x > \alpha\} \text{ بازه باز}$$

$$(-\infty, \beta] = \{x : x \leq \beta\} \text{ بازه نیم‌باز}$$

تست اگر $A = (-2, 3)$ و $B = [-1, 4]$ ، کدام دو عدد به ترتیب در مجموعه $A - B$ و $A \cap B$ قرار دارند؟

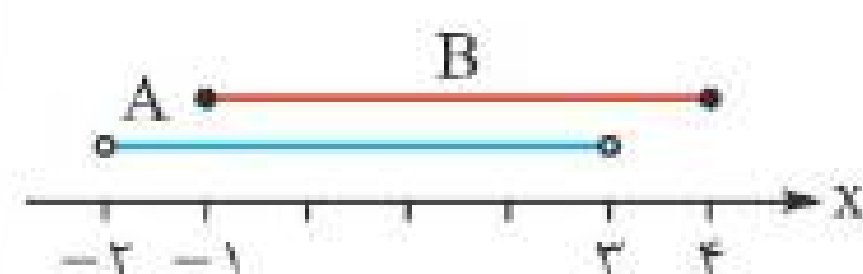
$$-\frac{3}{4} \text{ و } -\frac{5}{4} \quad (۴)$$

$$-1/75 \text{ و } -1/5 \quad (۳)$$

$$3 \text{ و } -1 \quad (۲)$$

$$\frac{3}{4} \text{ و } \frac{5}{4} \quad (۱)$$

پاسخ گزینه «۴» ابتدا بازه‌ها را روی محور نمایش می‌دهیم.



$$A - B = (-2, -1), A \cap B = [-1, 3] \Rightarrow -\frac{5}{4} \in A - B, -\frac{3}{4} \in A \cap B$$

مجموعه متناهی و نامتناهی: مجموعه A را متناهی گوئیم هرگاه تعداد اعضای آن عدد حسابی باشد. مثلاً مجموعه شمارنده‌های عدد 1200

یک مجموعه متناهی است و اگر نتوان تعداد اعضای آن را با یک عدد حسابی بیان کرد می‌گوئیم نامتناهی است؛ مثلاً مجموعه مضارب عدد 3 نامتناهی است.

نکته ۱ هر بازه یک مجموعه نامتناهی است.



۲ اجتماع و اشتراک دو مجموعه متناهی خود یک مجموعه متناهی است و اجتماع دو مجموعه نامتناهی الزاماً نامتناهی است ولی در مورد اشتراک دو مجموعه نامتناهی نتیجه قطعی نداریم.

۳ اگر A متناهی باشد و $B \subseteq A$ ، آن‌گاه B متناهی است؛ اگر B نامتناهی باشد و $B \subseteq A$ ، آن‌گاه A نامتناهی است.

تست اگر A متناهی و B نامتناهی باشد، کدام مجموعه متناهی است؟

(۱) $A \cup B'$ (۲) $B' \cap A$ (۳) A' (۴) $B' \cap A'$

پاسخ گزینه «۲» چون A متناهی است؛ پس اشتراک آن با هر مجموعه‌ای متناهی است.

تست اگر $A \cap B$ مجموعه نامتناهی و $C \cup D$ مجموعه‌ای متناهی باشد، کدام مجموعه متناهی است؟

(۱) A' (۲) D' (۳) $D - A$ (۴) $A \cup D$

پاسخ گزینه «۳» چون $A \cap B$ نامتناهی پس A و B هر کدام نامتناهی هستند.

$C \cup D$ مجموعه متناهی است، پس C و D هر کدام متناهی هستند. دقت کنید متمم یک مجموعه متناهی می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد البته بستگی به مجموعه مرجع دارد. مثلاً:

اما اگر $M = \mathbb{R}$ و $A = \{1, 2\}$ ، آن‌گاه A' نامتناهی است.

اما چون D متناهی است؛ پس $D - A$ هم متناهی است اما $A \cup D$ نامتناهی است.

خواصی از مجموعه‌ها: اگر U مجموعه مرجع و A و B مجموعه‌های دلخواه در آن مجموعه مرجع باشند، آن‌گاه داریم:

$$\begin{array}{lll} U - A = A' & (A')' = A & (A \cup B)' = A' \cap B' \\ A \cup A' = U & U' = \emptyset & (A \cap B)' = A' \cup B' \\ A \cap A' = \emptyset & \emptyset' = U & A - B = A \cap B' \end{array}$$

نکته اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $A \cup B = B$ ، $A \cap B = A$ و $B' \subseteq A'$ ، $A - B = \emptyset$.

تست اگر $B - A = B$ ، حاصل $((A \cap B)' - (A'))' \cap B$ کدام است؟

(۱) $\emptyset$ (۲) A (۳) B (۴) A'

پاسخ گزینه «۳» اگر $A \cap B = \emptyset$ ، آن‌گاه A و B جدا از هم هستند؛ در این صورت:

چون $B - A = B$ پس A و B جدا از هم هستند، در این صورت $A \cap B = \emptyset$ و داریم:

$$((A \cap B)' - A')' \cap B = (\emptyset' - A')' \cap B = (U - A')' \cap B = A' \cap B = B - A = B$$

تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه: اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند، آن‌گاه:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

و اگر A و B دارای عضو مشترکی باشند؛ یعنی $n(A \cap B) \neq 0$ ، آن‌گاه $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

می‌توانیم آن را در حالت کلی برای سه مجموعه هم تعمیم دهیم.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

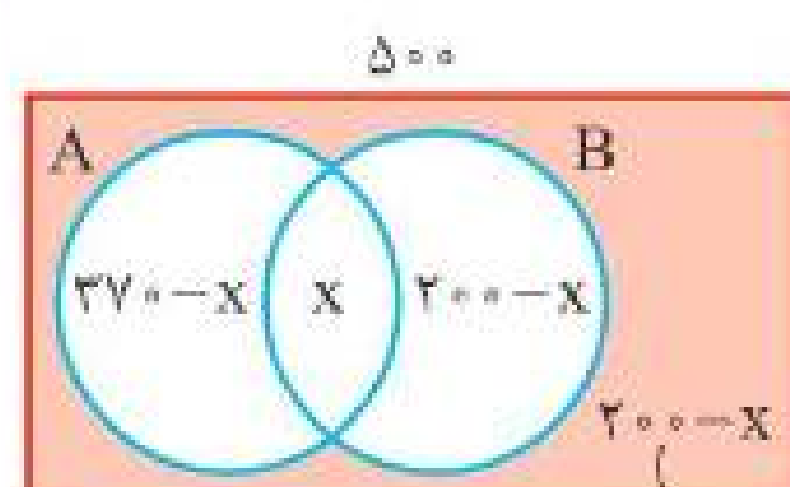
تذکره گاهی در حل مسائل مربوط به تعداد اعضای مجموعه، رسم نمودار ون کمک بسزایی در حل مسئله به شما می‌کند.

تست در بررسی ۵۰۰ کشاورز، ۳۷۰ نفر دارای مزرعه چای و ۲۰۰ نفر دارای شالیزار هستند. تعداد آن‌هایی که نه مزرعه چای و نه شالیزار دارند، برابر تعداد کشاورزانی است که فقط شالیزار دارند. چند کشاورز فقط مزرعه چای دارند؟ (کشاورزان فقط چای و برنج برداشت می‌کنند.)

(سراسری ۱۴۰۱)

(۱) ۱۰۰ (۲) ۱۳۵ (۳) ۲۳۵ (۴) ۲۷۰

پاسخ گزینه «۳» با تعریف مجموعه A به عنوان مزرعه چای و مجموعه B به عنوان شالیزار، به کمک رسم نمودار ون خواهیم داشت:

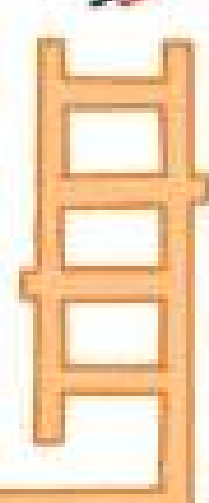


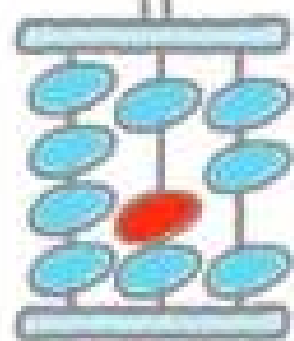
تعداد افرادی که نه مزرعه چای و نه شالیزار دارند.

$$370 - x + x + 200 - x + 200 - x = 500 \Rightarrow 770 - 500 = 2x \Rightarrow x = 135$$

$$370 - 135 = 235$$

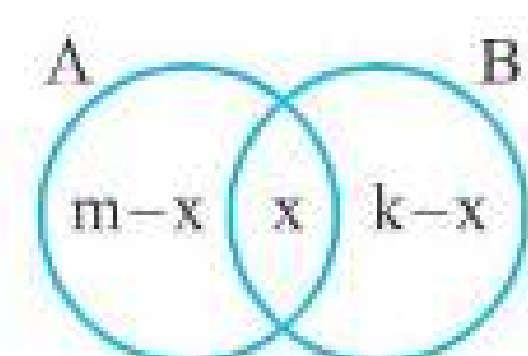
تعداد کشاورزانی که فقط مزرعه چای دارند برابر است با:





تست مجموعه‌های A و B به ترتیب دارای m و k عضو هستند. اگر $m - k = ۱۴$ و اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های $A \cup B$ و $A \cap B$ برابر ۲۰ باشد، مجموعه $B - A$ چند عضو دارد؟

(سراسری ۱۴۰۲)



۳ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

۸ (۱)

پاسخ گزینه «۴» با رسم نمودار ون برای مجموعه‌های A و B خواهیم داشت:

$$\text{اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های } A \cup B \text{ و } A \cap B: \underbrace{(m-x+x+k-x)}_{A \cup B} - \underbrace{x}_{A \cap B} = 20 \Rightarrow m+k-2x=20$$

$$\begin{cases} m-k=14 \\ m+k-2x=20 \end{cases} \Rightarrow 2k-2x=6 \Rightarrow k-x=3$$

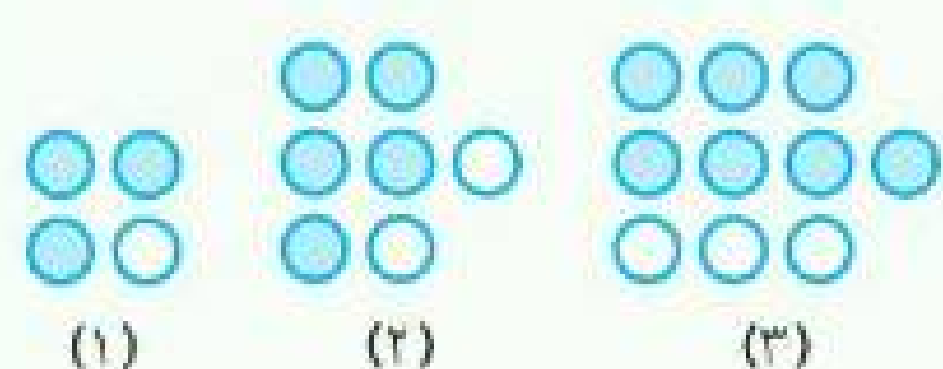
از طرفی طبق اطلاعات مسئله می‌دانیم $m-k=14$ است، پس:

که این مقدار همان تعداد اعضای مجموعه $B-A$ است.

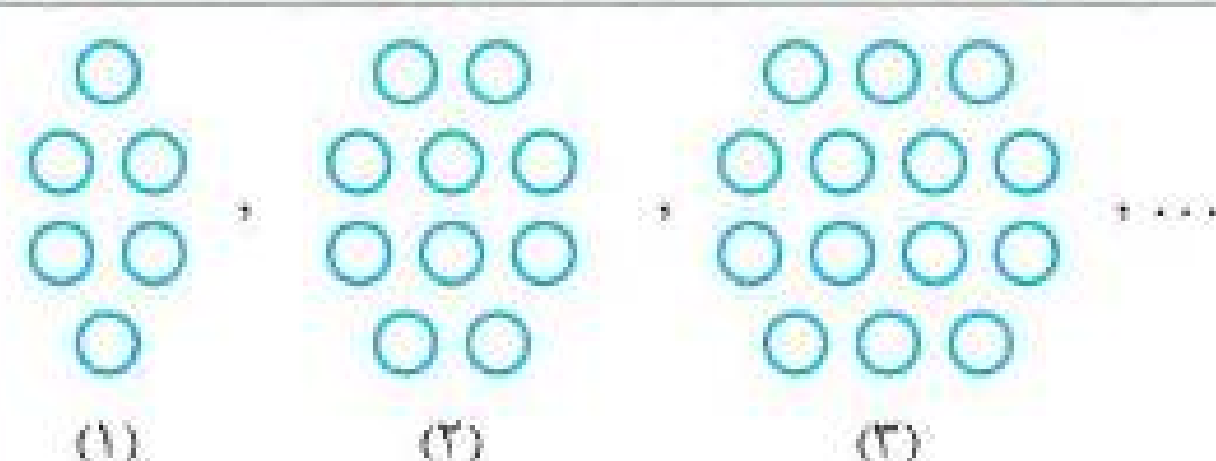
فصل دو

الگو و دنباله

الگویابی



الگو: الگو یک ساختار منظم از اشکال، اعداد و ... است. جمله اول الگو را با a_1 و جمله n ام الگو (که به جمله عمومی الگو معروف است) را با a_n نمایش می‌دهیم. به عنوان مثال در الگوی مقابل تعداد دایره‌های رنگی به صورت $3, 5, 7, \dots$ است که جمله عمومی آن به فرم $a_n = 2n + 1$ خواهد بود.

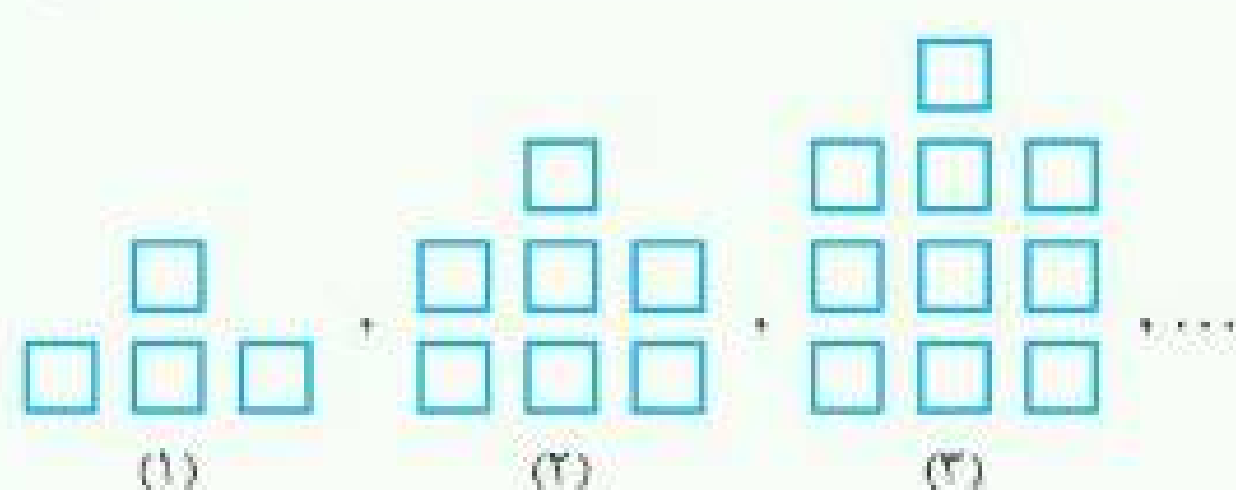


تست: در الگوی شکل مقابل تعداد دایره‌های شکل چندم برابر ۶۶ است؟

(۱) ۱۵ (۲) ۱۶

(۳) ۱۷ (۴) ۱۸

پاسخ: گزینه «۲» تعداد دایره‌ها تشکیل دنباله $6, 10, 14, \dots$ را می‌دهند که جمله عمومی آن‌ها به صورت $4n + 2$ است؛ پس $4n + 2 = 66$ و $n = 16$ است.



◀ **الگوی خطی:** یک الگو با جمله عمومی $a_n = an + b$ را الگوی خطی می‌نامیم. ($a \neq 0$). در این الگو، اختلاف هر دو جمله متوالی عددی ثابت است همان ضریب n است. مثلاً در الگوی مقابل تعداد مربع‌ها در هر شکل نسبت به شکل قبلی ۳ تا بیشتر شده است؛ پس اگر t_n تعداد مربع‌ها در شکل n ام باشد آن‌گاه $t_n = 3n + 1$.

تست: در یک الگوی خطی، جمله دهم، ۱۲ واحد از جمله هفتم بیشتر است. اگر مجموع جملات سوم و ششم برابر ۳۰ باشد، جمله بیستم کدام است؟

(۱) ۷۴ (۲) ۷۵ (۳) ۷۶ (۴) ۷۷

پاسخ: گزینه «۴» جمله عمومی الگو را $a_n = an + b$ فرض کنید:

$$a_{10} = a_7 + 12 \Rightarrow 10a + b = 7a + b + 12 \Rightarrow a = 4$$

$$a_3 + a_6 = 30 \Rightarrow 3a + b + 6a + b = 30 \Rightarrow 9 \times 4 + 2b = 30 \Rightarrow b = -3$$

پس $a_n = 4n - 3$ و در نتیجه $a_{20} = 4 \times 20 - 3 = 77$.

◀ **الگوی غیر خطی:** یک الگو با جمله عمومی $a_n = an^2 + bn + c$ را الگوی درجه دوم می‌نامیم. ($a \neq 0$).

دنباله حاصل از اختلاف هر دو جمله متوالی دنباله درجه دوم، یک الگوی خطی است.

$$1, 6, 15, 28, 45, \dots \Rightarrow a_n = 2n^2 - n \Rightarrow \text{الگوی جملات دنباله الگوی درجه ۲ است.}$$

$$b_n = 4n + 1$$

اختلاف ۲ جمله متوالی الگوی خطی است و داریم:

تست: اعداد $5, 14, 27, \dots$ جملات ابتدایی الگوی درجه ۲ هستند. اختلاف جملات دهم و یازدهم آن چه عددی است؟

(۱) ۴۵ (۲) ۴۹ (۳) ۴۱ (۴) ۳۷

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم جمله عمومی یک الگوی درجه دوم برابر است با $a_n = an^2 + bn + c$ ؛ پس داریم:

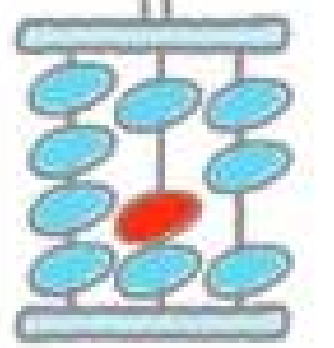
$$\begin{cases} a_1 = a + b + c = 5 \\ a_2 = 4a + 2b + c = 14 \\ a_3 = 9a + 3b + c = 27 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 3, c = 0$$

پس $a_n = 2n^2 + 3n$ است. حال تعدادی از جملات a_n را می‌نویسیم و اختلاف بین جملات را محاسبه می‌کنیم:

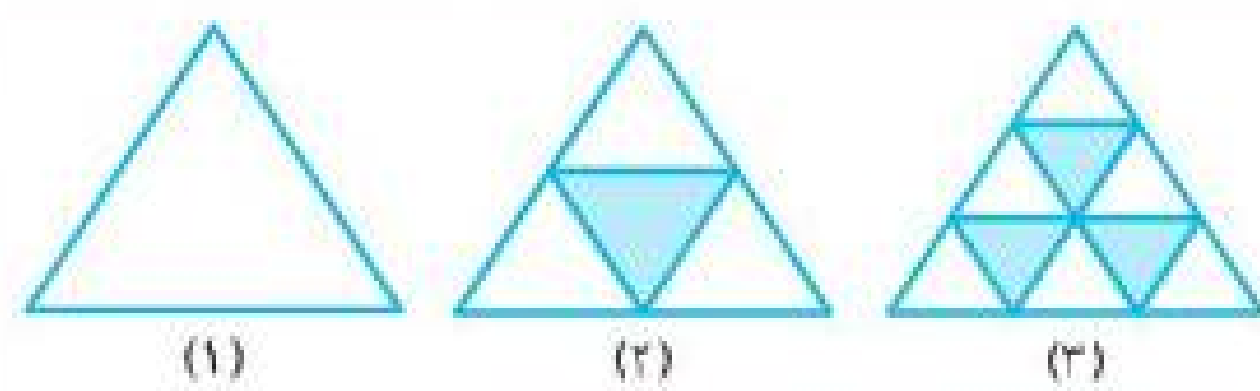
$$5, 14, 27, 44, \dots$$

دنباله اختلاف جملات برابر است با $t_n = 4n + 5$ که خود الگوی خطی است. حال با قراردادن $n = 10$ ، اختلاف جمله دهم و یازدهم به دست می‌آید:

$$t_{11} - t_{10} = 45$$



نکته مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n برابر است با $\frac{n(n+1)}{2}$.



تست در شکل دهم، تعداد مثلث کوچک رنگی چه تعداد از مثلث کوچک سفید کم تر است؟

(۲) ۱۰

(۱) ۱۵

(۴) ۱۷

(۳) ۱۳

پاسخ - گزینه «۲»

n^2 : تعداد کل مثلثهای کوچک

$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$: تعداد مثلثهای سفید در شکل n ام

$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$: تعداد مثلثهای سفید در شکل n ام - تعداد کل مثلثهای کوچک = تعداد مثلثهای کوچک رنگی

$10 = 55 - 45 = \left| \frac{11 \times 10}{2} - \frac{10 \times 9}{2} \right|$: اختلاف تعداد مثلثهای رنگی و سفید کوچک در شکل دهم

نکته الگوی غیرخطی $1, 3, 6, 10, 15, \dots$ همان الگوی مثلثی است و جمله عمومی آن برابر است با $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

تست اعداد طبیعی را به صورت $\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \dots$ دسته بندی کرده ایم. بزرگ ترین عضو دسته بیستم کدام است؟

(۴) ۲۱۲

(۳) ۲۱۱

(۲) ۲۱۰

(۱) ۲۰۹

پاسخ - گزینه «۲» **روش اول:** تعداد اعداد طبیعی نوشته شده تا انتهای دسته بیستم برابر است با: $1+2+3+\dots+20 = \frac{20 \times 21}{2} = 210$

پس آخرین عضو دسته بیستم برابر ۲۱۰ است.

روش دوم: عدد بزرگ تر هر دسته $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ است که اصطلاحاً آن را دنباله مثلثی می گوئیم.

دنباله های حسابی و هندسی

دنباله: هر تعداد عدد که پشت سر هم قرار گیرند را دنباله می نامیم. جمله n ام دنباله را با a_n یا t_n نمایش می دهیم و به آن جمله عمومی دنباله می گوئیم. در واقع t_n ضابطه تابعی بر حسب عدد طبیعی n است.

◀ **دنباله حسابی:** دنباله ای است که هر جمله آن (به جز جمله اول) از جمع جمله قبلی با یک عدد ثابت به نام قدرنسبت به دست می آید.

۱ جملات دنباله $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots$

۲ جمله عمومی $a_n = a_1 + (n-1)d$

۳ قدرنسبت $d = a_{n+1} - a_n$

همان طور که می بینید دنباله حسابی همان الگوی خطی است.

تست با اضافه کردن ۴ واحد به جملات اول و دوم یک دنباله حسابی، جملات اول و دوم دنباله حسابی جدید ساخته می شود. اختلاف جمله n ام

دو دنباله کدام است؟

(۴) ۶

(۳) ۲

(۲) ۸

(۱) ۴

پاسخ - گزینه «۱» فرض کنید جملات دنباله حسابی بدون اضافه کردن ۴ واحد به صورت زیر باشد:

$$a, a+d, \dots \Rightarrow a_n = a + (n-1)d$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{اضافه کردن ۴ واحد به جملات دنباله حسابی} \\ \rightarrow a+4, a+4+d, \dots \Rightarrow a_n = a+4+(n-1)d \end{array} \right\} \Rightarrow \text{اختلاف} = 4$$

نکته اگر a و b و c سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند، آن گاه b را واسطه حسابی a و c می نامیم. در این صورت: $b = \frac{a+c}{2}$.

تست مقادیر $a, 1+2a, 5-a$ به ترتیب جملات متوالی یک دنباله حسابی هستند. اگر a جمله نخست این دنباله باشد، جمله نهم آن کدام است؟

(سراسری ۱۴۰۳)

(۴) ۱۴/۷۵

(۳) ۱۱/۲۵

(۲) ۴/۲۵

(۱) ۲/۷۵

پاسخ - گزینه «۴» با در نظر گرفتن $1+2a$ به عنوان واسطه حسابی داریم:

$$1+2a = \frac{5-a+a}{2} \Rightarrow 1+2a = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4}, d = \frac{5}{2} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\text{جمله نهم} = a_1 + 8d = \frac{3}{4} + \frac{56}{4} = 14\frac{7}{5}$$

در حالت کلی اگر a_m, a_n, a_p سه جمله از دنباله حسابی باشند به طوری که $n = \frac{m+p}{2}$ آن گاه: $a_n = \frac{a_m + a_p}{2}$. به عنوان مثال $a_7 = \frac{a_3 + a_{11}}{2}$.





تست دنباله حسابی $-۴۹, a, b, c, -۶۵$ چند جمله منفی دارد؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۵ (۳) ۱۷ (۴) ۱۹

پاسخ گزینه «۳» قدرنسبت دنباله را d فرض کنید.

$$a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow -49 = -65 + 4d \Rightarrow d = 4 \quad a_n = a_1 + (n-1)d = -65 + 4(n-1) \Rightarrow a_n = 4n - 69$$

$$a_n < 0 \Rightarrow 4n - 69 < 0 \Rightarrow n < \frac{69}{4} \Rightarrow n \leq 17$$
 پس ۱۷ جمله منفی دارد.

تست در یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدرنسبت d ، تساوی $6a_7^2 = 5a_4a + 2a_4a$ برقرار است. نسبت جمله چهارم دنباله به d ، کدام می تواند باشد؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) ۴

پاسخ گزینه «۱» جای a_7 و a_4 به ترتیب $a+d$ و $a+3d$ می گذاریم؛ پس:

$$6(a+d)^2 = 5(a+3d)a + 2(a+3d)a \Rightarrow 2a^2 + ad - 6d^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2d \Rightarrow \frac{a_7}{d} = \frac{a+3d}{d} = \frac{-2d+3d}{d} = 1 \\ a = \frac{3}{2}d \end{cases}$$

◀ **دنباله هندسی:** دنباله ای است که هر جمله آن (به جز جمله اول) از حاصل ضرب جمله قبلی در یک عدد ثابت به نام قدرنسبت به دست می آید.

۱ جملات دنباله: $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots$ ۲ جمله عمومی: $a_n = a_1q^{n-1}$ ۳ قدرنسبت: $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

تست در یک دنباله هندسی، جمله سوم جذر جمله چهارم و جمله پنجم برابر ۲۷ است. جمله اول دنباله چه قدر از $\frac{1}{4}$ کم تر است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{6}$ (سراسری ۱۴۰۳)

پاسخ گزینه «۴» جملات سوم و چهارم دنباله را بر حسب جمله پنجم می نویسیم؛ یعنی: $a_5 = a_4q$ و $a_5 = a_3q^2$ ؛ پس $a_4 = \frac{27}{q}$ و $a_3 = \frac{27}{q^2}$. حال طبق گفته مسئله داریم:

$$a_3 = \sqrt{a_4} \Rightarrow \frac{27}{q^2} = \sqrt{\frac{27}{q}} \Rightarrow \left(\frac{27}{q^2}\right)^2 = \frac{27}{q} \Rightarrow q^3 = 27 \Rightarrow q = 3$$

$$a_5 = a_1q^4 \Rightarrow 27 = a_1(3)^4 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

پس:

تست اگر $x+1$ و $x-1$ و $2x+1$ و x به ترتیب جملات چهارم، پنجم، هفتم و هشتم یک دنباله هندسی باشند، حاصل ضرب مقادیر برای قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

پاسخ گزینه «۲»

$$q = \frac{a_8}{a_7} = \frac{a_5}{a_4} \Rightarrow \frac{x}{2x+1} = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}, q_1q_2 = \frac{1+\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}+1} \times \frac{1-\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}+1} \Rightarrow q_1q_2 = -1$$

تست در یک دنباله هندسی با جمله اول a ، تساوی $\frac{a_6}{a_7} + \frac{a_7}{a_8} = 2$ برقرار است. نسبت a^2 به جمله دوم کدام می تواند باشد؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$ (سراسری ۱۴۰۲)

پاسخ گزینه «۴»

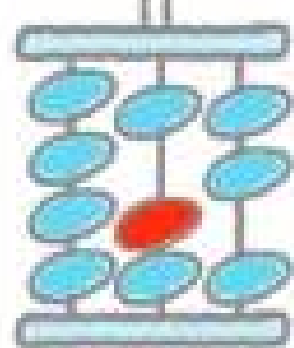
$$\frac{a_6}{a_7} + \frac{a_7}{a_8} = 2 \Rightarrow \frac{aq^5}{a^7q^7} + \frac{aq}{a^8q^8} = 2 \Rightarrow \left(\frac{q}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{a}\right) - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{q}{a} = 1 \\ \frac{q}{a} = -2 \end{cases}$$

$$\frac{a^2}{a_7} = \frac{a^2}{aq} = \frac{a}{q} = \frac{-1}{2} \text{ یا } 1$$

حال به سراغ خواسته مسئله می رویم:

نکته اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن گاه b را واسطه هندسی a و c می نامیم. در این صورت $b^2 = ac$.





تست - واسطه حسابی دو عدد مثبت از واسطه هندسی آنها، چهار واحد بیشتر است. اگر حاصل ضرب این دو عدد برابر ۳۶ باشد، اختلاف آنها چه قدر است؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۶ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

پاسخ - گزینه «۲» واسطه حسابی دو عدد b و a برابر $\frac{a+b}{2}$ و واسطه هندسی آنها برابر $\sqrt{ab}$ است؛ پس:

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} + 4 \xrightarrow{ab=36} \frac{a+b}{2} = 6+4 \Rightarrow a+b=20$$

چون $P = ab = 36$ و $S = a + b = 20$ ، پس a و b ریشه‌های معادله $x^2 - 20x + 36 = 0$ هستند؛ پس $a = 2$ و $b = 18$ است و در نتیجه $b - a = 16$ است.

نکته اگر جملات m ، n و p یک دنباله حسابی غیر ثابت، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه قدرنسبت دنباله هندسی برابر است با: $\frac{p-m}{m-n}$.

تست - جملات سوم، هفتم و نهم یک دنباله حسابی با قدرنسبت غیر صفر، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی اند. جمله چندم دنباله حسابی برابر صفر است؟

- (۱) یازدهم (۲) دوازدهم (۳) چهاردهم (۴) پانزدهم

پاسخ - گزینه «۱» راه اول: جملات دنباله حسابی را به صورت $a+2d$ ، $a+6d$ و $a+8d$ فرض کنید. باید $a+6d$ واسطه هندسی $a+2d$ و $a+8d$ باشد.

$$(a+6d)^2 = (a+2d)(a+8d) \Rightarrow a^2 + 12ad + 36d^2 = a^2 + 10ad + 16d^2 \Rightarrow 2ad + 20d^2 = 0 \xrightarrow{\div 2d} a + 10d = 0 \Rightarrow a_{11} = 0$$

راه دوم: با توجه به نکته بالا قدرنسبت دنباله هندسی برابر $q = \frac{9-7}{7-3} = \frac{1}{4}$ است.

$$a+2d, a+6d, a+10d \quad q = \frac{a+6d}{a+2d} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4a+12d = a+2d \Rightarrow a+10d = 0 \Rightarrow a_{11} = 0$$

تست - با ضرب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی به ترتیب در ۴، ۸ و ۱۶، یک دنباله حسابی به دست می‌آید. اگر مجموع مربعات سه جمله هندسی برابر مجموع جملات حسابی باشد، جمله اول دنباله هندسی کدام است؟

(سراسری ۱۴۰۱)

- (۱) $\frac{32}{7}$ (۲) $\frac{64}{7}$ (۳) $\frac{24}{5}$ (۴) $\frac{48}{5}$

پاسخ - گزینه «۲» جملات دنباله هندسی را به صورت aq^2 و aq و a در نظر می‌گیریم. طبق فرض ۱ مسئله خواهیم داشت:

$$4a, 8aq, 16aq^2 \xrightarrow{\text{واسطه حسابی}} 4a + 16aq^2 = 2(8aq) \Rightarrow 4q^2 - 4q + 1 = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{4}$$

$$a^2 + a^2q^2 + a^2q^4 = 4a + 8aq + 16aq^2 \Rightarrow a^2(1+16+4) = 12a \times 16$$

$$\Rightarrow 21a^2 = 16 \times 12a \Rightarrow \begin{cases} a = 0 & \text{غ ق ق} \\ a = \frac{12 \times 16}{21} = \frac{64}{7} \end{cases}$$

نکته در نوعی از دنباله‌های غیر خطی، جملات بر حسب جمله قبل یا جملات قبل تعریف می‌شوند؛ مثلاً $a_{n+1} = \frac{1}{a_n + 1}$ ، اگر $a_1 = 1$ باشد، چند جمله ابتدایی آن را می‌نویسیم:

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{1+1}, a_3 = \frac{1}{a_2+1} = \frac{2}{3}, \dots$$

به این دنباله‌ها، دنباله‌های بازگشتی گویند.

تست - اگر $a_1 = 1$ ، $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ، اختلاف جملات بیستم و یکم آن کدام است؟

- (۱) 2^{41} (۲) 2^{20} (۳) 2^{21} (۴) 2^{40}

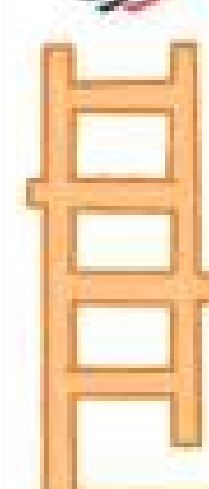
پاسخ - گزینه «۲» با نوشتن چند جمله ابتدایی دنباله داریم:

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 15, \dots$$

$$b_n = a_n + 1 \Rightarrow b_n = 2, 4, 8, 16, \dots$$

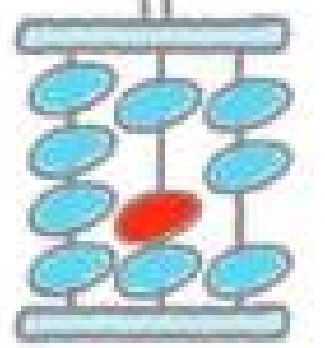
اگر به هر یک از جملات، یک واحد اضافه کنیم دنباله‌ای هندسی به دست می‌آید:

$$\text{پس } b_n = 2^n \text{ و داریم: } b_{20} = 2^{20} \text{ و } b_{21} = 2^{21} \text{؛ پس } a_{21} - a_{20} = (2^{21} - 1) - (2^{20} - 1) = 2^{20} \times (2 - 1) = 2^{20}$$



مجموعه‌ها





۱- اگر $A = \{\emptyset, \{2\}, \{\emptyset\}\}$ ، $B = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{2\}\}, \{1, 2\}\}$ و $C = \{\{\emptyset, \{2\}, \{\emptyset\}\}, \{1, 2\}\}$ باشد، کدام گزینه صحیح نیست؟

- (۱) $A \subseteq C$ (۲) $\{\emptyset\} \in B$ (۳) $A \in C$ (۴) $\{\emptyset\} \subseteq B$

۲- اگر $A = \{\emptyset, \{2\}, \{\emptyset, \{2\}\}$ و $B = \{\emptyset, \{2\}, \{\emptyset, \{2\}\}, \{2\}\}$ ، تعداد اعضای $A - B$ از تعداد اعضای $B - A$ چندتا کم تر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۳- اگر $A = \{m + 2^n : m, n \in \mathbb{N}, n + m \times 2^m \leq 10\}$ ، آن گاه مجموعه A چندعضوی است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۴- اگر بازه $(2a - 6, 2a + 1)$ شامل عدد ۳ باشد، حدود a کدام است؟

- (۱) $-1 < a < 2$ (۲) $-1 < a < 3$ (۳) $-2 < a < 1$ (۴) $1 < a < 3$

۵- به ازای چند مقدار طبیعی n ، عدد $\frac{3}{n}$ عضو بازه $(\frac{1}{n+6}, \frac{1}{n+1})$ خواهد بود؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۶- اگر n عدد طبیعی باشد، آن گاه اشتراک دو مجموعه $A = [-\frac{14}{n}, \frac{5}{n})$ و $B = [-\frac{5}{n}, \frac{7}{n}]$ کدام مجموعه است؟

- (۱) $[-\frac{5}{n}, \frac{5}{n})$ (۲) $[-\frac{14}{n}, \frac{7}{n}]$ (۳) $[-\frac{14}{n}, \frac{5}{n})$ (۴) $[-\frac{5}{n}, \frac{7}{n})$

۷- اجتماع دو بازه $B = [a + 2, 6)$ و $A = (-1, 3)$ یک بازه باز است. حدود a کدام است؟

- (۱) $-3 < a \leq 1$ (۲) $-3 \leq a \leq 1$ (۳) $-1 < a \leq 3$ (۴) $-1 < a < 1$

۸- اگر مجموعه مرجع نامتناهی باشد، کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) اگر A متناهی باشد، آن گاه A' نامتناهی است. (۲) اگر $A \subseteq B$ و A متناهی باشد، آن گاه B متناهی است.
(۳) اگر $A \cap B$ متناهی باشد، هر دو مجموعه A و B متناهی هستند. (۴) اگر $A - B$ متناهی باشد، آن گاه B متناهی است.

۹- اگر مجموعه مرجع نامتناهی باشد، کدام گزینه همواره صحیح است؟

- (۱) اگر A متناهی باشد، $A' \cap B$ نامتناهی است. (۲) اگر A متناهی باشد، $A' \cup B$ نامتناهی است.
(۳) اگر A نامتناهی باشد، $A' \cup B$ نامتناهی است. (۴) اگر A نامتناهی باشد، $A' \cap B$ متناهی است.

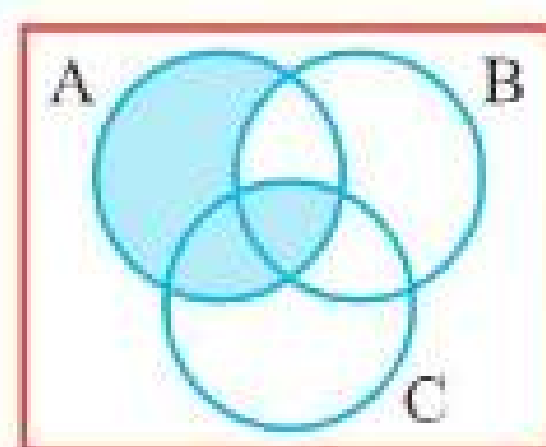
۱۰- اگر $A \cup B$ نامتناهی و $A \cup B'$ متناهی باشد، کدام مجموعه متناهی است؟

- (۱) $B \cup A'$ (۲) $A - B$ (۳) $A' \cup B'$ (۴) $B - A$

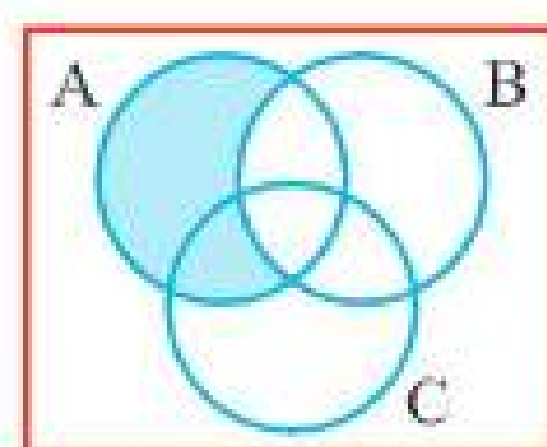
۱۱- اگر $A \subseteq B$ و B نامتناهی باشد، کدام مجموعه حتماً نامتناهی است؟

- (۱) $B - A$ (۲) $A - B$ (۳) $(A - B)'$ (۴) $(B - A)'$

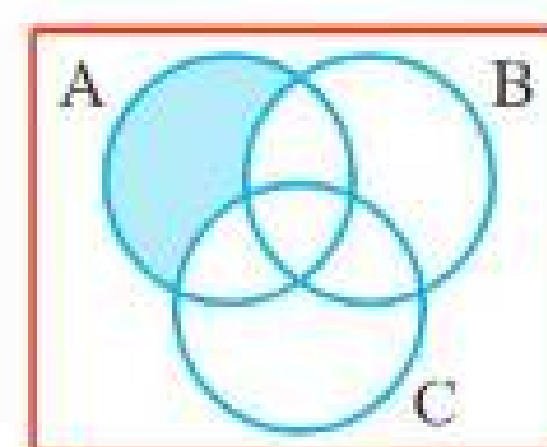
۱۲- در کدام شکل $A - (B - C)$ سایه زده شده است؟



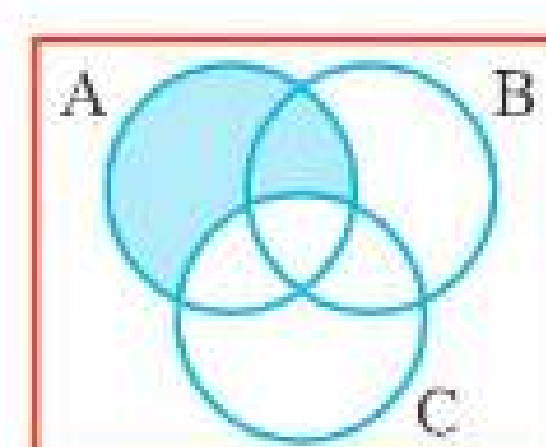
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

۱۳- کدام رابطه صحیح است؟

- (۱) $A - B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$ (۲) $A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B'$
(۳) $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$ (۴) $A - B = B - A \Rightarrow A \cap B = \emptyset$

۱۴- اگر $A \subseteq B$ باشد، آن گاه:

- (۱) $A' \cap B' = A'$ (۲) $A' \cup B = A$ (۳) $B' \cup A' = A'$ (۴) $A \cap (A \cup B) = \emptyset$

۱۵- اگر A غیر تهی و $A \subseteq B$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $A \cap (A \cup B)' = \emptyset$ (۲) $(A \cap B)' \cup A = U$ (۳) $(A - B) \cup (B - A') = A$ (۴) $(A \cup B) - (A \cap B) = B$

۱۶- اگر $A \subseteq B'$ باشد، حاصل $A \cup (A - B)'$ کدام است؟

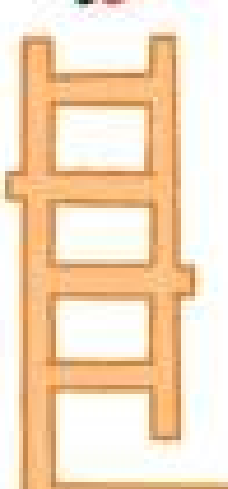
- (۱) B' (۲) $A \cup B$ (۳) A (۴) U

۱۷- اگر $A - B = \emptyset$ باشد، متمم $(A \cup B)' \cup (B \cap A)'$ کدام است؟

- (۱) B (۲) U (۳) A (۴) $\emptyset$

۱۸- اگر $A - B = A$ باشد، آن گاه حاصل $(A \cup B)' - (A \cap B)'$ کدام است؟

- (۱) $\emptyset$ (۲) B (۳) $A' - B'$ (۴) A'





۱۹- اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، کدام دو مجموعه جدا از هم هستند؟

- (۱) $A - (A \cap B)$, A (۲) $(A - B)$, B
(۳) $(A - B) \cup (B - A)$, $A \cup B$ (۴) $(A \cup B) - (A \cap B)$, B

۲۰- هرگاه A و B دو مجموعه غیر تهی و جدا از هم باشند، کدام رابطه نادرست است؟

- (۱) $A - B' = \emptyset$ (۲) $A - B = B'$ (۳) $A' \cup B = A'$ (۴) $A \cap B' = A$
۲۱- اگر A , B و C سه مجموعه دلخواه باشند به طوری که رابطه $A - (B - C) = (A - B) - C$ برقرار باشد، کدام گزینه صحیح است؟
(۱) $A \subseteq C$ (۲) $A \cap C = \emptyset$ (۳) $B \cap C = \emptyset$ (۴) $C \subseteq A$

۲۲- اگر B و C دو مجموعه جدا از هم و $A \cap (C - B) \subseteq A \cap B$ باشد، کدام گزینه همواره صحیح نیست؟

- (۱) $C - B = C - A$ (۲) $B - A = B - C$ (۳) $C - (A \cap B) = C$ (۴) $C - (A \cup B) = C$
۲۳- در یک کلاس ۴۰ نفره، ۲۷ نفر به اشعار حافظ و ۲۳ نفر به اشعار مولانا علاقه دارند. اگر ۴ نفر به هیچ کدام علاقه‌مند نباشند، تعداد افرادی که فقط به اشعار مولانا علاقه‌مندند کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴) ۱۰

۲۴- هرگاه A و B دو مجموعه دلخواه باشند، کدام نادرست است؟

- (۱) $n(A - B) = n(A \cup B) - n(B)$ (۲) $n(A \cap B) = n(A) - n(A - B)$
(۳) $n(A - B) + n(B - A) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$ (۴) $n(A) + n(B) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$

۲۵- اگر $n(A - B) + n(B - A) = ۲۷$ و $n(A \cup B) = ۴۱$ باشد، مقدار $n(A) + n(B)$ کدام است؟

- (۱) ۵۵ (۲) ۳۱ (۳) ۱۴ (۴) ۴۷

۲۶- اگر A و B دو مجموعه با مجموعه مرجع U باشند به طوری که $n(A - B) = ۱۲$ ، $n(B - A) = ۴۲$ و $n(B) = ۳n(A)$ ، مقدار $n(A \cup B)$ کدام است؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۵۴ (۳) ۵۶ (۴) ۵۷

۲۷- در یک باشگاه ورزشی با ۶۰ ورزشکار دو رشته فوتبال و هندبال برگزار می‌شود. تعداد افرادی که فقط یک رشته را بازی می‌کنند نصف کل افراد است و تعداد کسانی که هندبال بازی می‌کنند ۸ / ۰ تعداد افرادی است که فوتبال بازی می‌کنند. چه تعدادی فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۱۵ (۳) ۳۰ (۴) ۲۰

۲۸- از ۴۰ نفری که امروز صبح روزنامه A یا B را خریده‌اند، تعداد کسانی که فقط روزنامه A را خریداری کرده‌اند، نصف تعداد کسانی است که فقط روزنامه B را خریده‌اند و تعداد کسانی که روزنامه B را خریده‌اند، سه برابر افرادی است که فقط روزنامه A را خریده‌اند. چند نفر روزنامه A را خریده‌اند؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۲۰ (۳) ۱۰ (۴) ۲۵

۲۹- در یک بیمارستان تعداد افرادی که فقط به بخش آزمایشگاه مراجعه کرده‌اند ۴ برابر تعداد کسانی است که به بخش رادیولوژی مراجعه کرده‌اند و این تعداد شش برابر تعداد کسانی است که به هر ۲ بخش مراجعه کرده‌اند. امروز ۱۳۵ نفر به این ۲ بخش مراجعه کرده‌اند. چه تعدادی از آن‌ها به آزمایشگاه مراجعه کرده‌اند؟

- (۱) ۱۰۹ (۲) ۱۱۲ (۳) ۱۲۱ (۴) ۱۲۶

۳۰- در یک فروشگاه با سه محصول پیراهن، شلوار و کفش تعداد کسانی که فقط یک کالا خرید کرده‌اند ۴ برابر تعداد افرادی است که فقط دو کالا خرید کرده‌اند و ۲ برابر تعداد کسانی است که هر سه محصول را خریده‌اند. اگر ۱۶ نفر هیچ خریدی نداشته باشند و تعداد کل افراد ۱۰۰ نفر باشد، چند نفر لااقل دو کالا خریده‌اند؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۴۸ (۴) ۶۰

۳۱- هرگاه A مجموعه ۶ عضوی و $(A \cup B) - (A \cap B)$ مجموعه‌ای ۹ عضوی باشد، حداکثر و حداقل اعضای B کدام است؟

- (۱) ۶ و ۹ (۲) ۱۵ و ۶ (۳) ۱۵ و ۳ (۴) ۹ و ۳

۳۲- اگر A زیرمجموعه ۳۰ عضوی و $A' \cap B'$ زیرمجموعه ۳۲ عضوی از یک مجموعه مرجع ۱۰۰ عضوی باشند، تعداد اعضای مجموعه $B \cap A'$ کدام است؟

- (۱) ۳۴ (۲) ۳۶ (۳) ۳۸ (۴) ۴۰

۳۳- اجتماع دو مجموعه A و B دارای ۳۶ عضو است. مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ به ترتیب ۹ و ۱۲ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه‌های A و B ، ۶ عضو برداشته شود، از مجموعه اشتراک آن‌ها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه جدید کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۶ (۳) ۲۸ (۴) ۳۰

۳۴- مجموعه A دارای ۴۵ عضو است. از هر دو مجموعه A و B ، ۸ عضو خارج می‌کنیم به طوری که تعداد اعضای $A - B$ و $B - A$ برابر ۲۴ و ۱۲ می‌باشد. حداقل تعداد اعضای اولیه $A \cup B$ کدام است؟

- (۱) ۵۳ (۲) ۵۷ (۳) ۶۱ (۴) ۶۵

۳۵- فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از مجموعه مرجع $M = \{1, 2, 3, \dots, 40\}$ باشند به طوری که $n(A' \cap B') = n(A) - n(B) = ۱۴$ است. حداقل تعداد اعضای A کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۴

الگو و دنیا





۳۶- دو دنباله خطی $a_n = 5n + 1$ و $b_m = 4m + 2$ مفروض‌اند. جمله یازدهم دنباله b_m با جمله چندم دنباله a_n برابر است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۳۷- در یک الگوی خطی جمله پنجم برابر ۴۴- و جمله یازدهم برابر ۲۶- است. چه تعداد از جملات این الگو منفی است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴) ۲۱

۳۸- در یک الگوی خطی مجموع چهار جمله ابتدایی آن ۱۰ و مجموع چهار جمله بعدی آن ۵۸ است. چهلمین جمله دنباله کدام عدد است؟

- (۱) ۱۰۷ (۲) ۱۱۰ (۳) ۱۱۳ (۴) ۱۱۵

۳۹- فرض کنید a_n یک الگوی خطی و $b_n = na_n$ باشد به طوری که $b_7 = a_{18}$ و $b_7 = 33$ است. حاصل جذر عدد $b_6 - a_6$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴) ۱۲

۴۰- در دنباله درجه دوم $7, 13, 21, 31, \dots$ اختلاف جملات نوزدهم و بیستم کدام است؟

- (۱) ۳۸ (۲) ۳۹ (۳) ۴۲ (۴) ۴۳

۴۱- دنباله a_n یک الگوی خطی است به طوری که $b_n = 2n^2 - a_n$. اگر $a_7 = 0$ و $b_6 = a_7$ مقدار b_5 کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) -۲۸ (۳) ۱۸ (۴) -۲۲

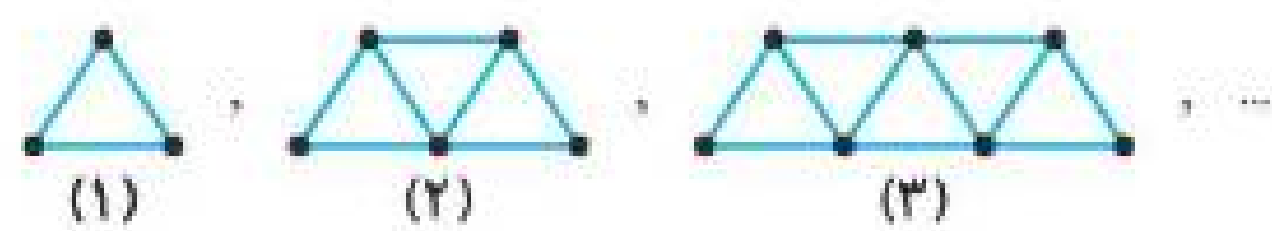
۴۲- در الگوی درجه دوم t_n با جملات مثبت، اگر $t_7 = 7$ و اختلاف جمله n ام و $(n+1)$ ام آن از ضابطه $4n+1$ به دست آید. جمله یازدهم آن کدام است؟

- (۱) ۲۴۲ (۲) ۲۳۲ (۳) ۲۵۴ (۴) ۲۴۴

۴۳- a_n یک دنباله خطی با جملات مثبت است به طوری که $a_n a_{n+1} = 9n^2 + 21n + 10$. جمله ششم دنباله a_n کدام است؟

- (۱) ۴۰۰ (۲) ۴۴۱ (۳) ۳۲۴ (۴) ۴۸۴

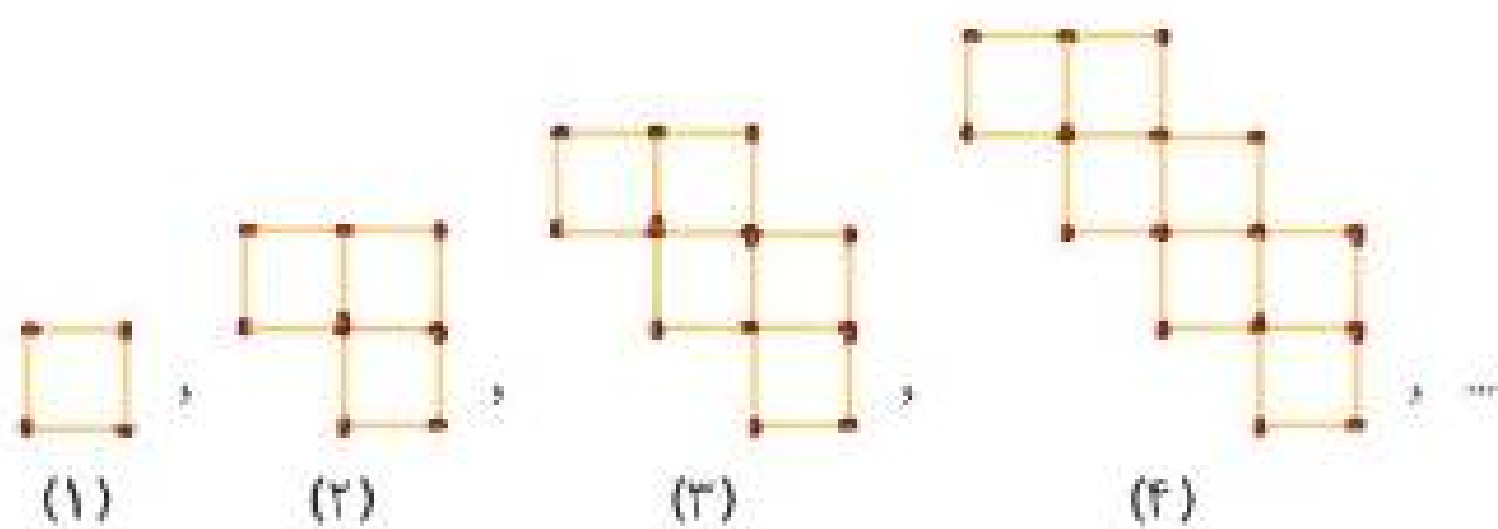
۴۴- با توجه به الگوی زیر اگر در مرحله n ام تعداد مثلث‌ها برابر ۴۷ باشد، تعداد نقاط توپر در این مرحله کدام است؟



- (۱) ۴۷ (۲) ۴۹ (۳) ۵۱ (۴) ۵۳

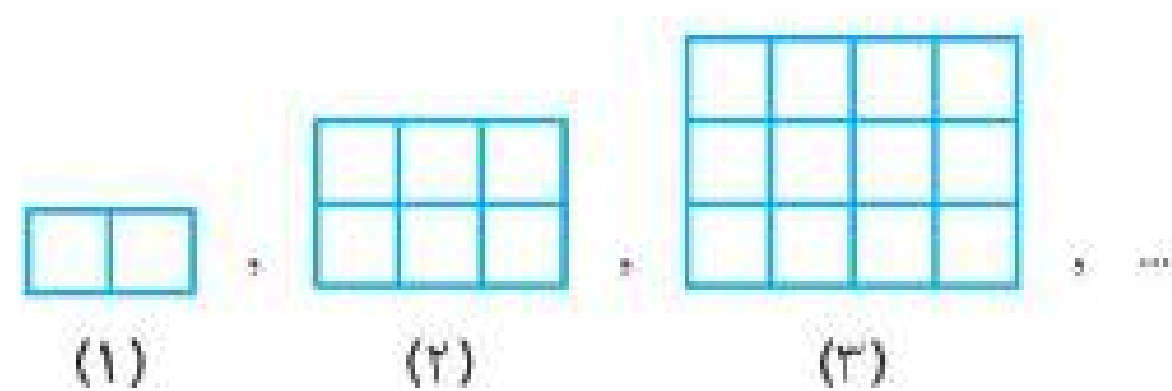
۴۵- به کمک چوب کبریت‌هایی به طول واحد به الگوی مقابل رسیده‌ایم. تعداد چوب کبریت

در شکل بیستم کدام است؟



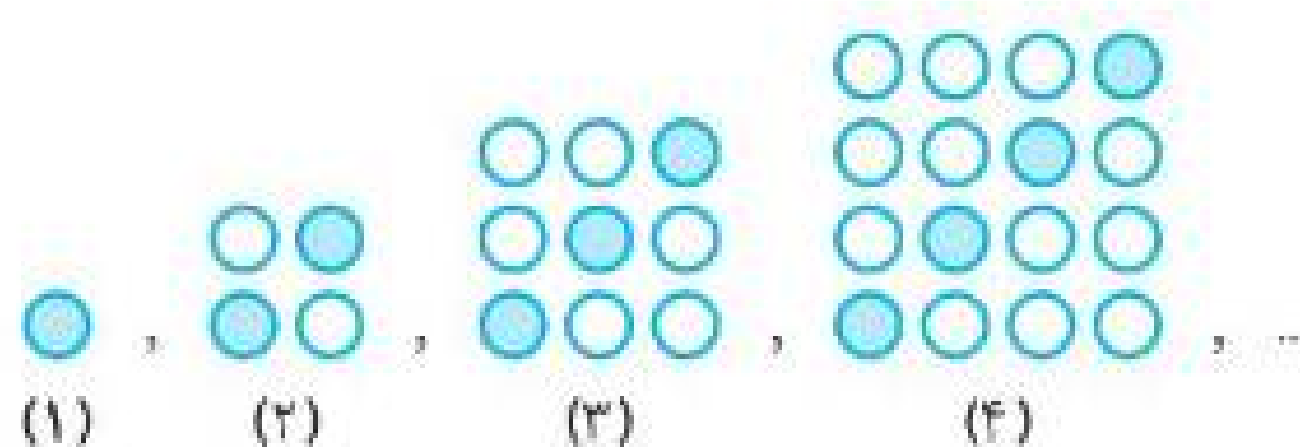
- (۱) ۱۱۲ (۲) ۱۱۶ (۳) ۱۱۸ (۴) ۱۲۰

۴۶- در الگوی مقابل، در کدام مرحله، تعداد مربع‌های واحد از شماره مرحله ۱۰۰ تا بیشتر است؟



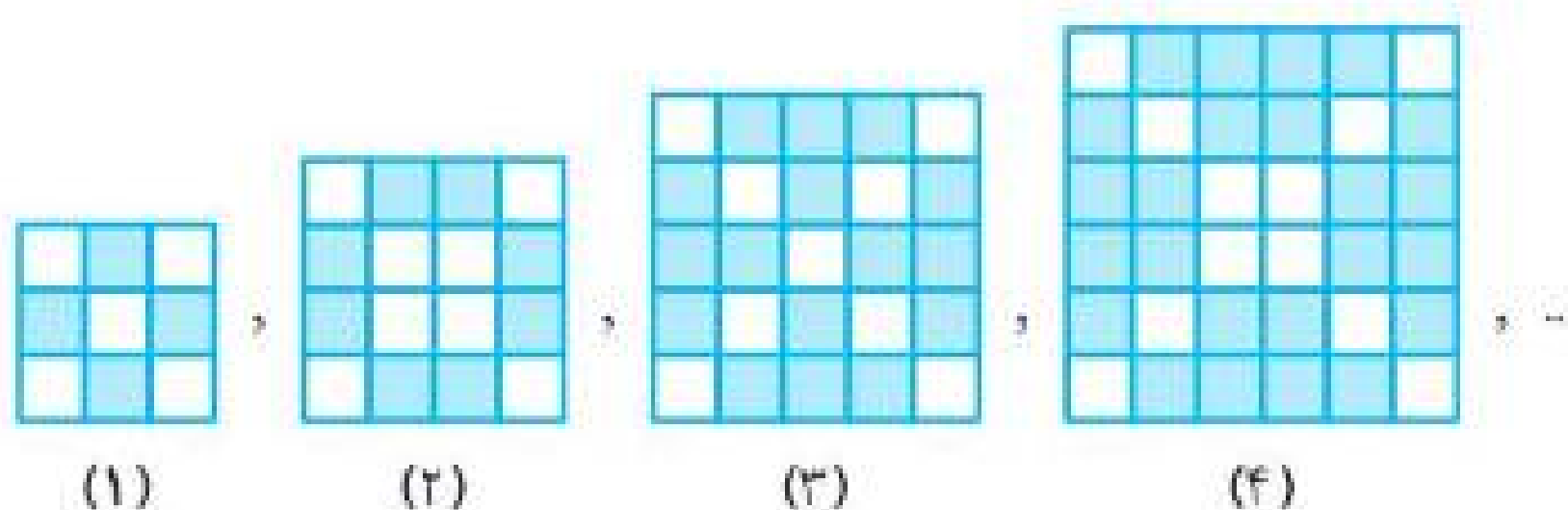
- (۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴) ۲۵

۴۷- در الگوی مقابل در شکل نودم نسبت دایره‌های سفید به رنگی کدام است؟



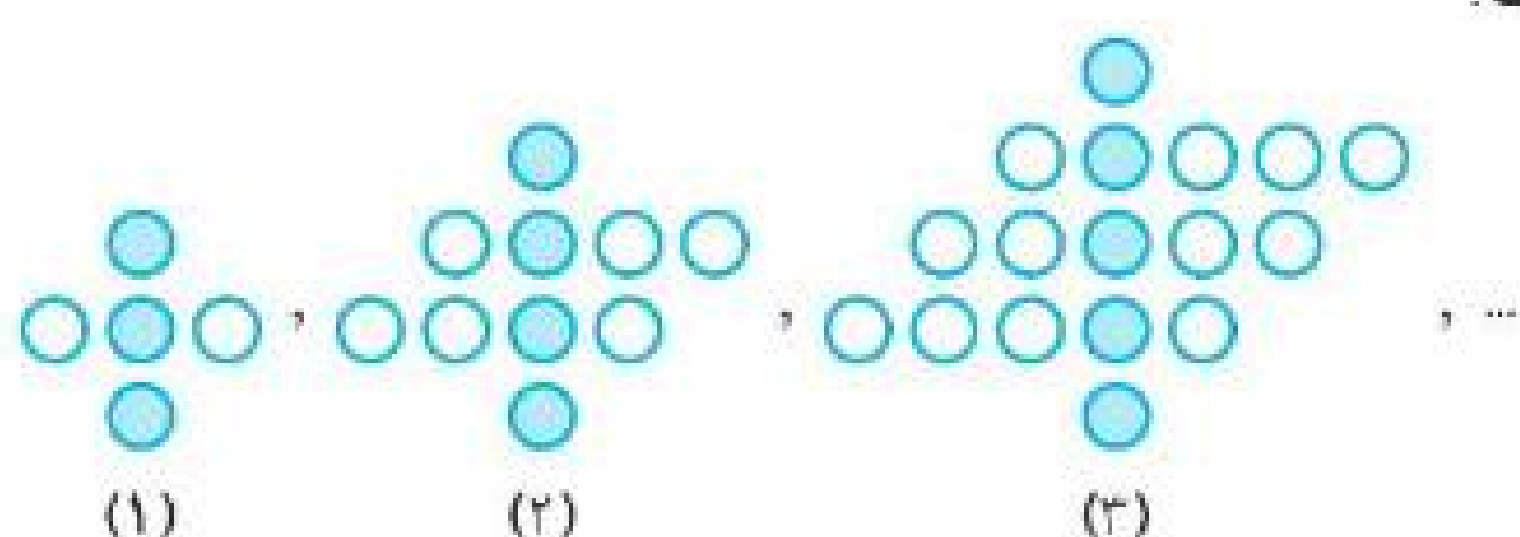
- (۱) ۸۹ (۲) ۹۰ (۳) ۹۱ (۴) ۹۲

۴۸- با توجه به الگوی مقابل در شکل هشتم چه نسبتی از مربع‌های کوچک، رنگی است؟

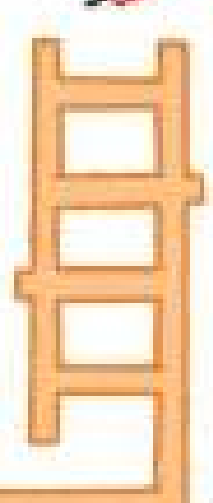


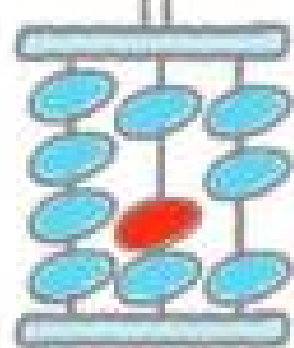
- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۴۹- در الگوی شکل زیر، وقتی تعداد نقاط توپر به ۱۵ می‌رسد، تعداد نقاط توخالی کدام است؟



- (۱) ۱۱۰ (۲) ۱۳۲ (۳) ۱۵۶ (۴) ۱۸۲





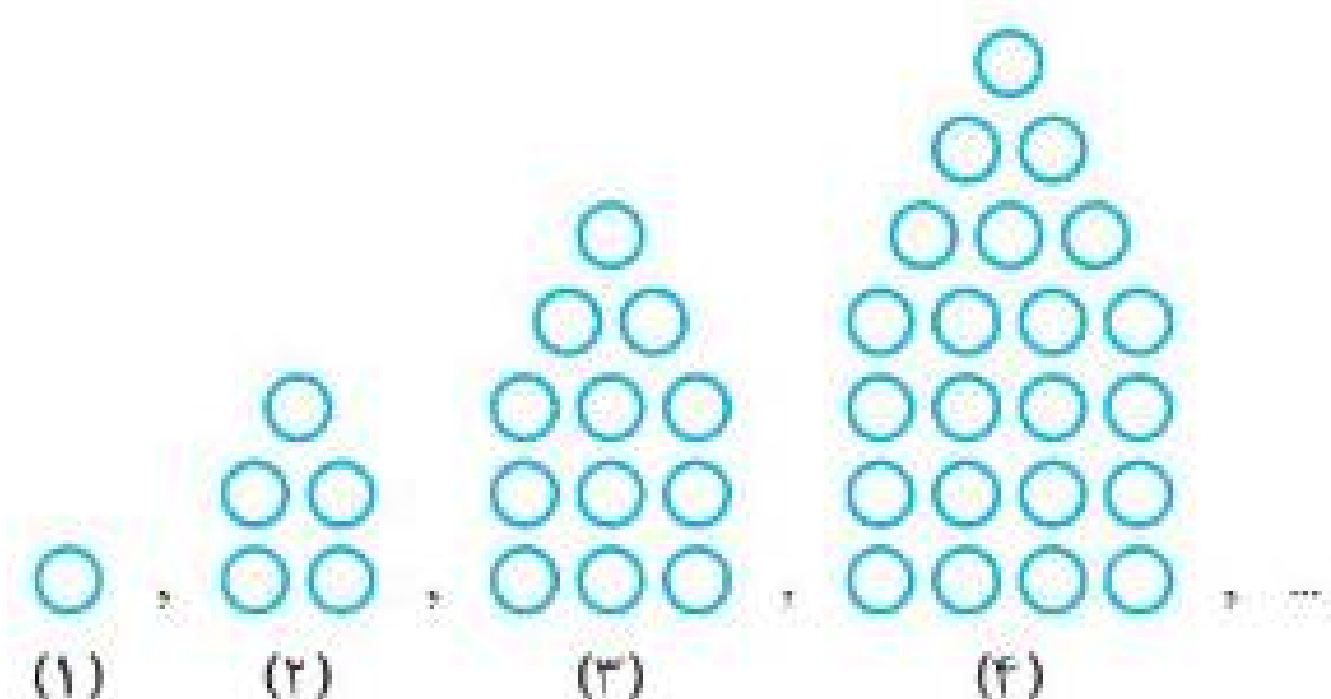
۵۰- با توجه به الگوی مقابل، نسبت گوی‌های شکل دوازدهم به شکل هفتم کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$

(۲) $\frac{12}{7}$

(۳) ۲

(۴) ۳



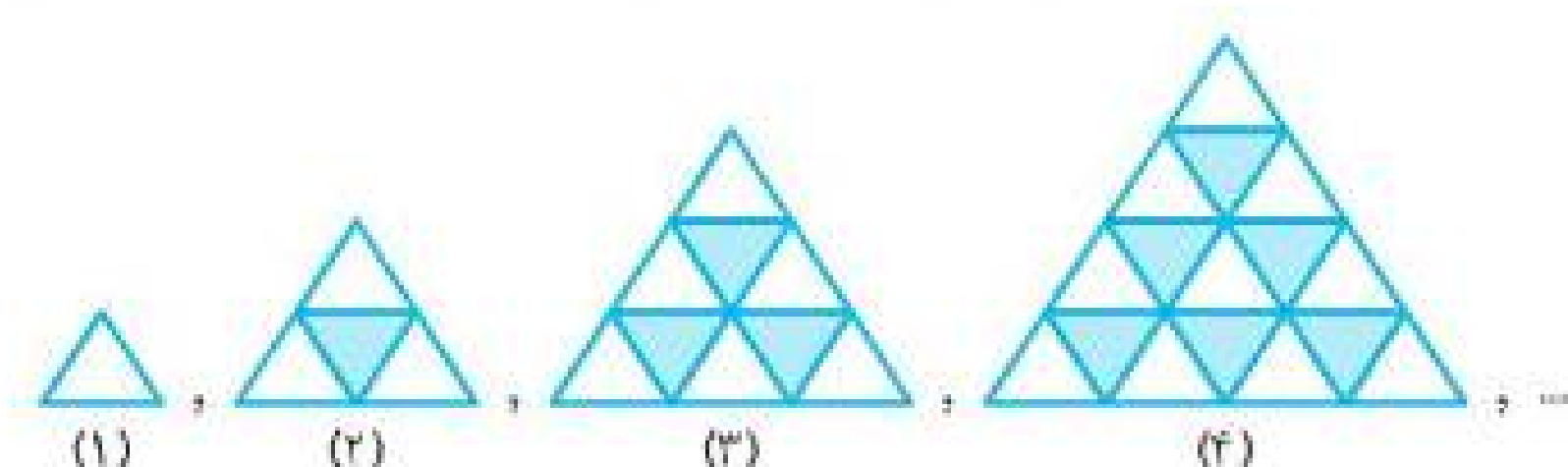
۵۱- در الگوی شکل مقابل، نسبت مثلث‌های رنگی به سفید در شکل n ام برابر $\frac{95}{n}$ است. n کدام است؟

(۱) ۳۹

(۲) ۴۰

(۳) ۹۹

(۴) ۱۰۰



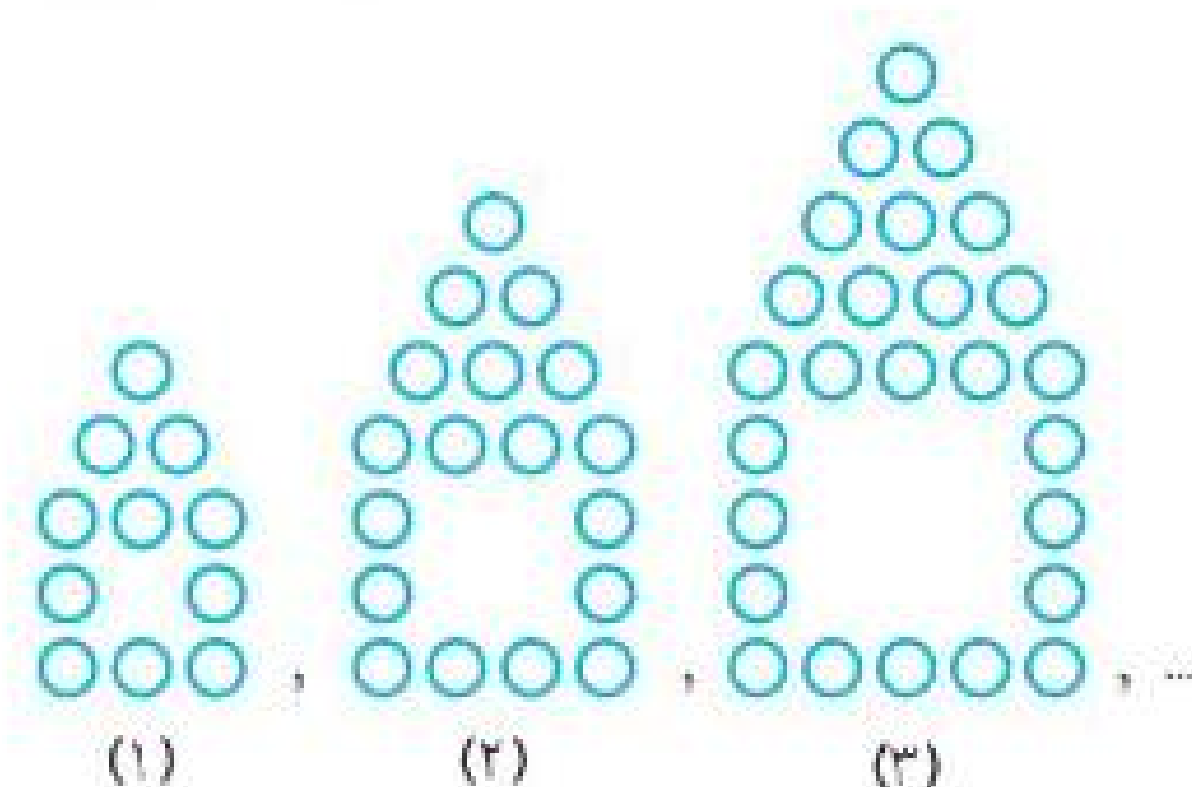
۵۲- در الگوی شکل مقابل، تعداد دایره‌ها در مرحله دهم چه قدر است؟

(۱) ۹۹

(۲) ۱۰۰

(۳) ۱۰۹

(۴) ۱۱۰



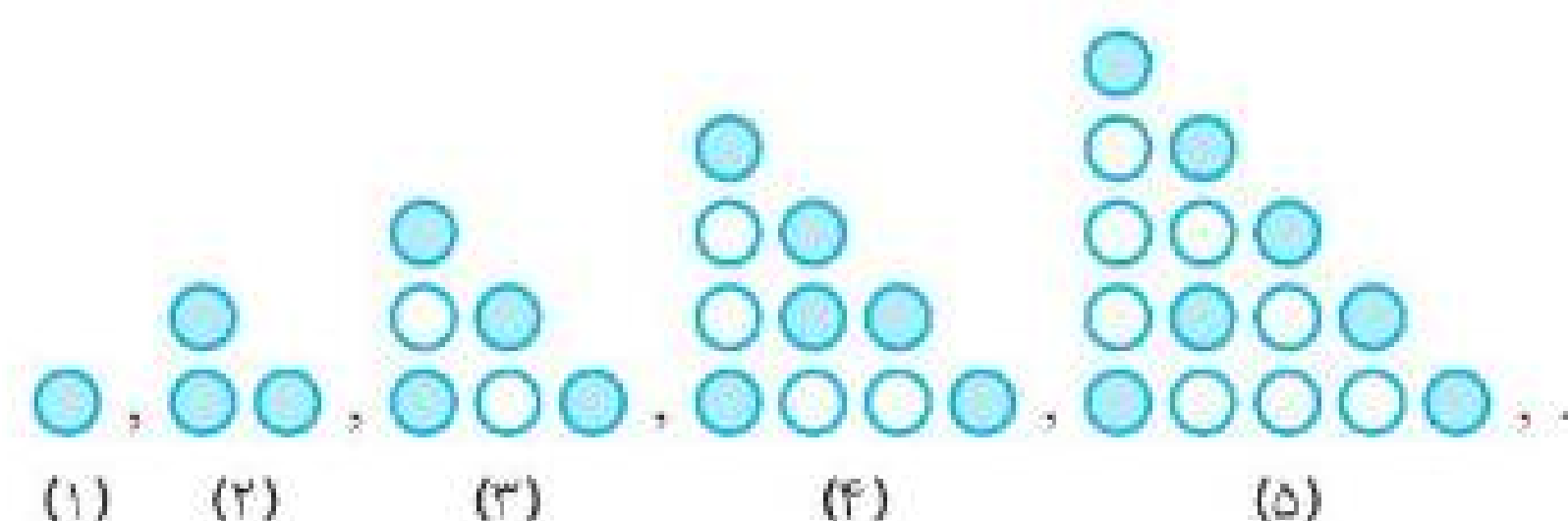
۵۳- با توجه به الگوی مقابل، اختلاف نقاط توپر در شکل بیست و پنجم و شکل بیستم کدام است؟

(۱) ۹

(۲) ۱۳

(۳) ۱۱

(۴) ۷



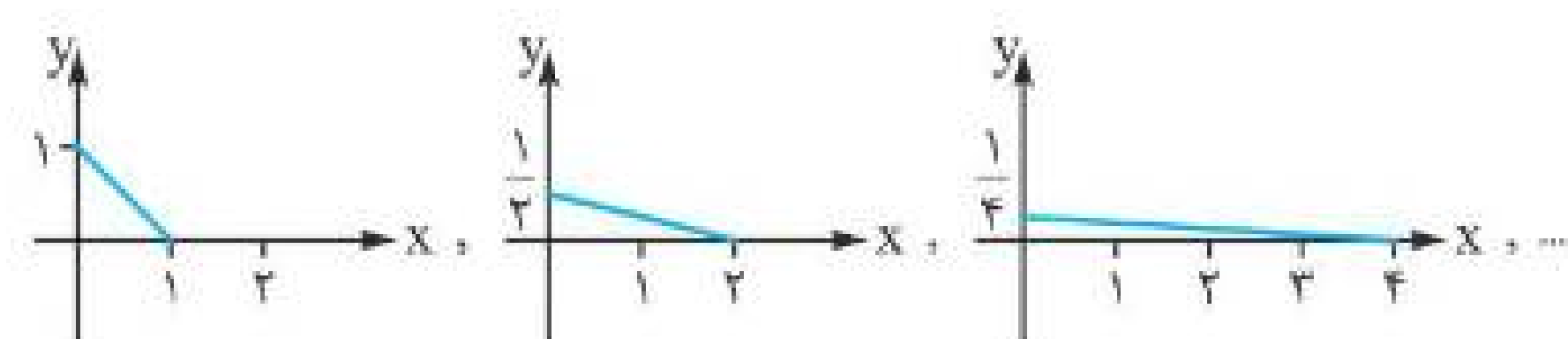
۵۴- در الگوی شکل زیر، اختلاف شیب پاره‌خط مرحله پنجم با پاره‌خط مرحله دهم چند برابر 2^{-18} است؟

(۱) ۵۱۲

(۲) ۵۱۱

(۳) ۱۰۲۴

(۴) ۱۰۲۳



۵۵- در یک دنباله با جمله عمومی $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$ مجموع ۹۹ جمله اول کدام است؟

(۱) ۹

(۲) ۱۰

(۳) ۱۱

(۴) ۱۲

۵۶- مجموع بیست جمله اول یک دنباله، با جمله عمومی $a_n = \frac{1}{4n^2 - 1}$ کدام است؟

(۱) $\frac{38}{39}$

(۲) $\frac{19}{39}$

(۳) $\frac{40}{41}$

(۴) $\frac{20}{41}$

۵۷- در دنباله‌ای با جمله عمومی a_n که $a_1 = 1$ و $a_n a_{n+1} = 4$ ، حاصل جمع یازده جمله اول کدام است؟

(۱) ۲۵

(۲) ۲۶

(۳) ۳۰

(۴) ۳۱

۵۸- در یک دنباله با جمله عمومی $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ، اگر $a_1 = 1$ باشد، اختلاف جملات نوزدهم و بیستم کدام است؟

(۱) 2^{18}

(۲) 2^{19}

(۳) 2^{20}

(۴) 2^{21}

۵۹- در یک دنباله $a_1 = 2$ ، $a_4 = 65$ و $a_{n+1} = 4a_n + k$ است. جمله سوم این دنباله کدام است؟

(۱) ۱۶

(۲) ۱۷

(۳) ۱۸

(۴) ۱۹

۶۰- در دنباله بازگشتی $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ ، اگر $a_1 = 1$ و $a_4 = 2 - k$ باشد، جمله هجدهم کدام است؟

(۱) $-1 - \frac{1}{k}$

(۲) $1 - \frac{1}{k}$

(۳) $1 + \frac{1}{k}$

(۴) $\frac{1}{k} - 1$

۶۱- در یک دنباله با جمله عمومی $a_n = n - 3\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ مجموع بیست جمله اول چه قدر است؟

(۱) ۱۹

(۲) ۲۱

(۳) ۳۹

(۴) ۱۹۰

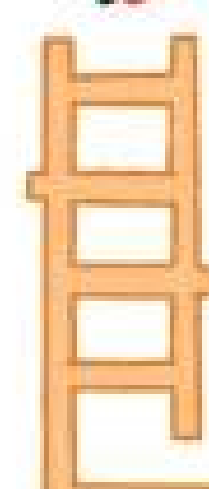
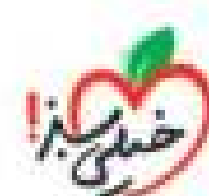
۶۲- در یک دنباله، $a_1 = 2$ و $a_n a_{n+1} = a_n - 1$ است. حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله چه قدر است؟

(۱) ۱

(۲) -۱

(۳) ۲

(۴) -۲



۶۳- در یک دنباله حسابی اگر جملات ششم و دهم به ترتیب ۴ و ۱۰ باشند، جمله شانزدهم کدام است؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۶ (۳) ۱۹ (۴) ۲۱

۶۴- در یک دنباله حسابی اگر $a_1 + a_2 + \dots + a_9 = 90$ ، حاصل $a_9 + a_{13}$ کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۲ (۳) ۱۸ (۴) ۲۳

۶۵- در یک دنباله حسابی $a_7 = 18$ و $a_{18} = 7$ چندمین جمله دنباله صفر است؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۲۵ (۳) ۱۴ (۴) ۲۶

۶۶- به ازای کدام عدد طبیعی n ، بین جملات دنباله حسابی غیر ثابت، رابطه $a_7 + a_n = 2a_{n-1}$ برقرار است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۶۷- در یک دنباله حسابی جمله بیست و هفتم، دو برابر جمله هجدهم است. جمله چندم این دنباله صفر است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۶۸- در یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۵، جمله نهم سه برابر جمله پنجم است. اولین جمله بزرگتر از ۱۰۰ در این دنباله کدام است؟

- (۱) ۱۰۵ (۲) ۱۱۵ (۳) ۱۱۲ (۴) ۱۲۵

۶۹- در یک دنباله حسابی اگر $a_7 + a_{11} = 28$ باشد، حاصل $a_7 + a_{15} + a_{19}$ کدام است؟

- (۱) ۳۷ (۲) ۴۰ (۳) ۴۲ (۴) ۴۳

۷۰- در یک دنباله حسابی اگر $a_1 = 4$ و $a_n - a_{n+3} = 6$ باشد، مقدار $\frac{a_{12}}{a_6}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $2/5$ (۳) ۳ (۴) $3/5$

۷۱- در دنباله درجه دوم $4, a, 18, b, 48, \dots$ واسطه حسابی اعداد $a + b$ و $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۳۱ (۲) ۲۹ (۳) ۳۲ (۴) ۳۳

۷۲- بین دو عدد ۱۸- و a ، هشت واسطه حسابی درج می کنیم. به ازای کدام مقدار a واسطه ششم درج شده برابر صفر است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۸

۷۳- در مثلث قائم الزویه اضلاع، تشکیل دنباله حسابی می دهند. اگر مساحت این مثلث ۹۶ باشد، وتر مثلث کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۲۰ (۳) ۳۶ (۴) ۸۰

۷۴- سه عدد تشکیل دنباله حسابی می دهند. به طوری که جمع آن ها برابر ۲۴ و حاصل ضرب آن ها $640 -$ است. اختلاف بزرگترین و کوچکترین عدد کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۲۸ (۴) ۳۲

۷۵- جملات a_n ، یک دنباله حسابی تشکیل می دهند اگر به قدرنسبت آن دو واحد اضافه کنیم و از جمله اول آن ۱۰ واحد کم کنیم و دنباله b_n را تشکیل دهیم. جملات بیستم این دو دنباله چه قدر اختلاف دارند؟

- (۱) ۴۲ (۲) ۲۸ (۳) ۳۸ (۴) ۳۶

۷۶- در یک دنباله حسابی بیست جمله ای، مجموع سه جمله اول برابر ۱۵ و مجموع سه جمله آخر برابر ۲۱۹ است. جمله سیزدهم کدام است؟

- (۱) ۴۷ (۲) ۴۹ (۳) ۵۱ (۴) ۵۳

۷۷- دو دنباله حسابی $a_n : 5, 11, 17, 23, \dots$ و $b_n : 3, 10, 17, 24, \dots$ مفروض اند. هشتمین جمله مشترک آن ها چندمین جمله b_n است؟

- (۱) ۴۴ (۲) ۴۵ (۳) ۴۶ (۴) ۴۷

۷۸- زوایای یک شش ضلعی بر حسب درجه، تشکیل یک دنباله حسابی می دهند. به طوری که بزرگترین زاویه پنج برابر کوچکترین زاویه است. بزرگترین زاویه این شش ضلعی چند درجه است؟

- (۱) ۱۸۵ (۲) ۱۹۰ (۳) ۱۹۵ (۴) ۲۰۰

۷۹- اعداد طبیعی و مضرب ۳ را به صورت $\{3\}, \{6, 9\}, \{12, 15, 18\}, \dots$ دسته بندی می کنیم. اولین عضو دسته شانزدهم کدام است؟

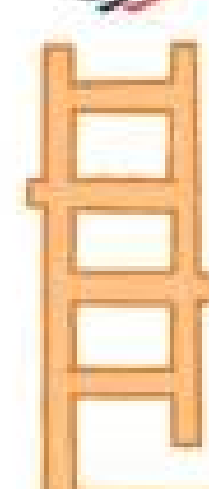
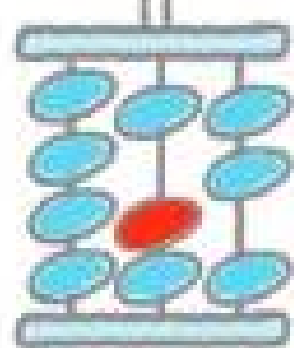
- (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۲۳ (۳) ۳۶۰ (۴) ۳۶۳

۸۰- در یک دنباله حسابی با جمله عمومی a_n ، روابط $a_{10} = -3$ و $a_{53}^2 - a_{51}^2 = a_{52}$ برقرار است. این دنباله چند جمله منفی دارد؟ ($a_{52} \neq 0$)

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۱ (۳) ۲۲ (۴) ۲۳

۸۱- در یک دنباله حسابی غیر ثابت با جمله عمومی a_n ، رابطه $2(a_r)^2 = a_r(a_r + 2a_r)$ برقرار است ($a_1 \neq 0$). قدرنسبت این دنباله، چه کسری از جمله ششم آن است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ یا $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ یا $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ یا $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{5}$ یا $\frac{1}{2}$



۸۲- جملات دنباله حسابی $a_n = 3n - 2$ را سه تا سه تا جمع می‌کنیم تا یک دنباله حسابی جدید تشکیل شود. جمله دهم دنباله جدید کدام است؟

- (۱) ۷۴۱ (۲) ۲۸۲ (۳) ۷۱۴ (۴) ۲۵۵

۸۳- جملات اول، دوم و ششم یک دنباله حسابی، به ترتیب سه جمله ابتدایی یک الگوی درجه دوم‌اند. جمله ششم الگوی درجه دوم، جمله چندم دنباله حسابی است؟

- (۱) ۱۸م (۲) ۲۴م (۳) ۳۶م (۴) ۴۸م

۸۴- برای دنباله حسابی $a_n = 4n - 1$ حاصل $A = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{19} a_{20}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{19}{79}$ (۲) $\frac{76}{79}$ (۳) $\frac{76}{237}$ (۴) $\frac{19}{237}$

۸۵- در یک دنباله حسابی جمع ۴ جمله ابتدایی x و جمع ۴ جمله بعدی ۸۶ است. جمع ۱۲ جمله ابتدایی آن کدام است؟

- (۱) ۲۴۸ (۲) ۲۵۸ (۳) ۲۶۰ (۴) ۲۸۰

◀ دنباله هندسی

۸۶- اعداد $6, a, a - \frac{2}{3}, \dots$ جملات ابتدایی یک دنباله هندسی با جملات مثبت است. جمله هفتم چند برابر جمله سوم است؟

- (۱) $\frac{1}{16}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{27}$ (۴) $\frac{1}{81}$

۸۷- اگر اعداد $-x - 6, x, x - 4, \dots$ جملات متوالی یک دنباله هندسی نزولی باشند، قدرنسبت کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) -۳

۸۸- دنباله هندسی $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ را در نظر بگیرید. جمله نهم دنباله $a_1 a_2, a_2 a_3, a_3 a_4, \dots$ کدام است؟

- (۱) 4×3^{14} (۲) 4×3^{15} (۳) 4×3^{16} (۴) 4×3^{17}

۸۹- در دنباله هندسی $t_n = 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ، مربع جمله دهم چند برابر جمله بیستم است؟

- (۱) ۴ (۲) ۱۶ (۳) ۳۲ (۴) ۱۰۲۴

۹۰- به جمله اول و قدرنسبت دنباله هندسی $t_n = 6(2)^{1-2n}$ به ترتیب ۱ و $\frac{1}{4}$ اضافه کرده و دنباله هندسی جدیدی می‌سازیم. جمله دهم دنباله جدید چند برابر $(\frac{5}{7})^4$ است؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۱- در دنباله هندسی a_n اگر $2a_n + 2a_{n+1} = 0$ برقرار باشد، مقدار $\frac{a_{11}}{a_8}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{16}$ (۲) $-\frac{9}{16}$ (۳) $\frac{27}{64}$ (۴) $-\frac{27}{64}$

۹۲- در یک دنباله هندسی با جمله عمومی a_n ، تساوی $\frac{a_1}{2a_4} + \frac{a_4}{a_7} = 2a_7$ برقرار است. مقدار مثبت ریشه سوم $\frac{a_5}{(a_7)^4}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

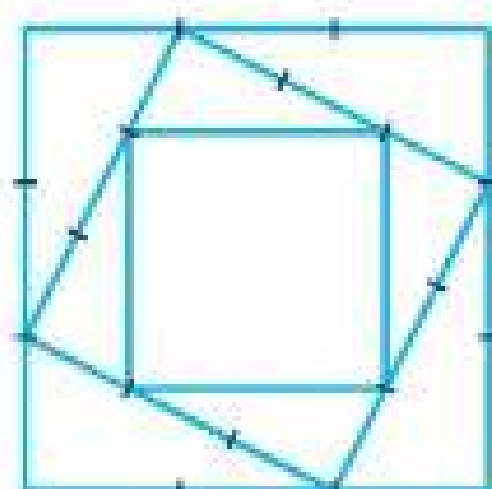
۹۳- در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، جمله سوم از جمله دوم ۶ واحد بیشتر و از دو برابر جمله اول ۲ واحد بیشتر است. جمله چهارم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۷ (۳) ۳۳ (۴) ۳۶

۹۴- چهار عدد مثبت تشکیل یک دنباله هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از یک می‌دهند، به طوری که اختلاف ۲ جمله کوچک‌تر ۴ و اختلاف ۲ جمله بزرگ‌تر ۹ است. اختلاف دو جمله وسطی کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) ۵

۹۵- هر ضلع مربعی به ضلع ۶ به ۳ قسمت مساوی تقسیم می‌شود و مطابق شکل مربع جدیدی ساخته می‌شود و مجدد این عمل تکرار می‌شود. مساحت هشتمین مربع کدام است؟



- (۱) $36 \times \left(\frac{4}{9}\right)^7$ (۲) $36 \times \left(\frac{5}{9}\right)^7$

- (۳) $36 \times \left(\frac{5}{9}\right)^2$ (۴) $36 \times \left(\frac{4}{9}\right)^2$



۹۶- واسطه هندسی دو عدد برابر ۱۲ و مجموع آن‌ها برابر ۳۰ است. اختلاف این دو عدد کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۲۲ (۴) ۲۴

۹۷- بین دو عدد ۴ و ۹۷۲، چهار واسطه هندسی درج کرده‌ایم. مجموع اولین و چهارمین واسطه درج‌شده چه قدر است؟

- (۱) ۳۳۰ (۲) ۳۳۲ (۳) ۳۳۴ (۴) ۳۳۶

۹۸- در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله اول برابر $\frac{13}{3}$ و مجموع سه جمله بعدی برابر ۱۱۷ است. جمله اول این دنباله کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۳

۹۹- در یک دنباله هندسی $\frac{a_6}{a_4} = 3$ ، مقدار $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{a_1 + a_2}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) ۴

سؤالات ترکیبی

۱۰۰- اگر $1, a, b, \dots$ یک دنباله حسابی و $1, a, -b, \dots$ یک دنباله هندسی با جملات مثبت باشد، آن‌گاه مقدار a کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2} - 1$ (۲) $\sqrt{2} + 1$ (۳) $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$

۱۰۱- هرگاه واسطه هندسی a و b عدد ۳ باشد، واسطه حسابی $\frac{1}{3-b}$ و $\frac{1}{3-a}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۱۰۲- جملات دوم، ششم و هشتم یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۴ سه جمله متوالی یک دنباله هندسی هستند. جمله اول دنباله حسابی کدام است؟

- (۱) -۳۲ (۲) -۳۴ (۳) -۳۶ (۴) -۴۰

۱۰۳- جملات چهارم، هفتم، بیست و هشتم و n ام یک دنباله حسابی غیر ثابت جملات متوالی دنباله هندسی هستند. عدد طبیعی n کدام است؟

- (۱) ۱۷۵ (۲) ۱۴۷ (۳) ۱۱۹ (۴) ۲۰۳

۱۰۴- 2^a ، 16 و 2^b سه جمله متوالی یک دنباله هندسی می‌باشند. اگر $3a$ ، b و ۱۱ تشکیل یک دنباله حسابی دهند، ab کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۰۵- اگر سه جمله ابتدایی یک دنباله حسابی را به ترتیب با ۲، ۵ و ۸ جمع کنیم، سه جمله ابتدایی یک دنباله هندسی به دست می‌آید. اگر مجموع

سه جمله اول دنباله حسابی، دو برابر مجموع سه جمله اول دنباله هندسی باشد، جمله اول دنباله حسابی کدام است؟

- (۱) -۷ (۲) -۶ (۳) -۴ (۴) -۳

۱۰۶- اگر $a_n = 2^{n-1}$ به طوری که $\{a_1\}, \{a_2, a_3\}, \{a_4, a_5, a_6\}, \dots$ جملات دنباله را تقسیم‌بندی کند، جمله وسط در دسته نهم کدام است؟

- (۱) 2^{42} (۲) 2^{41} (۳) 2^{40} (۴) 2^{39}

۱۰۷- تابع خطی f مفروض است. اگر α ، β و γ ، سه جمله متوالی دنباله هندسی و $f(\alpha)$ ، $f(\beta)$ و $f(\gamma)$ ، سه جمله متوالی دنباله حسابی باشند،

مجموع قدرنسبت‌های این دو دنباله کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) صفر

۱۰۸- بین دو عدد ۵۴ و ۱۶ دو واسطه هندسی قرار داده‌ایم. اختلاف دو واسطه، چندمین جمله دنباله هندسی $t_n = 3 \times 2^{8-n}$ است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۰۹- جملات اول و سوم دو دنباله حسابی و هندسی هر دو ۲ و ۸ است. جمله هفتم دنباله هندسی با جمله چندم دنباله حسابی برابر است؟

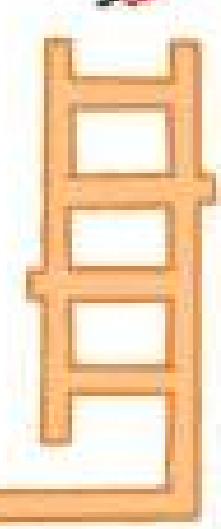
- (۱) ۳۸ (۲) ۴۰ (۳) ۴۳ (۴) ۶۴

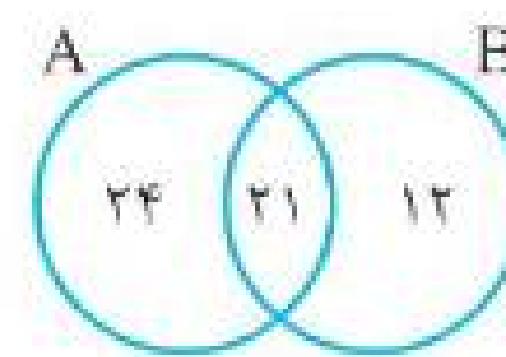
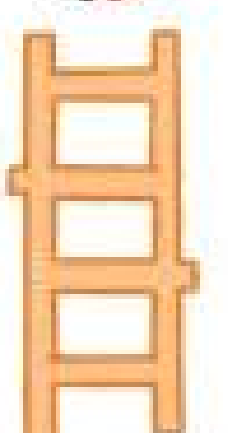
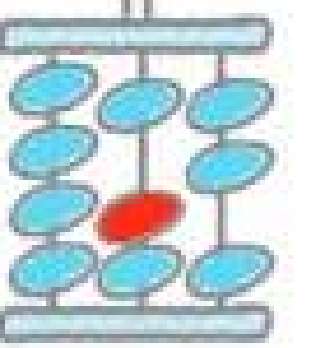
۱۱۰- جمله هفتم یک دنباله حسابی غیر ثابت برابر صفر است. واسطه هندسی جملات هشتم و شانزدهم آن برابر چندمین جمله دنباله می‌تواند باشد؟

- (۱) نهم (۲) دهم (۳) یازدهم (۴) دوازدهم

۱۱۱- در یک دنباله هندسی غیر ثابت با قدرنسبت q جمله دوم، چهارم و پنجم تشکیل دنباله حسابی می‌دهند. مقدار q^2 کدام می‌تواند باشد؟

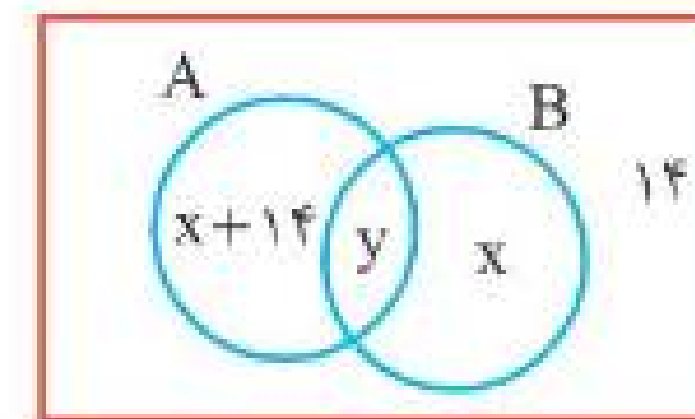
- (۱) $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{5} + 3}{4}$ (۳) $\frac{3 - \sqrt{5}}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{5} - 3}{2}$





برای رسیدن به حداقل تعداد اعضای $A \cup B$ در حالت قبل از حذف، فرض می‌کنیم ۸ عضو از بخش مشترک حذف شده‌اند و نمودار تعداد اعضا قبلاً به صورت روبه‌رو بوده:

و بنابراین $A \cup B$ در حالت اولیه $24 + 21 + 12 = 57$ عضو داشته است.



گزینه ۳ با توجه به مرجع ۴۰ عضوی $A \cup B$ باید $n(A' \cap B') = 14$ و شرط دارای $26 - 14 = 12$ عضو باشد و چون اختلاف $n(A)$ با $n(B)$ برابر ۱۴ است، نمودار ون روبه‌رو را داریم:

$n(A \cup B) = x + 14 + x + y = 26 \Rightarrow 2x + y = 12$
برای رسیدن به حداقل $n(A)$ ، باید $x + y + 14$ را مینیمم کنیم. به جای y می‌نویسیم $12 - 2x$ و داریم:

$$n(A) = x + y + 14 = x + (12 - 2x) + 14 = 26 - x$$

به جای y

در رابطه $2x + y = 12$ مقدار x از ۶ بیشتر نمی‌تواند باشد؛ پس حداقل $n(A)$ به ازای $x = 6$ می‌شود $26 - 6 = 20$.

گزینه ۲ جمله یازدهم دنباله b_m برابر $b_{11} = 4 \times 11 + 2 = 46$ است و اگر جمله n ام a_n را برابر ۴۶ قرار دهیم داریم:

$$\Delta n + 1 = 46 \Rightarrow \Delta n = 45 \xrightarrow{+5} n = 9$$

یعنی جمله نهم a_n با جمله یازدهم b_m برابر است.

گزینه ۲ الگوی خطی را به صورت $a_n = an + b$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\left. \begin{aligned} a_5 &= -44 = 5a + b \\ a_{11} &= -26 = 11a + b \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} 18 = 6a \Rightarrow a = 3$$

با جای گذاری $a = 3$ داریم: $b = -59$ و جمله عمومی الگو $a_n = -59 + 3n$ است. حالا از شرط $a_n < 0$ داریم:

$$-59 + 3n < 0 \Rightarrow 3n < 59 \xrightarrow{\div 3} n < \frac{59}{3} = 19 \frac{2}{3}$$

پس به ازای $n = 1, 2, \dots, 19$ مقدار a_n منفی است؛ یعنی نوزده جمله منفی دارد.

گزینه ۴ با در نظر گرفتن الگوی خطی به صورت $a_n = an + b$ داریم: جمع چهار جمله ابتدایی

$$= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a + b + 2a + b + 3a + b + 4a + b = 10a + 4b = 10$$

$$= a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = (5 + 6 + 7 + 8)a + 4b = 26a + 4b = 58$$

$$\begin{cases} 10a + 4b = 10 \\ 26a + 4b = 58 \end{cases} \text{ را داریم. اگر پایینی را منهای بالایی کنیم:}$$

$$16a = 48 \xrightarrow{\div 16} a = 3 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} 4b = 10 - 30 = -20 \xrightarrow{\div 4} b = -5$$

پس جمله عمومی $a_n = 3n - 5$ است و بنابراین:

$$a_{40} = 3 \times 40 - 5 = 115$$

گزینه ۲ a_n را به صورت $an + b$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$b_n = na_n$$

$$\text{الف) } b_4 = 4a_4 = a_{18} \Rightarrow 4(4a + b) = 18a + b \Rightarrow 3b = 2a$$

$$\text{ب) } b_7 = 7a_7 = 33 \xrightarrow{\div 7} a_7 = 11 \Rightarrow 7a + b = 11$$

$$\text{از حل دستگاه } \begin{cases} 3b = 2a \\ 7a + b = 11 \end{cases} \text{ داریم: } a = 3 \text{ و } b = 2$$

$$b_6 - a_6 = 6a_6 - a_6 = 5a_6 = 5(6a + b)$$

$$= 5(6 \times 3 + 2) = 5 \times 20 = 100$$

که جذر آن می‌شود: ۱۰.

گزینه ۳ راه اول: در دنباله درجه دوم افزایش جملات خطی است:

$$7, 13, 21, 31, \dots$$

$$\dots, 10, 8, 6: \text{افزایش}$$

n	۲	۳	۴
افزایش (b_n)	۶	۸	۱۰

پس افزایش جمله n ام نسبت به جمله قبلی، الگوی $2n + 2$ را دارد:

بنابراین اختلاف جمله نوزدهم و بیستم برابر است با:

$$b_{20} = 2 \times 20 + 2 = 42$$

راه دوم: جمله عمومی دنباله درجه دوم را پیدا کنیم:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a + b + c = 7 \\ a_2 &= 4a + 2b + c = 13 \\ a_3 &= 9a + 3b + c = 21 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{هر معادله منهای بالایی}} \begin{cases} 3a + b = 6 \\ 5a + b = 8 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} b = 3 \xrightarrow{\text{پایینی منهای بالایی}} 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در معادله اولیه}} c = 3$$

پس $a_n = n^2 + 3n + 3$ و داریم:

$$a_{20} - a_{19} = (20^2 - 19^2) + 3(20 - 19) + (3 - 3) = 39 + 3 = 42$$

گزینه ۴ با در نظر گرفتن $a_n = an + b$ داریم:

$$b_n = 2n^2 - an - b$$

حالا شرط‌های $a_4 = 0$ و $a_6 = 0$ را هم برحسب a و b می‌نویسیم:

$$\text{الف) } a_4 = 4a + b = 0 \Rightarrow b = -4a$$

$$\text{ب) } b_6 = 2 \times 6^2 - 6a - b = a_7 = 7a + b \Rightarrow 9a + 2b = 72$$

$$\text{از حل این دو معادله داریم: } a = 72 \text{ و } b = -288$$

پس $b_n = 2n^2 - 72n + 288$ و مقدار b_5 برابر است با:

$$b_5 = 2 \times 25 - 72 \times 5 + 288 = 50 - 360 + 288 = -22$$

گزینه ۲ در الگوی درجه دوم $t_n = an^2 + bn + c$ اختلاف جملات n ام و $(n+1)$ ام برابر است با:

$$t_{n+1} - t_n = a((n+1)^2 - n^2) + b((n+1) - n) + c - c$$

$$= a(2n+1) + b = (2a)n + a + b$$

سؤال گفته این اختلاف $4n + 1$ است؛ پس $a = 2$ و $b = -1$ و داریم:

$$t_n = 2n^2 - n + c \text{ که با شرط } t_7 = 7 \text{ مقدار } c \text{ را هم به دست می‌آوریم:}$$

$$t_7 = 8 - 2 + c = 7 \Rightarrow c = 1$$

پس: $t_n = 2n^2 - n + 1$ و مقدار t_{11} برابر است با:

$$2(11)^2 - 11 + 1 = 242 - 10 = 232$$

راه دوم: اختلاف جمله سوم و دوم، $4 \times 2 + 1 = 9$ است و اختلاف‌ها تا ۴ تا زیاد می‌شود:

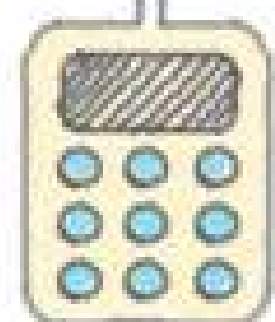
$$\begin{aligned} &+9 \quad +13 \quad +17 \quad +21 \quad +25 \quad +29 \quad +33 \quad +37 \quad +41 \\ &t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11} \end{aligned}$$

پس داریم:

$$t_{11} = t_2 + \underbrace{41+9}_{50} + \underbrace{13+37}_{50} + \underbrace{17+33}_{50} + \underbrace{21+29}_{50} + 25$$

$$= 7 + 200 + 25 = 232$$

اشاره دقت کردید جمع را چه‌طور به دست آوردیم؟



دقت می‌کنیم که دنباله مثلثی در شکل اول نبود و از جمله دوم (با یک شماره تأخیر) شروع شده، پس در شکل n ام تا $n-1$ می‌رود؛ بنابراین:

$$a_n = n^2 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n^2 + n^2 - n}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$$

$$\frac{a_{12}}{a_7} = \frac{3 \times 12^2 - 12}{3 \times 7^2 - 7} = \frac{12(36-1)}{7(21-1)} = \frac{12 \times 35}{7 \times 20} = 3$$

۵۱- **گزینه ۱ الف** تعداد مثلث‌های رنگی در ۴ مرحله اول به ترتیب ۰،

۱ و ۱+۲ و ۱+۲+۳ است پس در مرحله n ام به تعداد $\frac{n(n-1)}{2}$ مثلث رنگی داریم.

ب) تعداد مثلث‌های سفید در این مراحل به ترتیب ۱، ۱+۲+۳، ۱+۲+۳+۴

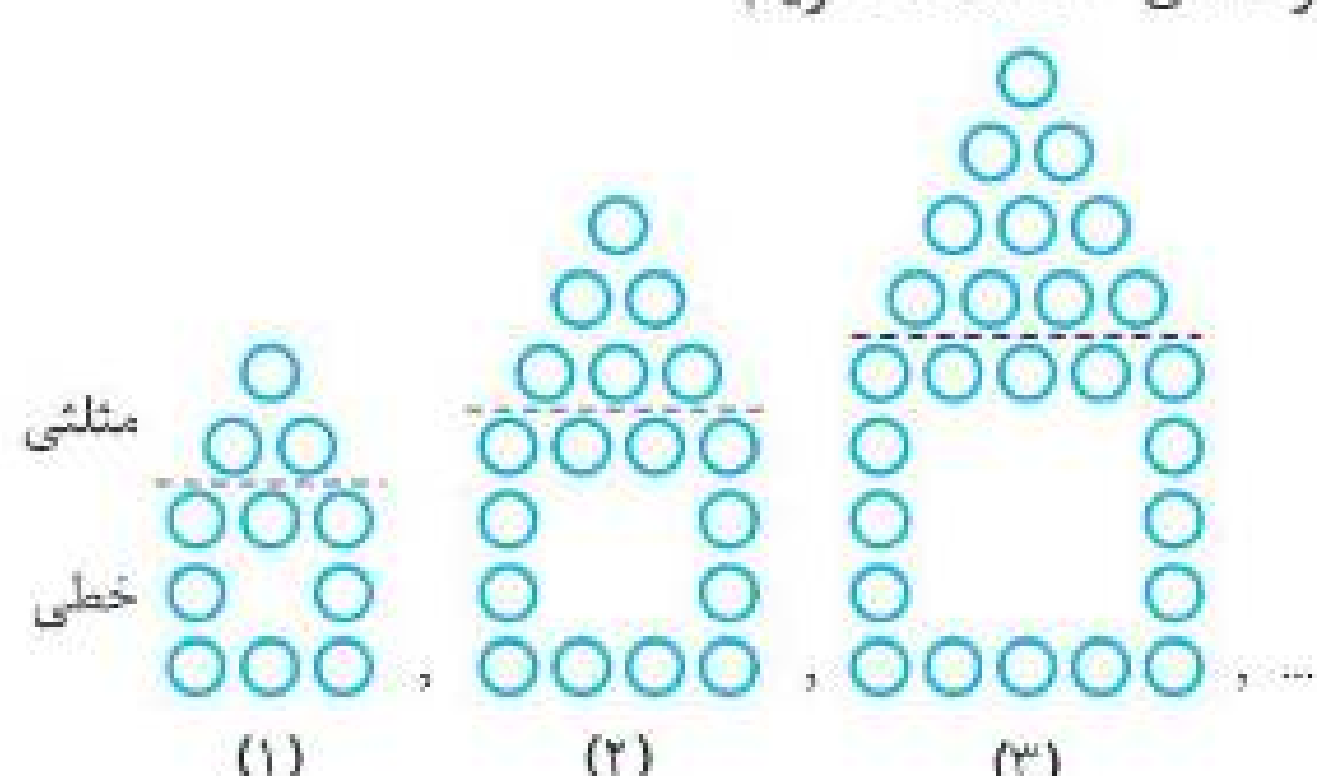
دارد. پس نسبت رنگی به سفید $\frac{n(n-1)}{2}$ می‌شود:

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n-1}{n+1}$$

که باید برابر $\frac{19}{20}$ یا $\frac{19}{95}$ باشد:

$$\frac{n-1}{n+1} = \frac{19}{20} \Rightarrow 20n - 20 = 19n + 19 \Rightarrow n = 39$$

طرفین وسطین کنیم: ۵۲- **گزینه ۴** در هر شکل ۲ قسمت داریم.



الف) در قسمت زیر خط چین تعداد دایره‌ها به ترتیب ۸، ۱۲ و ۱۶ است که الگوی خطی $4n+4$ دارد.

ب) در بالای خط چین الگوی مثلثی داریم که در شکل اول ۱+۲، در شکل دوم ۱+۲+۳ و ... است. پس در شکل دهم هم می‌شود $1+2+\dots+10+11$. بنابراین تعداد دایره‌های مرحله دهم مجموع $4 \times 10 + 4$ و $\frac{11 \times 12}{2}$ است که می‌شود: $44 + 66 = 110$.

۵۳- **گزینه ۴** در هر مرحله یک مربع $n \times n$ داریم که قسمت بالای قطر آن پاک شده، بعد نقاط روی قطر و نقاط باقی‌مانده قطر دیگر رنگ شده است. پس در شکل بیستم یک مربع 20×20 داریم که ۲۰ نقطه روی قطر و ۱۰ نقطه روی نصف قطر دیگر توپر هستند، پس: $a_{20} = 30$ و در شکل بیست و پنجم روی قطر ۲۵ تا و در نصف قطر مانده، ۱۲ تا نقطه توپر می‌بینیم. بنابراین $a_{25} = 37$ و اختلاف این‌ها می‌شود ۷.

اشاره اگر کنجاو هستید تعداد نقاط روی قطر در مرحله n ام و نیمه قطر دیگر $[\frac{n}{2}]$ است پس $a_n = n + [\frac{n}{2}]$.

۵۴- **گزینه ۴** شیب در مرحله اول، دوم و سوم به ترتیب $\frac{1}{4}$ ، $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{1}$ است.

دنباله این اعداد به صورت $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{2}$ و ... است؛ پس شیب در مرحله پنجم و دهم به ترتیب $\frac{1}{18}$ و $\frac{1}{11}$ است.

اختلاف آن‌ها می‌شود: $\frac{1}{11} - (\frac{1}{18}) = \frac{-1+21}{11 \times 18} = \frac{20}{198} = \frac{10}{99}$

۴۳- **گزینه ۱** عبارت $9n^2 + 21n + 10$ را تجزیه می‌کنیم:

$$a_n a_{n+1} = (3n+2)(3n+5)$$

پس $a_n = 3n+2$ و داریم:

که جمله ششم آن $20^2 = (3 \times 6 + 2)^2$ یعنی ۴۰۰ است.

۴۴- **گزینه ۲** جدول را ببینید:

مرحله	۱	۲	۳	n
مثلث	۱	۳	۵	$2n-1$
نقطه	۳	۵	۷	$2n+1$

پس تعداد نقاط توپر همیشه دوتا بیشتر از تعداد مثلث‌ها است و جواب برای ۴۷ مثلث می‌شود ۴۹.

۴۵- **گزینه ۳** در هر مرحله $\square$ به شکل قبلی افزوده می‌شود که ۶ تا

چوب کبریت دارد؛ پس الگوی خطی با ضریب ۶ برای n داریم: $a_n = 6n + b$

و چون $a_1 = 4$ است، $b = -2$ خواهد بود؛ بنابراین: $a_n = 6n - 2$

پس در شکل بیستم $a_{20} = 6 \times 20 - 2 = 118$ چوب کبریت هست.

۴۶- **گزینه ۱** در مرحله‌های ۱، ۲ و ۳ تعداد مربع‌ها به ترتیب 2×1 ،

3×2 و 4×3 است؛ پس در مرحله n ام تعداد آن‌ها $(n+1)n$ است.

اختلاف تعداد مربع‌ها و شماره مرحله برابر است با $(n+1)n - n = n^2$

که در مرحله دهم، به ۱۰۰ می‌رسد.

۴۷- **گزینه ۱** در هر شکل، n^2 تا دایره داریم که n تا آن‌ها رنگی است،

پس تعداد دایره‌های سفید می‌شود $n^2 - n$ و نسبت آن به رنگی‌ها برابر

$\frac{n^2 - n}{n}$ یعنی $n-1$ است؛ پس در شکل نودم مقدار این نسبت می‌شود ۸۹.

۴۸- **گزینه ۴** تعداد کل مربع‌ها، مربع‌های رنگی و سفید را می‌نویسیم:

مرحله	۱	۲	۳	۴
کل	3^2	4^2	5^2	6^2
رنگی	۴	۸	۱۶	۲۴
سفید	۵	۸	۹	۱۲

تعداد مربع‌های سفید در شکل‌های شماره زوج دو برابر تعداد مربع‌ها در هر ضلع است (قطرها سفیدند)؛ پس در شکل هشتم که $10^2 = 100$ مربع داریم ۲۰ تا آن‌ها سفید است و بنابراین ۸۰ تا رنگی داریم؛ پس $\frac{80}{100} = \frac{4}{5}$ مربع‌ها رنگی‌اند.

۴۹- **گزینه ۴** تعداد نقاط توپر در شکل ۱، ۲ و ۳ به ترتیب ۳، ۴ و ۵

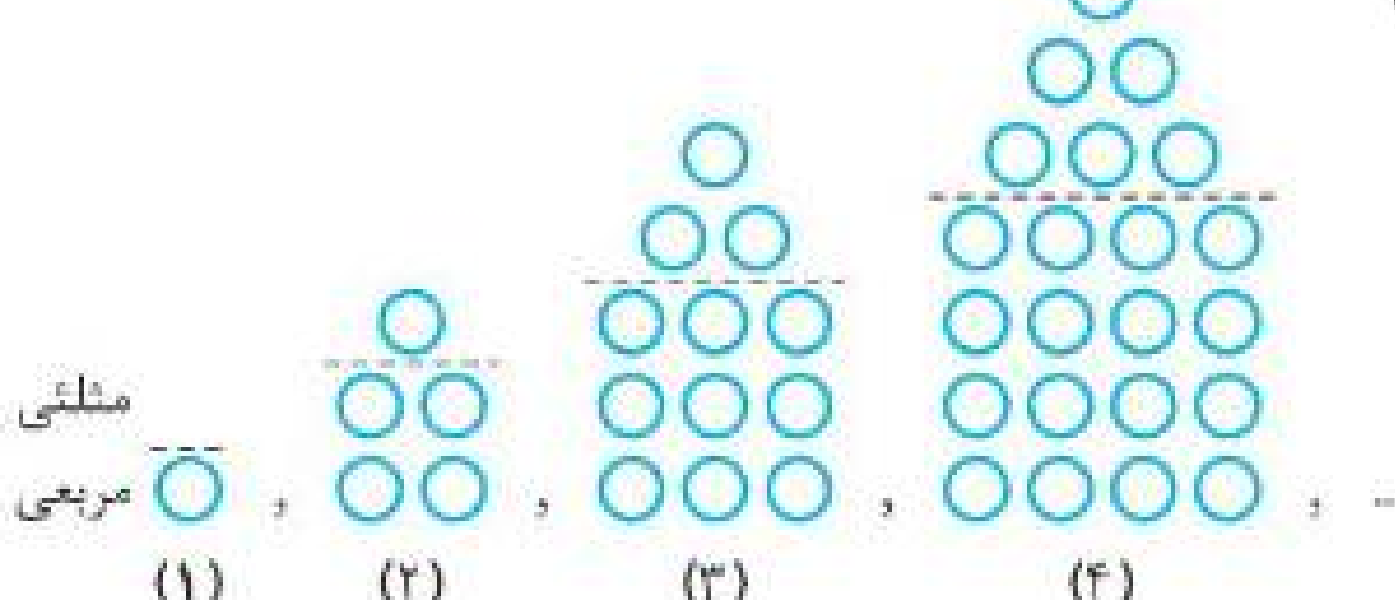
است؛ پس الگوی $n+2$ دارد و در شکل مرحله سیزدهم به ۱۵ تا می‌رسد.

نقاط توخالی در راست و چپ هر شکل الگوی مثلثی دارند؛ پس تعداد

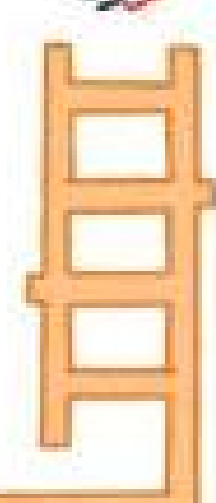
کل آن‌ها $n^2 + n = 2 \times \frac{n(n+1)}{2}$ است که در شکل مرحله سیزدهم می‌شود: $13^2 + 13 = 169 + 13 = 182$

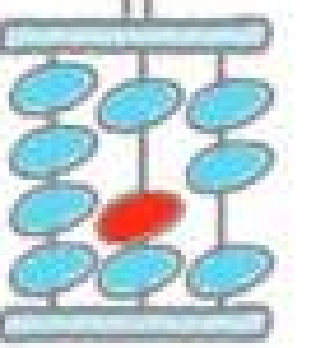
۵۰- **گزینه ۴** در هر شکل یک قسمت مربعی و از شکل ۲ به بعد یک

بخش مثلثی داریم:



پس تعداد نقاط در شکل n ام مجموع $1+2+\dots+n-1$ و n^2 است.





۵۵- گزینه ۱ با گویا کردن مخرج a_n داریم:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \times \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

پس داریم:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{99} = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{100} - \sqrt{99})$$

در هر پرانتز جمله اول با جمله دوم پرانتز بعدی حذف می‌شود و در آخر $\sqrt{100} - \sqrt{1} = 10 - 1 = 9$ می‌ماند که می‌شود:

۵۶- گزینه ۴ سعی می‌کنیم مثل سؤال قبل a_n را به صورت تفاضل دو عبارت بنویسیم:

$$a_n = \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$$

پس داریم:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{99} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{101} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{100}{101} = \frac{50}{101}$$

که برابر است با:

۵۷- گزینه ۲ از رابطه به صورت $a_{n+1} = \frac{4}{a_n}$ استفاده می‌کنیم. هر جمله

برابر با ۴ تقسیم بر جمله قبلی‌اش است و داریم: $a_n: 1, 4, 1, 4, 1, \dots$

پس در یازده جمله اول پنج تا ۴ و شش تا ۱ داریم که جمعشان می‌شود:

$$20 + 6 = 26$$

۵۸- گزینه ۲ راه اول: هر جمله از دو برابر قبلی یک واحد بیشتر است.

پس داریم:

$$\begin{array}{ccccccc} & \times 2 & & \times 2 & & \times 2 & & \times 2 \\ +1 & & +1 & & +1 & & +1 & \\ 1 & , & 3 & , & 7 & , & 15 & , & 31 \end{array}$$

با کمی دقت، جملات دنباله از مقادیر 2^n یکی کم‌تر هستند:

$$2^1 - 1, 2^2 - 1, 2^3 - 1, \dots$$

پس داریم $a_{20} = 2^{20} - 1$ و $a_{19} = 2^{19} - 1$ و اختلافشان می‌شود:

$$a_{20} - a_{19} = 2^{20} - 2^{19} = 2^{19}(2 - 1) = 2^{19}$$

راه دوم: اختلاف جمله اول و دوم 2^1 است $(3 - 1 = 2)$.

اختلاف جمله دوم و سوم 2^2 است $(7 - 3 = 4)$.

پس اختلاف جمله نوزدهم و بیستم برابر 2^{19} است.

۵۹- گزینه ۲ با قراردادن $n = 1$ داریم:

$$a_2 = 4a_1 + k$$

$$a_3 = 4a_2 + k$$

$$a_4 = 4a_3 + k$$

$$a_2 = 4 \times 2 + k = 8 + k$$

$$a_3 = 4(8 + k) + k = 32 + 5k$$

$$a_4 = 4(32 + 5k) + k = 128 + 21k$$

$$128 + 21k = 65 \Rightarrow -63 = 21k \Rightarrow k = -3$$

$$32 + 5(-3) = 17$$

و جمله سوم می‌شود:

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \Rightarrow a_{n+1} - 1 = \frac{1}{a_n} \xrightarrow{\text{عکس}} a_n = \frac{1}{a_{n+1} - 1}$$

پس از هر جمله یکی کم و عکس کنیم به قبلی‌اش می‌رسیم:

$$a_{20} = 2 - k \Rightarrow a_{19} = \frac{1}{2 - k - 1} = \frac{1}{1 - k} \Rightarrow a_{18} = \frac{1}{a_{19} - 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{1 - k} - 1} = \frac{1}{\frac{1 - (1 - k)}{1 - k}} = \frac{1 - k}{k} \xrightarrow{\text{تفکیک}} = \frac{1}{k} - 1$$

۶۱- گزینه ۲ چند جمله اول a_n را می‌نویسیم:

$$a_1 = 1 - 2\left[\frac{1}{3}\right] = 1 - 2 \times 0 = 1 \quad a_2 = 2 - 2\left[\frac{2}{3}\right] = 2 - 2 \times 0 = 2$$

$$a_3 = 3 - 2\left[\frac{3}{3}\right] = 3 - 2 \times 1 = 0 \quad a_4 = 4 - 2\left[\frac{4}{3}\right] = 1$$

$$a_5 = 5 - 2\left[\frac{5}{3}\right] = 2 \quad a_6 = 6 - 2\left[\frac{6}{3}\right] = 0$$

جملات به صورت متناوب ۱ و ۲ و ۰ هستند پس تا جمله هجدهم ۶ بار ۱ و ۲ و ۰ داریم و در نوزدهمی و بیستمی هم ۱ و ۲ داریم. پس جمع کل ۲۰ جمله اول $6(1 + 2 + 0) + 1 + 2$ است که می‌شود ۲۱.

اشاره مقدار a_n ، باقی‌مانده تقسیم n بر ۳ است.

۶۲- گزینه ۱ شرط $a_n a_{n+1} = a_n - 1$ را به صورت $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n}$

یا $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n}$ می‌نویسیم؛ پس هر جمله یک منهای عکس قبلی است:

$$2, 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = -1, 1 - \frac{1}{-1} = 2, \dots$$

پس سه جمله اول $\frac{1}{2}$ و -1 هستند و بعد دوباره این روند تکرار می‌شود.

پس در بیست جمله اول ۶ تا گروه $(2, \frac{1}{2}, -1)$ داریم و سپس ۲ و $\frac{1}{2}$ را هم می‌بینیم.

ضرب جملات هر گروه -1 می‌شود. پس ضرب کل بیست جمله

$$(-1)^6 \times 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

۶۳- گزینه ۳ برحسب a_1 و d می‌نویسیم:

$$a_6 = a_1 + 5d = 4$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = 10$$

از حل این دستگاه داریم: $d = \frac{3}{4}$ و با جای‌گذاری در یکی از معادله‌ها داریم: $a_1 = -\frac{7}{4}$ و مقدار جمله شانزدهم برابر است با:

$$a_{16} = a_1 + 15d = \frac{-7}{4} + 15 \times \frac{3}{4} = \frac{45 - 7}{4} = 10$$

۶۴- گزینه ۱ جمله‌ها را به صورت متقارن دسته‌بندی می‌کنیم:

$$(a_7 + a_{15}) + (a_8 + a_{14}) + (a_9 + a_{13}) + (a_{10} + a_{12}) + a_{11}$$

حالا چون در هر پرانتز، a_{11} وسط قرار دارد داریم:

$$= 2a_{11} + 2a_{11} + 2a_{11} + 2a_{11} + a_{11} = 9a_{11} = 90$$

پس: $a_{11} = 10$. حالا خواسته سؤال هم $a_9 + a_{13} = 2a_{11}$ است که

$$2 \times 10 = 20$$

می‌شود:

۶۵- گزینه ۲ برحسب a_1 و d می‌نویسیم:

$$a_7 = a_1 + 6d = 18$$

$$a_{18} = a_1 + 17d = 7$$

از حل دستگاه داریم: $a_1 = 24 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} 11d = -11 \Rightarrow d = -1$

پس جمله عمومی $a_n = a_1 + (n-1)d = 24 - (n-1)$ است و بنابراین

$$a_{25} = 24 - 24 = 0$$

جمله بیست و پنجم صفر است:

۶۶- گزینه ۳ می‌دانیم رابطه $a_7 + a_n = 2a_{n-1}$ به ازای جمله وسط

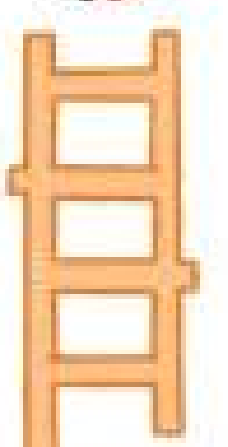
درست است. پس $n-1$ وسط n و ۷ است:

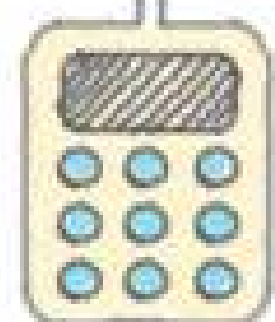
$$n-1 = \frac{n+7}{2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2n-2 = n+7 \Rightarrow n=9$$

۶۷- گزینه ۴ رابطه $a_{27} = 2a_{18}$ را برحسب a_1 و d می‌نویسیم:

$$a_1 + 26d = 2(a_1 + 17d) \xrightarrow{\text{مرتب‌کنیم}} 0 = a_1 + 8d$$

یعنی جمله نهم صفر است.





۷۴- گزینه ۲ در مورد سه عدد a و b و c می دانیم:

دنباله حسابی: $2b = a + c$

جمع: $a + b + c = 24$

ضرب: $abc = -640$

از معادله اول و دوم داریم $b + \underbrace{(a + c)}_{2b} = 24$ پس $3b = 24$ و بنابراین:

$$b = 8$$

حالا در معادله اول و سوم داریم:

$$\xrightarrow{b=8} \begin{cases} 2(8) = a + c \\ a(8)c = -640 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ac = \frac{-640}{8} = -80 \\ a + c = 16 \end{cases}$$

دو عدد با جمع ۱۶ و ضرب -80 ، اعداد $+20$ و -4 هستند پس اختلاف بیشترین و کمترین عدد ۲۴ است.

۷۵- گزینه ۲ جمله بیستم a_n به صورت $a_1 + 19d$ است.

جمله بیستم دنباله b_n ، $b_n = (a_1 - 10) + 19(d + 2)$ است که در مقایسه با $a_1 + 19d$ به اندازه $20 + 19 \times 2 = 58$ بیشتر است.

۷۶- گزینه ۲ مجموع سه جمله اول $a_1 + a_2 + a_3 = 15$ و جمع سه جمله آخر $a_{18} + a_{19} + a_{20} = 219$ است. برحسب a_1 و d داریم:

$$\xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} \begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 15 \\ \Rightarrow 3a_1 + 3d = 15 \\ a_1 + 17d + a_1 + 18d + a_1 + 19d = 219 \\ \Rightarrow 3a_1 + 54d = 219 \end{cases}$$

از حل این دستگاه داریم: $51d = 204 \Rightarrow d = 4$ و بنابراین: $a = 1$ و جمله سیزدهم برابر است با:

$$a_{13} = a_1 + 12d = 1 + 12 \times 4 = 49$$

۷۷- گزینه ۲ اولین جمله مشترک را می بینیم که عدد ۱۷ است.

با توجه به قدرنسبت های ۶ و ۷ در دو دنباله، قدرنسبت جملات مشترک ۴۲ (ک.م.ا آنها) است. پس جملات مشترک از دنباله زیر به دست می آیند:

$$c_n = c_1 + (n-1)d = 17 + (n-1) \times 42 = 42n - 25$$

و هشتمین جمله مشترک می شود:

$$c_8 = 311$$

جمله عمومی b_n به صورت $b_n = 3 + (n-1)7$ است و داریم:

$$b_n = 311 \Rightarrow 7n - 4 = 311 \Rightarrow 7n = 315 \Rightarrow n = 45$$

۷۸- گزینه ۴ زاویه ها را $a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d$

می گیریم و داریم: $a + 5d = 5a \Rightarrow 4a = 5d$ بزرگترین

از طرفی جمع کل زوایای عضلعی باید $720 = 4 \times 180 = (n-2)180$ درجه باشد پس:

$$2a + 5d = 240 \xrightarrow{\div 2} a + 2.5d = 120$$

این معادله را در کنار معادله $4a = 5d$ حل می کنیم:

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} d = 32, a = 40$$

و اندازه بزرگترین زاویه $a + 5d = 40 + 5 \times 32 = 200$ درجه است.

۷۹- گزینه ۴ عدد آخر دسته ها به ترتیب $3 \times 1, 3 \times 2, 3 \times 3, \dots$ است.

یعنی ۳ برابر جمله n ام دنباله مثلثی. پس عدد آخر دسته پانزدهم می شود $\frac{15 \times (15+1)}{2} \times 3$ که برابر است با ۳۶۰ و بنابراین عدد اول دسته شانزدهم ۳۶۳ است.

۶۸- گزینه ۱ جمله نهم سه برابر جمله پنجم است: $a_9 = 3a_5$

برحسب a_1 و d می نویسیم: $a_1 + 8d = 3(a_1 + 4d)$

و چون $d = 5$ است: $a_1 + 40 = 3(a_1 + 20)$

پس داریم: $-20 = 2a_1 \Rightarrow a_1 = -10$

جمله عمومی دنباله می شود: $a_n = a_1 + (n-1)d = -10 + 5(n-1)$ که برابر است با $a_n = 5n - 15$ که باید از ۱۰۰ بیشتر شود:

$$5n - 15 > 100 \Rightarrow 5n > 115 \xrightarrow{\div 5} n > 23 \Rightarrow n_{\min} = 24$$

پس اولین جمله بیشتر از ۱۰۰، بیست و چهارم است:

$$a_{24} = -10 + 23 \times 5 = 105$$

۶۹- گزینه ۳ هر دو عبارت را برحسب a_1 و d می نویسیم:

$$\text{الف} \quad a_7 + a_{11} = a_1 + 6d + a_1 + 10d = 2a_1 + 16d = 28$$

پس داریم: $a_1 + 8d = 14$

$$\text{ب} \quad a_7 + a_{10} + a_{14} = a_1 + 6d + a_1 + 9d + a_1 + 13d$$

$$= 3a_1 + 32d = 3(a_1 + 8d) = 3(14) = 42$$

این ۱۴ است.

۷۰- گزینه ۳ $a_n - a_{n+3}$ می شود $-3d$ پس داریم:

$$-3d = 6 \Rightarrow d = -2$$

و با $a_1 = 4$ جمله عمومی به صورت $a_n = 4 + (n-1)(-2)$ است که

$$\text{می شود } -2n + 6 \text{ و داریم: } \frac{a_{12}}{a_6} = \frac{-2(12) + 6}{-2(6) + 6} = \frac{-18}{-6} = 3$$

۷۱- گزینه ۱ مقدار افزایش جملات متوالی را می نویسیم:

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & , & a & , & 18 & , & b & , & 48 \\ \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow \\ a-4 & & 18-a & & b-18 & & 48-b \end{array}$$

این افزایش ها باید دنباله خطی بسازند، پس:

$$18 - a - (a - 4) = b - 18 - (18 - a) = 48 - b - (b - 18)$$

بنابراین داریم:

$$\underbrace{22 - 2a = b + a - 36 = 66 - 2b}_{\substack{3a+b=58 \\ 2b+a=102}}$$

از حل این دستگاه داریم:

$$\begin{cases} 3a + b = 58 \\ 2b + a = 102 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a = 9, b = 31$$

واسطه حسابی $b - a$ و $b + a$ برابر است با:

$$c = \frac{b + a + b - a}{2} = \frac{2b}{2} = b = 31$$

۷۲- گزینه ۱ دنباله حسابی به صورت روبه رو ایجاد می شود:

$$-18, x_1, \dots, x_n, a$$

$$\xrightarrow{\frac{a_1 = -18}{a_n = a}} d = \frac{a_1 - a}{10 - 1} = \frac{a + 18}{9}$$

پس داریم:

واسطه ششم، جمله هفتم این دنباله است:

$$a_7 = a_1 + 6d = -18 + 6\left(\frac{a + 18}{9}\right)$$

و می خواهیم صفر شود:

$$-18 + \frac{2}{3}(a + 18) = 0 \Rightarrow -18 + \frac{2}{3}a + 12 = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}a = 6 \Rightarrow a = 9$$

۷۳- گزینه ۲ می دانیم اگر اضلاع مثلث قائم الزامه دنباله حسابی بسازند

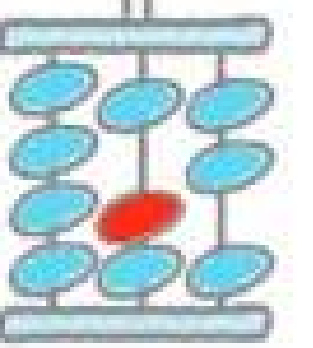
حتماً $3k, 4k$ و $5k$ هستند و مساحت مثلث می شود $\frac{3k \times 4k}{2} = 6k^2$

پس داریم:

$$S = 6k^2 = 96 \xrightarrow{\div 6} k^2 = \frac{96}{6} = 16 \xrightarrow{\text{جذر}} k = 4$$

پس وتر مثلث $5k = 5(4) = 20$ است.





۸۰- گزینه ۲ با اتحاد مزدوج داریم:

$$a_{\Delta 3}^2 - a_{\Delta 1}^2 = \underbrace{(a_{\Delta 3} - a_{\Delta 1})}_{2d} \underbrace{(a_{\Delta 3} + a_{\Delta 1})}_{2a_{\Delta 2}}$$

$$a_{\Delta 2} = 4da_{\Delta 2}$$

پس:

$$\text{و این یعنی } 1 = 4d, \text{ پس } d = \frac{1}{4}$$

حالا در $a_1 = a_1 + 9d = -3$ قرار می دهیم:

$$a_1 + \frac{9}{4} = -3 \Rightarrow a_1 = \frac{-21}{4}$$

جمله عمومی دنباله $a_1 + (n-1)d = \frac{-21}{4} + \frac{n-1}{4}$ است و می خواهیم منفی باشد:

$$a_n < 0 \Rightarrow \frac{n-22}{4} < 0 \Rightarrow n < 22$$

یعنی بیست و یک جمله منفی داریم.

۸۱- گزینه ۴ بر حسب a_1 و d می نویسیم:

$$2a_1^2 = a_1(a_1 + 2a_1) \Rightarrow \frac{2a_1^2}{a_1} = a_1 + 2a_1 \Rightarrow \frac{2a_1^2}{a_1} = a_1 + 2(a_1 + d)$$

$$\xrightarrow[\text{ضرب را انجام دهیم.}]{\text{اتحاد را باز کنیم.}} 2(a_1^2 + 4a_1d + 4d^2)$$

$$= 2a_1^2 + 8a_1d + 16d^2$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب کنیم.}} 0 = a_1^2 + 4a_1d \Rightarrow a_1(a_1 + 4d) = 0$$

پس $a_1 = -4d$ یا $a_1 = 0$ است و کسر قدر نسبت به جمله ششم برابر می شود با:

$$\frac{d}{a_6} = \frac{d}{a_1 + 5d} \xrightarrow[\text{یا } a_1 = -4d]{a_1 = -4d} \frac{d}{-4d + 5d} = \frac{1}{1} \text{ یا } \frac{d}{5d} = \frac{1}{5}$$

۸۲- گزینه ۴ جملات دنباله $3n - 2$ را می نویسیم:

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots$$

$$b_1 = 1 + 4 + 7 = 12$$

دنباله جدید را می سازیم:

$$b_2 = 10 + 13 + 16 = 39$$

پس دنباله جدید دارای قدرنسبت $39 - 12 = 27$ است و داریم:

$$b_{10} = b_1 + 9d = 12 + 9 \times 27 = 243 + 12 = 255$$

۸۳- گزینه ۳ در الگوی درجه دوم داریم:

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

افزایش جملات را می نویسیم:

می دانیم افزایش ها دنباله حسابی می سازند پس در ادامه داریم:

$$a_1, a_2, a_3, x, y, z, \dots$$

یعنی جمله ششم الگوی درجه دوم $a_1 + (1 + 4 + 7 + 10 + 13)d$ است که می شود $a_1 + 35d$ ، یعنی جمله ۳۶ام دنباله حسابی.

۸۴- گزینه ۴ هر کدام از کسرهای $\frac{1}{a_n a_{n+1}}$ را به صورت زیر می توانیم بنویسیم:

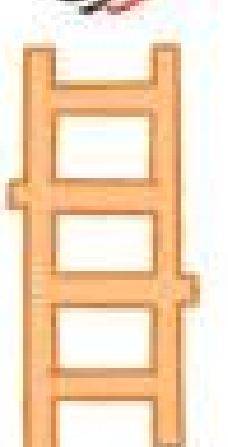
$$\frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

پس داریم:

$$A = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \dots + \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_{19}} - \frac{1}{a_{20}} \right)$$

از هر پرانتز جمله دوم با جمله اول پرانتز بعدی حذف می شود و داریم:

$$A = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{20}} \right) \xrightarrow[\text{با } d=4]{a_{20}=4n-1} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4 \times 1 - 1} - \frac{1}{4 \times 20 - 1} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{79} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{79-3}{79 \times 3} \right) = \frac{19}{237}$$



۸۵- گزینه ۲ جمع ۴ جمله ابتدایی $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4a_1 + 6d$

است. جمع ۴ جمله بعدی $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 4a_1 + 22d = 86$ است.

$$2a_1 + 11d = 43$$

پس:

حالا جمع ۱۲ جمله ابتدایی را می خواهیم:

$$12a_1 + (1+2+\dots+11)d = 12a_1 + \frac{12(11)}{2}d$$

$$= 12a_1 + 66d = 6(2a_1 + 11d)$$

پس جواب می شود $6 \times 43 = 258$.

۸۶- گزینه ۱

$$\begin{matrix} A & B & C \\ 6 & a & a - \frac{3}{4}, \dots \end{matrix}$$

از شرط تشکیل دنباله هندسی داریم:

$$B^2 = AC \Rightarrow a^2 = 6(a - \frac{3}{4}) = 6a - 9 \Rightarrow a^2 - 6a + 9 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مربع}} (a-3)^2 = 0 \Rightarrow a = 3$$

پس دنباله هندسی به صورت $3, 6, 12, \dots$ است که در آن $a_1 = 3$ و $r = 2$ و

نسبت جمله هفتم به سوم برابر است با:

$$\frac{a_7}{a_3} = \frac{a_1 r^6}{a_1 r^2} = r^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

۸۷- گزینه ۲ شرط تشکیل دنباله هندسی را می نویسیم:

$$\xrightarrow{B^2=AC} x^2 = (-x-6)(x-4) = -x^2 - 2x + 24$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب}} 2x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3) = 0$$

پس $x = -4$ یا $x = 3$. به ازای $x = -4$ دنباله $-2, -4, -8, \dots$

نزولی است و به ازای $x = 3$ دنباله $1, 3, 9, \dots$ یکنوا نیست. پس

همان $2, 4, 8, \dots$ را داریم که قدرنسبتش $r = 2$ است.

۸۸- گزینه ۲ چند جمله اول دنباله جدید را می بینیم:

$$b_1 = a_1 a_2 = \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3}$$

$$b_2 = a_2 a_3 = 2 \times 6 = 12$$

$$b_3 = a_3 a_4 = 6 \times 18 = 108$$

پس جمله اولش $b_1 = \frac{4}{3}$ و قدرنسبت آن $9 = \frac{108}{12} = \frac{108}{\frac{4}{3}}$ است و داریم:

$$b_9 = b_1 r^8 = \frac{4}{3} \times 9^8 = \frac{4}{3} \times (3^2)^8 = 4 \times 3^{15}$$

۸۹- گزینه ۱ نسبت $(t_1)_0$ به t_{20} را می خواهیم:

$$\frac{(4 \times (\frac{2}{3})^{10})^2}{4 \times (\frac{2}{3})^{20}} = \frac{4^2 (\frac{2}{3})^{20}}{4 \times (\frac{2}{3})^{20}} = 4$$

۹۰- گزینه ۳ جمله اول دنباله t_n برابر است با:

$$t_1 = 6 \times 2^{1-2 \times 1} = 6 \times 2^{-1} = 3$$

قدرنسبت t_n ، پایه توان n است:

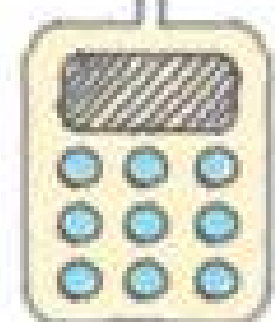
$$t_n = 6 \times 2^{1-2n} = 6 \times 2^1 \times 2^{-2n} = 12 \times (\frac{1}{4})^n \Rightarrow r = \frac{1}{4}$$

پس در دنباله جدید جمله اول $b_1 = 3 + 1$ و قدرنسبت $r' = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ است

و داریم:

$$b_{10} = b_1 r'^9 = 4 \times (\frac{3}{4})^9 = 4 \times \frac{3}{4} \times (\frac{3}{4})^8$$

پس نسبت آن به $(\frac{3}{4})^8$ می شود $4 \times \frac{3}{4} = 3$.



راه اول: دنبال دو عدد با مجموع ۳۰ و حاصل ضرب ۱۴۴ می‌گردیم که با کمی جست‌وجو ۶ و ۲۴ مناسب است. بنابراین $|x - y| = 24 - 6 = 18$.
راه دوم: به جای y می‌نویسیم $30 - x$ و داریم:

$$x(30 - x) = 144 \xrightarrow{\text{مرتب}} 0 = x^2 - 30x + 144$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه}} (x - 6)(x - 24) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 24 \end{cases}$$

پس $\begin{cases} y_1 = 24 \\ y_2 = 6 \end{cases}$ و اختلاف آن‌ها می‌شود: ۱۸

۹۷- گزینه ۴ با درج ۴ واسطه بین ۴ و ۹۷۲ به دنباله $4, a, b, c, d, 972$

می‌رسیم و داریم: $a_1 = 4, a_6 = a_1 r^5 = 972$

$$r^5 = \frac{972}{4} = 243 = 3^5$$

بنابراین $r = 3$ و دنباله هندسی به صورت زیر است:

$$4, 12, 36, 108, 324, 972$$

پس جمع اولین و چهارمین واسطه می‌شود: $12 + 324 = 336$

۹۸- گزینه ۱ مجموع سه جمله اول $a_1 + a_2 + a_3$ و مجموع سه جمله بعدی $a_4 + a_5 + a_6$ است.

همه را بر حسب a_1 و r می‌نویسیم:

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 = \frac{13}{3}$$

$$a_1 r^3 + a_1 r^4 + a_1 r^5 = 117$$

دقت می‌کنیم که معادله پایینی، r^3 برابر معادله بالایی است:

$$\xrightarrow{\text{تقسیم دو معادله}} \frac{1}{r^3} = \frac{13}{117} = \frac{1}{9} \Rightarrow r = 3$$

پس قدرنسبت دنباله $r = 3$ است. با جای‌گذاری در جمع سه‌تای اول داریم:

$$\xrightarrow{r=3} a_1 + 3a_1 + 9a_1 = 13a_1 = \frac{13}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}$$

۹۹- گزینه ۴ بر حسب a_1 و r می‌نویسیم: $\frac{a_6}{a_4} = \frac{a_1 r^5}{a_1 r^3} = r^2 = 3$
حالا برویم سراغ کسر مورد نظر سؤال:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{a_1 + a_2} = \frac{a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3}{a_1 + a_1 r} = \frac{a_1 + a_1 r + r^2(a_1 + a_1 r)}{a_1 + a_1 r} = \frac{(a_1 + a_1 r)(1 + r^2)}{a_1 + a_1 r}$$

$$= 1 + r^2 = 1 + 3 = 4$$

۱۰۰- گزینه ۱ با حذف $a_1 + a_1 r$ داریم:

$$2a = 1 + b$$

$$a^2 = 1 \times (-b)$$

$$b = 2a - 1$$

پس:

$$a^2 = -b = -(2a - 1) = -2a + 1 \xrightarrow{\text{مرتب‌سازی}} a^2 + 2a - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{فرمول دلتا}} a = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

دقت کنیم که در صورت سؤال «جملات مثبت» داریم، پس $a > 0$ و فقط $\sqrt{2} - 1$ را قبول می‌کنیم.

۹۱- گزینه ۴ از $3a_n + 4a_{n+1} = 0$ نسبت $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ را به دست می‌آوریم:

$$4a_{n+1} = -3a_n \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{3}{4}$$

یعنی قدرنسبت دنباله هندسی $-\frac{3}{4}$ است و داریم:

$$\frac{a_{11}}{a_8} = r^{11-8} = r^3 = \left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{64}$$

۹۲- گزینه ۳ تساوی صورت سؤال را بر حسب a_1 و r می‌نویسیم:

$$\frac{a_1 + a_4}{2a_1} = 3a_2 \Rightarrow \frac{a_1 r^3 + a_1}{2a_1 r^1} = 3a_1 r$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کنیم}} \frac{r}{2} + \frac{r}{a_1} = 3a_1 r \xrightarrow{\div r} \frac{1}{2} + \frac{1}{a_1} = 3a_1$$

$$\sqrt[3]{\frac{a_1 r^4}{(a_1 r)^4}} = \sqrt[3]{\frac{a_1 r^4}{a_1^4 r^4}} = \frac{1}{a_1} \quad \text{است که می‌شود:}$$

از حل معادله بالا، مقدار a_1 را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{\times 2a_1} a_1 + 2 = 6a_1^2 \Rightarrow 6a_1^2 - a_1 - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل به روش روسی}} a_1 = \frac{2}{3} \text{ یا } -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{a_1} = \frac{3}{2}$$

و بنابراین جواب می‌شود: $\frac{3}{2}$

۹۳- گزینه ۲ صورت سؤال می‌گوید $a_2 = a_1 + 6$ و $a_3 = 2a_1 + 2$

پس بر حسب a_1 و r داریم: $a_1 r^2 = 2a_1 + 2, a_1 r^3 = a_1 r + 6$

$$\begin{cases} a_1(r^2 - r) = 6 \\ a_1(r^3 - r^2) = 2 \end{cases}$$

و از تقسیم این‌ها داریم:

$$\frac{r^3 - r^2}{r^2 - r} = 3 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} r^3 - r^2 = 3r^2 - 6$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب‌سازی معادله}} 2r^2 + r - 6 = 0 \xrightarrow{\text{حل معادله}} r = -2 \text{ یا } \frac{3}{2}$$

چون جملات مثبت‌اند $r = \frac{3}{2}$ را قبول می‌کنیم و با جای‌گذاری در معادله اول داریم:

$$a_1 \left(\frac{9}{4} - \frac{3}{2} \right) = 6 \Rightarrow a_1 = \frac{6}{\frac{3}{4}} = 8$$

و مقدار جمله چهارم برابر است با:

$$a_4 = a_1 r^3 = 8 \left(\frac{3}{2} \right)^3 = 8 \left(\frac{27}{8} \right) = 27$$

۹۴- گزینه ۳ می‌دانیم قدرنسبت دنباله هندسی از روابط

$$\frac{a_4 - a_3}{a_3 - a_2} = r = \frac{a_2 - a_1}{a_2 - a_1}$$

$$\frac{9}{a_2 - a_1} = \frac{a_2 - a_1}{4} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (a_2 - a_1)^2 = 9 \times 4 = 36$$

$$\xrightarrow{\text{جمله‌ها مثبت و قدرنسبت بزرگتر از ۱}} a_2 - a_1 = +6$$

۹۵- گزینه ۲ مساحت مربع اول $6^2 = 36$ است. ضلع مربع دوم برابر

$$x^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

است با:

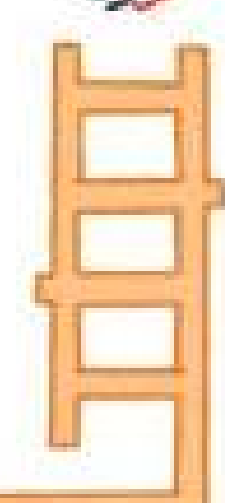
پس مساحت مربع دومی می‌شود 20 و قدرنسبت دنباله مساحت‌ها برابر

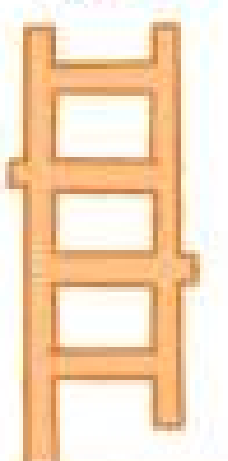
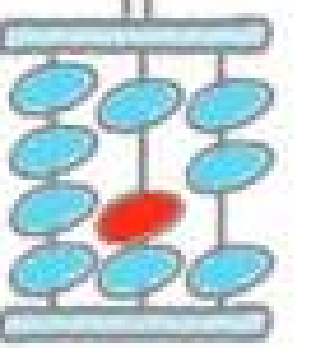
$$A_8 = A_1 r^7 = 36 \times \left(\frac{5}{9} \right)^7$$

است با $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$ ، بنابراین:

۹۶- گزینه ۱ اگر دو عدد را x و y بنامیم سؤال می‌گوید:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ xy = 12^2 \end{cases}$$





۱۰۱- گزینه ۴ واسطه هندسی a و b عدد ۳ است؛ پس: $3^2 = ab$

حالا فرض می‌کنیم واسطه حسابی $\frac{1}{3-a}$ و $\frac{1}{3-b}$ برابر x باشد. پس:

$$2x = \frac{1}{3-a} + \frac{1}{3-b} = \frac{3-b+3-a}{(3-a)(3-b)} = \frac{6-(a+b)}{9-3(a+b)+ab}$$

به جای ab ۹ قرار می‌دهیم:

$$2x = \frac{6-(a+b)}{9-3(a+b)} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\div 2} x = \frac{1}{6}$$

۱۰۲- گزینه ۳ سؤال می‌گوید $a+d$ ، $a+\delta d$ و $a+\gamma d$ جملات

متوالی دنباله هندسی است و $d=4$ است. پس داریم:

$$a+4, a+20, a+28 \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} (a+20)^2 = (a+4)(a+28)$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد را باز و ضرب کنیم.}} a^2 + 40a + 400 = a^2 + 32a + 112$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب کنیم.}} 8a = -288 \xrightarrow{\div 8} a = -36$$

۱۰۳- گزینه ۱ اگر A ، B و C سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند

قدرنسبت آن $\frac{C-B}{B-A}$ است؛ پس در این جا برای جمله چهارم، هفتم و

$$r = \frac{28-7}{7-4} = 7$$

بیست و هشتم داریم:

$$r = \frac{n-28}{28-7}$$

و برای جمله هفتم، بیست و هشتم و n ام هم می‌توان گفت:

$$7 = \frac{n-28}{21} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} n-28 = 147$$

$$\xrightarrow{+28} n = 147 + 28 = 175$$

۱۰۴- گزینه ۲ شرط تشکیل دنباله‌ها را می‌نویسیم:

$$3^a, 16, 2^b \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} 16^2 = 3^a \times 2^b$$

$$\Rightarrow (2^4)^2 = 3^{a+b} \xrightarrow{\text{پایه‌ها مساوی‌اند.}} 8 = a+b$$

$$11, b, 3a \xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} 2b = 11 + 3a$$

$$\begin{cases} 2b - 3a = 11 \\ b + a = 8 \end{cases}$$

از حل این دستگاه داریم $a=1$ و $b=7$ و بنابراین: $ab=7$

۱۰۵- گزینه ۱ سه عدد a ، b و c دنباله حسابی و سه عدد $a+2$ ، $a+5$ و $b+8$ و $c+8$ دنباله هندسی می‌سازند. هم‌چنین سؤال گفته $a+b+c$ دو

برابر $a+b+c+2+5+8$ است؛ پس داریم:

$$a+b+c = 2(a+b+c+15) \Rightarrow a+b+c = -30$$

حالا از شرط $2b = a+c$ برای حسابی داریم: $b + \frac{2b}{a+c} = 2b = -30$

پس $b = -10$ و در شرط دنباله هندسی قرار می‌دهیم:

$$a+2, \frac{b+5}{-5}, c+8 \xrightarrow{B^2=AC} (-5)^2 = (a+2)(c+8)$$

از طرف دیگر چون $2b = a+c = -20$ است می‌توانیم به جای c ، $-20-a$ قرار دهیم:

$$25 = (a+2)(-20-a+8) = -a^2 - 14a - 24$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب}} a^2 + 14a + 49 = 0$$

این $(a+7)^2$ است؛ پس: $a = -7$

۱۰۶- گزینه ۳ شماره جمله آخر دسته‌ها ۱، ۳، ۵، ۷ و ... یعنی جملات

دنباله مثلثی است؛ پس جمله آخر دسته نهم و هشتم به ترتیب در شماره

$$\{a_{37}, \dots, a_{45}\} \text{ و } \{a_{36}, \dots, a_{45}\} \text{ است: } 36 = \frac{8(8+1)}{2} \text{ و } 45 = \frac{9(9+1)}{2}$$

نهم هشتم

پس جمله وسط دسته نهم شماره $41 = \frac{37+45}{2}$ است: $a_{41} = 2^{40}$

۱۰۷- گزینه ۱ تابع f خطی است پس $f(x) = ax + b$ و داریم:

$$f(\alpha) = a\alpha + b, f(\beta) = a\beta + b, f(\gamma) = a\gamma + b$$

اگر این عددها دنباله حسابی بسازند، α ، β و γ نیز دنباله حسابی می‌سازند.

(چون با ضرب در a و افزودن b ، دنباله حسابی باز هم حسابی می‌ماند.)

حالا α ، β و γ هم دنباله حسابی و هم دنباله هندسی دارند پس مساوی

هم هستند: $\alpha = \beta = \gamma$

و داریم: $d=0$ و $r=1$ و جمع قدرنسبت‌ها می‌شود ۱.

۱۰۸- گزینه ۲ با قراردادن دو واسطه بین ۵۴ و ۱۶ به دنباله هندسی

۱۶، x ، y ، ۵۴ می‌رسیم. پس داریم:

$$a_1 = 16, a_4 = a_1 r^3 = 54 \Rightarrow r^3 = \frac{54}{16} = \frac{27}{8} \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} r = \frac{3}{2}$$

$$a_7 = x = 16 \times \frac{3}{2} = 24, a_9 = y = 24 \times \frac{3}{2} = 36$$

پس:

بنابراین اختلاف دو واسطه $36 - 24 = 12$ است که در دنباله $t_n = 3 \times 2^{n-1}$ به ازای $n=6$ می‌رسیم. پس جواب جمله ششم است.

$$\text{۱۰۹- گزینه ۳} \quad 2, b, 8 \xrightarrow{\text{شرط واسطه}} b = \frac{2+8}{2} = 5$$

$$\Rightarrow a_1 = 2, d = 3$$

$$2, b, 8 \xrightarrow{\text{شرط واسطه}} b^2 = 2 \times 8 = 16$$

$$\Rightarrow b = \pm 4 \Rightarrow a_1 = 2, r = \pm 2$$

پس جمله هفتم دنباله هندسی $a_7 = 2(\pm 2)^6 = 128$ است.

جمله عمومی دنباله حسابی $a_1 + (n-1)d = 2 + 3(n-1)$ است که آن

را با ۱۲۸ مساوی قرار می‌دهیم:

$$2 + 3(n-1) = 128 \xrightarrow{+3} 3(n-1) = 126 \xrightarrow{\div 3} n-1 = 42 \Rightarrow n = 43$$

۱۱۰- گزینه ۲ جمله هفتم صفر است؛ پس: $a_7 = a_1 + 6d = 0$

از طرفی واسطه هندسی جملات هشتم و شانزدهم برابر است با:

$$B^2 = AC = a_8 a_{16} = (a_1 + 7d)(a_1 + 15d)$$

با قراردادن $a_1 = -6d$ داریم:

$$B^2 = (-6d + 7d)(-6d + 15d) = d(9d) = 9d^2$$

$$B = \pm 3d$$

پس:

جمله عمومی دنباله $a_1 + (n-1)d$ است که با شرط $a_1 = -6d$ می‌شود $(n-7)d$.

پس داریم $(n-7)d = \pm 3d$ پس n می‌تواند ۴ یا ۱۰ باشد یعنی جواب

جمله چهارم یا دهم است.

۱۱۱- گزینه ۱ جملات دوم، چهارم و پنجم دنباله هندسی aq^2, aq^4, aq^6 هستند.

شرط تشکیل دنباله حسابی را می‌نویسیم:

$$\Rightarrow 2aq^3 = aq + aq^5 \xrightarrow{\div aq} 2q^2 = 1 + q^4$$

پس q ریشه معادله $q^4 - 2q^2 + 1 = 0$ است. چون $q=1$ در این معادله

صدق می‌کند در تجزیه عبارت درجه سوم عامل $(q-1)$ داریم و با تقسیم بر

$q-1$ تجزیه کامل می‌شود: $q^4 - 2q^2 + 1 = (q-1)(q^2 - q - 1)$

پس مقادیر q به جز ۱، ریشه‌های پیرانتز درجه دوم یعنی $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ هستند.

$$q^2 = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1 + 5 \pm 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

و داریم: