

مقدمه ناشر

قدرت باور و ایمان

اگه تو دوران کودکی یکی بهمون می گفت می خوام چی کاره شی، چی می گفتیم؟
یکی می گفت خلبان، یکی پزشک، یکی مهندس، یکی دیگه نونوا و ... (خود من، کشتی ساز 😊)
اما تمام تفکرات و علاقه ها برگرفته از محیط اطراف ما و گفته های بزرگ ترها بود. وقتی بزرگ تر شدیم و پا به عرصه مدرسه و دبیرستان و انتخاب رشته گذاشتیم، فهمیدیم که تموم اون ها یه داستان بوده و اگه بخوایم واقعی به اون آرزوها برسیم خیلی خیلی باید تلاش کنیم و قوی باشیم. البته شاید خیلی ها هم به همون خواسته های کودکی شون رسیده باشن که اصلاً غیرممکن نیست.
اما چیزی که خیلی مهمه، باورها، عقیده ها و تلاش های ما هست که مسیر زندگی مونو می سازه و ما رو به هدفمون نزدیک می کنه. این که ما توی آینده چه چیزی رو برای خودمون متصور می شیم و خودمون رو توی چه جایگاهی می بینیم؟ چه قدر برای هدف هامون تلاش می کنیم و چه قدر بی خوابی می کشیم؟
اما بدونید که اگه با باور صد درصدی قلبی و با تمام انرژی و تلاش برای خواسته هامون تلاش کنیم، بی شک به تمام خواسته هامون می رسیم، چراکه خدای این دنیا و تمام کائنات خودشونو موظف و مکلف به این می دونن که تو رو به خواسته هات و آرزوهات برسونن. اما چی مهمه؟
مهم ترین چیز، تلاش تو، ایمان تو، باور قلبی تو به خدا و موجودیت خودته. پس حتماً خودتو توی اون جایگاه و نقطه ای که آرزوته و داری براش تلاش می کنی ببین که بی شک، قطعاً، حتماً، مطمئناً!! 😊 بهش خواهی رسید.

«انسان ها برای بودن هستند، نه برای ماندن.»



مقدمه مؤلف

سلام به همه بچه‌های خفن انسانی! اگه این کتاب رو داری میخونی یعنی تو دوست خوب منی! خیلی‌ها معتقد هستن که بچه‌های رشته انسانی نیازی به حل سؤال‌های چالشی و سخت ندارن یا اصلاً توان این کار رو ندارن، اما واقعاً این نیست:

کنکورهای اخیر مخصوصاً توی رشته انسانی به ما ثابت کرده که طراح‌های سؤال‌های ریاضی علاقه زیادی به سؤال‌های ترکیبی و چالشی دارن. فکر نمی‌کنم کسی هم این‌جا باشه که از اهمیت و تأثیر درس ریاضی بی‌خبر باشه. این فقط توهم و خرافات بعضی‌هاست که دانش‌آموزان ضعیف‌تر می‌رن سراغ رشته انسانی. خیلی از بچه‌های با علاقه انسانی این‌جان (مثل تو دوست خوب من) که اتفاقاً قدرت تحلیل و پشت‌کار خیلی بالایی هم دارن که بهترین برازندشونه. **نتیجه** من و همکارام توی یک سال اخیر تمام تلاشمون رو کردیم که نه‌تنها تمام تمرین‌های کتاب درسی و سؤالات کنکور چند سال اخیر رو پوشش بدیم! بلکه پامون رو از کتاب و کنکور هم کمی فراتر گذاشتیم تا به همه ثابت کنیم که بچه‌های انسانی چه توانایی‌هایی دارن و با خوندن این کتاب از پس سخت‌ترین سؤال‌های کنکور هم بر میان. کتابی که تو دسته سه قسمت کلی و مهم داره:

تمام مطالب مهم رو با به طبقه‌بندی خفن براتون آوردیم و با تیپ‌بندی کردن مطالب نداشتیم هیچ مطلبی براتون مبهم بمونه. **درس‌نامه** توی قسمت برای مثال، دست‌به‌دست هم و همپای همدیگه پیش می‌ریم. تست‌های کنکوری و شبیه‌ساز کنکوری رو به عنوان تست آموزشی با پاسخ کامل براتون آوردیم.

تمام تست‌های مهم کنکور رو براتون آوردم. (فقط سؤال‌های مهم) **برسش‌های چهارگزینه‌ای** کلی سؤال تألیفی خفن و ترکیبی داریم تا همیشه از طراح یه قدم جلوتر باشیم. با طبقه‌بندی دقیق و اصولی تست‌ها و مشخص کردن تیرهای داخل تست‌ها کمکتون می‌کنیم تا ذهنتون رو منظم‌تر کنید.

پاسخ‌نامه ← تک‌تک سؤال‌ها رو موبه‌مو بررسی کردیم و پاسخ شفاف و واضح نوشتیم، تا بتونید در هر سطحی که هستید با خوندن پاسخ‌ها به فهم دقیق برسید.

ازتون خواهش می‌کنم پاسخ‌نامه این کتاب رو تحلیل کنید!!! نه این‌که فقط بخونید.

تشکر می‌کنیم از:

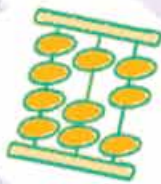
- ♦ دکتر امید نصری و دکتر کامیل نصری عزیز که همیشه از ایده‌های جدید حمایت می‌کنن.
- ♦ دوست و رفیق عزیزم علی شعبانی عزیز که تو تک‌تک مراحل این کتاب از جون مایه گذاشت.
- ♦ تیم خفن تألیف و ویراستاری و طراحی خیلی سبز که تمام تلاششون اینه که خفن‌ترین کتاب ممکن به دست شما برسه، مخصوصاً خانم مریم طاهری.
- ♦ رفیق و همکار قدیمی محمدحسین صابری که همیشه می‌شه روش حساب کرد.



فهرست

فصل اول: معادله	۶
فصل دوم: تابع	۲۴
فصل سوم: آمار	۶۲
فصل چهارم: شمارش	۹۵
فصل پنجم: احتمال	۱۱۰
فصل ششم: دنباله	۱۲۹
فصل هفتم: توان و نمایی	۱۵۲
فصل هشتم: منطق و گزاره	۱۶۴
پاسخ‌نامه تشریحی	۱۷۵
پاسخ‌نامه کلیدی	۳۰۲

معادله



معادله و کاربردهای آن

معادله هر تساوی شامل یک یا چند متغیر (همون مجهول) را معادله می‌گوییم. منظور از حل یک معادله، پیدا کردن مقدار یا مقادیری است که تساوی را برقرار می‌کنند. (یک معادله، تساوی‌ای است که به ازای برخی مقادیر برقرار است).
یادمون باشه جواب‌های یک معادله حتماً در آن صدق می‌کنند.

برای مثال $x = -4$ ریشه معادله $2x + 8 = 0$ است و در آن صدق می‌کند:
 $2(-4) + 8 = 0 \Rightarrow -8 + 8 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

در ادامه سه نوع معادله را بررسی می‌کنیم: **۱** معادله درجه اول **۲** معادله درجه دوم **۳** معادله گویا
معادله درجه اول معادله‌ای که پس از ساده‌شدن به صورت $ax + b = 0$ درمی‌آید و در آن $a \neq 0$ می‌باشد.
 برای حل معادله درجه اول به این صورت عمل می‌کنیم:
گام اول: معلوم‌ها را به یک طرف و مجهول‌ها را به طرف دیگر تساوی می‌بریم.
گام دوم: هر طرف تساوی را تا جای ممکن ساده کرده و حاصل را می‌یابیم.
گام سوم: طرفین را بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم.

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$$

یادمون باشه در معادله درجه اول، مجهول نباید در مخرج باشد، اما ضرایب می‌توانند کسری یا رادیکالی باشند.

برای مثال معادله‌های $\sqrt{3}x + 1 = -2$ ، $\frac{3x-1}{5} - 2x = 2$ و $4x + 1 = 7x - 3$ همگی معادله درجه اول هستند، ولی معادله‌های $x^2 + 1 = 0$ ، $\sqrt{x} - 2 = 0$ و $\frac{3-x}{x+1} = 2x$ درجه اول نیستند.

تمرین به ازای کدام مقدار m ، معادله $\frac{mx-1}{3} + \frac{4x+2}{5} = \frac{m-1}{6}$ دارای ریشه $x = -3$ است؟

$$\frac{-11}{5} \quad (4) \qquad \frac{-13}{7} \quad (3) \qquad \frac{-7}{13} \quad (2) \qquad \frac{-5}{11} \quad (1)$$

پاسخ همان‌طور که گفتیم ریشه هر معادله در آن صدق می‌کند. پس به جای x در معادله، عدد -3 را جای گذاری می‌کنیم:

$$\frac{m(-3)-1}{3} + \frac{4(-3)+2}{5} = \frac{m-1}{6} \Rightarrow \frac{-3m-1}{3} - 2 = \frac{m-1}{6}$$

حالا یک معادله درجه اول ساده برحسب m داریم، به راحتی طرفین تساوی را در ۶ ضرب می‌کنیم، (از شر مخرج‌ها فاصله می‌شیم)، و m را به دست می‌آوریم:

$$6\left(\frac{-3m-1}{3}\right) - 6(2) = 6\left(\frac{m-1}{6}\right) \Rightarrow 2(-3m-1) - 12 = m-1 \Rightarrow -6m-2-12 = m-1$$

$$\Rightarrow -6m-m = -1+14 \Rightarrow -7m = 13 \Rightarrow m = \frac{-13}{7}$$



مسائل توصیفی و هندسی

مسائل توصیفی گاهی مسئله‌ای به زبان فارسی یا همراه با شکل بیان شده است. باید این دسته از مسائل را ابتدا به زبان ریاضی و به صورت جبری نوشته و سپس معادله حاصل از آن را حل کنیم. (بین مسئله دنبال پی می‌گرد، اسمش رو بذار x)

نمونه «چهار برابر عددی از نصف آن عدد، ۷ واحد بیشتر است.» آن عدد را به دست آورید.

$$2(1) \quad 2/5(2) \quad 3(3) \quad 3/5(4)$$

پس عدد مورد نظر را x می‌نامیم و معادله متناظر مسئله را تشکیل می‌دهیم:

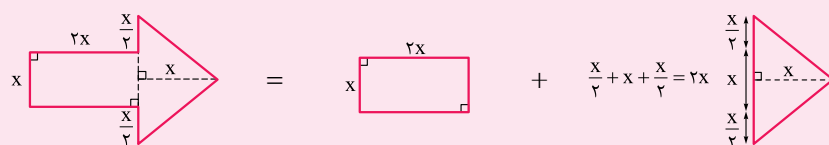
$$4x = \frac{1}{2}x + 7 \Rightarrow 4x - \frac{1}{2}x = 7 \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۲}} 8x - x = 14 \Rightarrow 7x = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{7} = 2$$

نکته جداول زیر در تبدیل مسئله به زبان ریاضی کمک زیادی به ما می‌کند.

نماد ریاضی	عبارت فارسی
$\frac{1}{\Delta + x}$	معکوس مجموع عددی با Δ
$2x + 1$	یک عدد فرد
$2x$	یک عدد زوج
$2x, 2x + 2$	دو عدد زوج متوالی
$2x - 1, 2x + 1$	دو عدد فرد متوالی
$x, x + 1$	دو عدد متوالی

نماد ریاضی	عبارت فارسی
$\frac{1}{x}$	معکوس یک عدد
$-x$	قرینه یک عدد
$b - a$	تفاضل a از b
$a = b + 2$	a ، ۲ واحد بیشتر از b است
$a = b - 3$	a ، ۳ واحد کمتر از b است
$\Delta + \frac{1}{x}$	مجموع معکوس عددی با Δ

مسائل هندسی در بعضی مسائل، سؤال‌هایی در مورد محیط، مساحت یا هر ویژگی هندسی دیگر مطرح می‌شود. اولین قدم، رسم یک شکل برای سؤال است. (آگه فودش شکل داشت که چه بهتر!) سپس شکل مسئله را به شکل‌هایی که فرمول‌های مربوط به آن‌ها را می‌دانیم (مربع، مستطیل، مثلث و ...) تقسیم می‌کنیم و معادله متناظر آن را تشکیل داده و حل می‌کنیم.



برای مثلث فرض کنید مساحت فلش روبه‌رو

برابر ۲۷ است و می‌خواهیم مقدار x را به دست می‌آوریم. برای این کار تقسیم‌بندی روبه‌رو را انجام می‌دهیم:

پس مساحت این شکل هندسی برابر است با:

$$\begin{cases} \text{مساحت مستطیل: } x(2x) = 2x^2 \\ \text{مساحت مثلث: } \frac{x(2x)}{2} = x^2 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + x^2 = 3x^2$$

$$3x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$$

بنابراین داریم:

نکته بعضی نکات و ویژگی‌های مهم شکل‌های اصلی در جدول زیر آمده است!

نام شکل	رسم هندسی	محیط	مساحت	روابط دیگر
مربع		$4x$	x^2	$d = \sqrt{2}x$
		$2\sqrt{2}d$ (قطر مربع: d)	$\frac{d^2}{2}$	
مستطیل		$2(x + y)$	xy	$d = \sqrt{x^2 + y^2}$



نام شکل	رسم هندسی	محیط	مساحت	روابط دیگر
مثلث		مجموع سه ضلع $x + y + z$	$\frac{قاعده \times ارتفاع}{2} = \frac{hz}{2}$	—
مثلث قائم الزاویه		مجموع سه ضلع $x + y + z$	$\frac{xy}{2} = \frac{zh}{2}$	$z^2 = x^2 + y^2$
دایره		$2\pi r$	πr^2	$d = 2r$

دستگاه دو معادله دو مجهولی و روش های حل آن

دستگاه دو معادله دو مجهولی گاهی اوقات مسئله به ما اطلاعاتی با دو مجهول می دهد، در این صورت باید دستگاه دو معادله دو مجهول حاصل از آن ها را حل کنیم:

روش اول: روش حذفی: در این روش با قرینه کردن یکی از مجهولات در یکی از معادله ها، آن مجهول را حذف کرده و سپس مقدار به دست آمده از آن را در یکی از معادلات به دلخواه قرار می دهیم تا مجهول دیگر به دست آید.

پایه مثال در دستگاه زیر داریم:

$$\begin{cases} x + 3y = 13 \\ 5x + y = -5 \end{cases} \xrightarrow[(-3) \text{ ضرب می کنیم}]{\text{طرفین معادله پایین را در}} \begin{cases} x + 3y = 13 \\ -15x - 3y = 15 \end{cases} \xrightarrow{\text{با هم جمع می کنیم}} -14x = 28 \Rightarrow x = -\frac{28}{14} = -2$$

حالا با جای گذاری $x = -2$ در رابطه $x + 3y = 13$ ، مقدار y را به دست می آوریم:

$$-2 + 3y = 13 \Rightarrow 3y = 13 + 2 \Rightarrow 3y = 15 \Rightarrow y = 5$$

روش دوم: روش جایگزینی: در این روش یکی از مجهولات را برحسب دیگری به دست می آوریم، سپس مقدار به دست آمده از این مجهول را در معادله دیگر جایگزین می کنیم.

پایه مثال می خواهیم معادله مقابل را به روش جایگزینی حل کنیم:

$$\begin{cases} x + 3y = 13 \Rightarrow x = 13 - 3y \\ 5x + y = -5 \end{cases} \xrightarrow[\text{جایگزینی (I)}]{x = 13 - 3y} 5(13 - 3y) + y = -5 \Rightarrow 65 - 15y + y = -5 \Rightarrow -14y = -5 - 65 \Rightarrow -14y = -70 \Rightarrow y = \frac{-70}{-14} = 5$$

$$(I) 5x + y = -5 \xrightarrow{y=5} 5x + 5 = -5 \Rightarrow 5x = -5 - 5 \Rightarrow 5x = -10 \Rightarrow x = -2$$

پرسش های چهارگزینه ای

معادله درجه اول

۱- ریشه معادله $x - 8 = \frac{x-1}{3} - \frac{x-2}{4} + 1$ چند برابر ریشه معادله $2(3x-1) - 3(x-2) = 2x-1$ است؟

(۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) -۳

۲- به ازای کدام مقدار a ، جواب معادله $ax + 3 = 2x + 3(x+1)$ ، مجموعه اعداد حقیقی است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳- اگر $x = \frac{2}{5}$ جواب معادله $3ax - 2b = 0$ باشد، جواب معادله $(a-b)x - b + 2a = 0$ کدام است؟

(۱) $\frac{7}{3}$ (۲) $-\frac{7}{3}$ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴) $-\frac{7}{2}$

مسائل توصیفی

۴- اگر به ۳ برابر عددی چهار واحد اضافه کنیم و از نصف حاصل، همان عدد را کم کنیم، حاصل برابر ۵ می شود. آن عدد کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۴ (۴) ۱۹



۵- مجموع سه عدد فرد متوالی ۱۳۵ است. مجموع ارقام عدد بزرگتر کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

۶- پدری ۴۱ ساله و فرزند او ۹ ساله است. پس از چند سال، سن پدر سه برابر سن فرزند خواهد بود؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۷- سن آرمان دو برابر سن برادرش و نصف سن پدرش است. اگر ۲۲ سال دیگر سن برادرش، نصف سن پدرش شود، سن کنونی آرمان کدام است؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۲۲ (۳) ۲۳ (۴) ۲۴

۸- سن فعلی زهرا دو برابر سن صبا و ۴ سال بیشتر از سن رؤیا است. اگر ۷ سال بعد، مجموع سن این سه نفر برابر ۷۲ سال باشد، سن فعلی رؤیا چقدر است؟

- (۱) ۱۷ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۱۴

۹- پس انداز حال حاضر آرش و نوشین به ترتیب ۱۰۰۰۰ و ۱۲۰۰۰ واحد پولی است. آرش هفته‌ای ۲۰۰۰ واحد پول و نوشین هفته‌ای ۱۵۰۰ واحد پول پس انداز می‌کنند. بعد از چند هفته پول آن‌ها مساوی می‌شود؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۰- از یک مخزن آب ابتدا $\frac{1}{3}$ آب موجود و سپس $\frac{1}{5}$ آب باقی‌مانده را خالی کردیم. بعد از این کار، مقدار آب موجود در مخزن به اندازه $\frac{1}{6}$ گنجایش آن شد. در ابتدا چه کسری از مخزن آب داشته است؟

- (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{5}{16}$ (۴) $\frac{7}{16}$

۱۱- $\frac{3}{5}$ عددی را به نسبت‌های ۳ و ۴ تقسیم کرده‌ایم. اگر عدد کوچک‌تر ۱۸ باشد، عدد اولیه کدام است؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۶۰ (۳) ۷۰ (۴) ۸۰

۱۲- در یک شرکت که دارای کارخانه است، حقوق حسابدار دو برابر حقوق کارگر خط تولید و $\frac{4}{5}$ حقوق مدیر خط تولید است. اگر این شرکت ۳ حسابدار، ۱۲ کارگر خط تولید و ۲ مدیر خط تولید داشته باشد و در هر ماه جمعاً $149\frac{4}{5}$ میلیون تومان حقوق پرداخت کند، حقوق هر کارگر خط تولید ماهیانه چند میلیون تومان است؟

- (۱) ۶ (۲) $6\frac{1}{5}$ (۳) ۷ (۴) $7\frac{1}{5}$

۱۳- x همان قدر از a کم‌تر است که b بیشتر است. کدام رابطه صحیح است؟

- (۱) $x = a + b$ (۲) $x = a - b$ (۳) $x = \frac{a-b}{2}$ (۴) $x = \frac{a+b}{2}$

۱۴- «ما و نصف ما و نیمه‌ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی جملگی ۵۰ شویم.» ما چند نفر هستیم؟

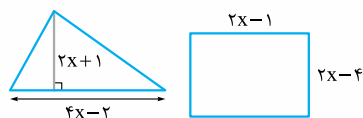
- (۱) ۲۵ (۲) ۲۶ (۳) ۲۷ (۴) ۲۸

مسائل هندسی

۱۵- اگر طول ضلع مربعی را ۴ واحد افزایش دهیم، محیط مربع جدید، ۳۰ واحد بیشتر از دو برابر طول ضلع مربع اولیه خواهد بود. محیط مربع اولیه کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۲۸ (۴) ۳۲

۱۶- اگر در شکل زیر مساحت مثلث از مساحت مستطیل ۱۱۵ واحد بیشتر باشد، محیط مستطیل کدام است؟



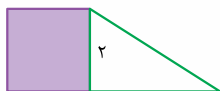
- (۱) ۸۲

- (۲) ۸۶

- (۳) ۹۰

- (۴) ۹۴

۱۷- در شکل زیر، مساحت مربع از $\frac{1}{3}$ مساحت مثلث به اندازه ۳ واحد مربع بیشتر است. مساحت دوزنقه کدام است؟ (انسانی ۱۴۰۱)



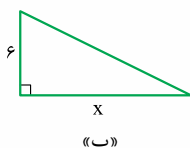
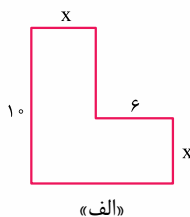
- (۱) ۵

- (۲) $5\frac{1}{5}$

- (۳) $6\frac{1}{5}$

- (۴) ۷

۱۸- اگر مساحت شکل «الف» برابر با ۱۴۴ واحد باشد، مساحت شکل «ب» کدام است؟



- (۱) ۲۱

- (۲) ۲۴

- (۳) ۲۷

- (۴) ۳۰

۹۸- ریشه‌های کدام معادله ۱ واحد از نصف ریشه‌های معادله $2x^2 - x - 3 = 0$ کم‌تر است؟

$$4x^2 - 9x + 2 = 0 \quad (1) \quad 8x^2 - 14x + 3 = 0 \quad (2) \quad 4x^2 + 9x - 2 = 0 \quad (3) \quad 8x^2 + 14x + 3 = 0 \quad (4)$$

۹۹- ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، دو واحد از ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 - 8x + 3 = 0$ بیشتر هستند. مقدار $\frac{c}{a}$ کدام است؟

$$12/5 \quad (1) \quad 13/5 \quad (2) \quad 14/5 \quad (3) \quad 15/5 \quad (4)$$

۱۰۰- معادله درجه دومی که مجموع مربعات دو ریشه آن ۱۰ و حاصل ضرب ریشه‌ها ۳ باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3 = 0 \quad (1) \quad \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0 \quad (2) \quad \frac{1}{2}x^2 - x + 3 = 0 \quad (3) \quad \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{3}{2} = 0 \quad (4)$$

معادله گویا

اگر یک تساوی شامل کسرهایی با صورت و مخرج چندجمله‌ای باشد (یعنی حداقل یک مجهول در مخرج کسر ببینیم!) آن را معادله گویا می‌گوییم.

برای مثال تساوی‌های $1 = \frac{x-1}{x-2} - \frac{x^2}{x-2}$ یا $2 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2}$ معادله‌هایی گویا هستند.

برای حل معادله گویا دو روش مطرح می‌کنیم و هر کدام را گام به گام بررسی می‌کنیم.

روش اول: به ترتیب مراحل زیر عمل می‌کنیم:

گام اول: تمام مخرج‌ها را تجزیه می‌کنیم.

گام دوم: تک‌تک عبارت‌ها را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب می‌کنیم.

گام سوم: عبارت به دست آمده را مرتب کرده و معادله جدید را حل می‌کنیم.

روش دوم: با مخرج مشترک‌گیری به تساوی $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ رسیده و با طرفین‌وسطین کردن معادله به دست آمده را حل می‌کنیم.

یادآوری باشد! جواب‌های به دست آمده را در مخرج کسره‌های معادله اولیه قرار دهیم، اگر مخرج صفر نشد، جواب‌ها قابل قبول هستند.

مسئله جواب‌های معادله‌های $\frac{2x+4}{x-4} + x = -2$ و $\frac{2x}{x-1} - \frac{x-1}{x+2} = \frac{-9}{x^2+x-2}$ چگونه‌اند؟

(۱) یک جواب مشترک مثبت دارند. (۲) یک جواب مشترک منفی دارند.

(۳) دو جواب مشترک دارند. (۴) جواب مشترک ندارند.

پاسخ در معادله اول عبارت $x^2 + x - 2$ را به شکل $(x+2)(x-1)$ تجزیه می‌کنیم، عبارت تجزیه شده ک.م.م مخرج‌هاست، پس آن را

در تمام عبارت‌ها ضرب می‌کنیم:

$$(x+2) \times \frac{2x+4}{x-4} \times \frac{x-1}{x-1} - (x+2) \times (x-1) \times \frac{x-1}{x+2} = (x+2)(x-1) \times \frac{-9}{x^2+x-2}$$

با مرتب کردن این عبارت‌ها داریم:

$$2x^2 + 4x - (x^2 - 2x + 1) = -9 \Rightarrow x^2 + 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -2 \end{cases}$$

($x = -2$ مخرج دوتا از کسرها را صفر می‌کند، پس قابل قبول نیست!)

برای حل معادله دوم، x را به طرف دیگر می‌بریم و طرفین‌وسطین می‌کنیم:

$$\frac{2x+4}{x-4} = -x-2 \Rightarrow 2x+4 = \overbrace{(-x-2)(x-4)}^{-x^2-2x+8} \Rightarrow 2x+4+x^2+2x-8=0 \Rightarrow x^2+4x-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

در نتیجه $x = \pm 2$ جواب‌های این معادله است که هر دو جواب قابل قبول هستند (زیرا هیچ کدام مخرج را صفر نمی‌کنند).

پس این دو معادله جواب مشترک ندارند.

نکته: ۱ اگر $A + \frac{1}{A} = 2$ باشد، آن‌گاه $A = 1$ است. ۲ اگر $A + \frac{1}{A} = -2$ باشد، آن‌گاه $A = -1$ است.

مسئله در معادله $-2 = \frac{2x-1}{x^2-3} + \frac{x^2-3}{3x-1}$ ، مجموع مربع معکوس ریشه‌ها کدام است؟

$$\frac{17}{16} \quad (1) \quad \frac{10}{9} \quad (2) \quad \frac{13}{36} \quad (3) \quad \frac{5}{16} \quad (4)$$

پنج اگر فرض کنیم $\frac{3x-1}{x^2-3} = A$ باشد، معادله به شکل $A + \frac{1}{A} = -2$ می شود، در نتیجه باید $A = -1$ باشد:

$$A = -1 \Rightarrow \frac{3x-1}{x^2-3} = -1 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین می کنیم}} 3x-1 = -(x^2-3) \Rightarrow 3x-1 = -x^2+3$$

$$\Rightarrow x^2+3x-4=0 \Rightarrow (x-1)(x+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-4 \end{cases} \quad \text{پس داریم:}$$

$$\left(\frac{1}{1}\right)^2 + \left(\frac{-1}{4}\right)^2 = 1 + \frac{1}{16} = \frac{17}{16} \quad \text{پس مجموع مربع معکوس ریشه ها برابر است با:}$$

کاربرد معادلات گویا

فب: آگاهی در مسائل توصیفی، یک معادله گویا ایجاد می شود، مهم ترین این مسئله ها رو در سه لم زیر می بینیم!

لم: شخص A کاری را در مدت زمان x و شخص B همان کار را در مدت زمان y انجام می دهد. در این صورت اگر این دو با هم همان کار را در

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{t} \Rightarrow \boxed{t = \frac{xy}{x+y}} \quad \text{مدت زمان t انجام دهند، داریم:}$$

برای مثال اگر زهرا مجله ای را در ۱۰ ساعت و رؤیا همان مجله را در ۸ ساعت تایپ کند، زمانی که این دو با هم پروژه را به اتمام می رسانند، برابر

$$t = \frac{8 \times 10}{8+10} = \frac{80}{18} = \frac{40}{9} = 4 \frac{4}{9} \quad \text{است با:}$$

لم: ترکیبی از دو ماده A به مقدار x و B به مقدار y داریم. اگر a واحد به ماده A اضافه کنیم، داریم:

$$\frac{A \text{ وزن}}{B \text{ وزن}} = \frac{x+a}{y}, \quad \frac{A \text{ وزن}}{\text{کل ترکیب}} = \frac{x+a}{x+y+a}$$

برای مثال اگر محلولی متشکل از ۲۰ گرم نمک و ۱۰۰ گرم آب داشته باشیم، با اضافه کردن ۵ گرم نمک به این محلول:

$$\frac{\text{نمک}}{\text{کل}} = \frac{20+5}{100+20+5} = \frac{25}{125} = \frac{1}{5} \quad \text{یعنی } \frac{1}{5} \times 100 = 20\% \text{ محلول جدید را نمک تشکیل می دهد.}$$

لم: اگر بخواهیم یک شیء را بین n نفر تقسیم کنیم و سپس a نفر دیگر به این افراد اضافه شود و بخواهیم همان شیء را بین افراد (n+a) نفر تقسیم کنیم، داریم:

$$\text{اختلاف سهم هر نفر} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+a}$$

برای مثال در یک جشن تولد شش نفر حاضر هستند و می خواهیم بین آن ها کیک تقسیم کنیم. اگر دو نفر دیگر به مهمانی اضافه شوند:

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{8-6}{6 \times 8} = \frac{2}{48} = \frac{1}{24} \quad \text{یعنی به اندازه } \frac{1}{24} \text{ به هر فرد، کمتر از بار اول کیک می رسد.}$$

$$\text{اختلاف سهم هر نفر} = \frac{1}{n-a} - \frac{1}{n}$$

حال اگر از آن n نفر، a نفر خارج شوند (n-a نفر در حالت جدید)، خواهیم داشت:

مسئله تعدادی سکه را بین تعدادی از افراد تقسیم کردیم اما ۳ نفر از قبول سکه ها خودداری کرده و محل را ترک کردند. اگر به هر فرد در حالت جدید به اندازه $\frac{1}{18}$ بیشتر از دفعه اول سکه رسیده باشد، تعداد افراد در حالت اولیه چند نفر بوده است؟

$$\begin{matrix} 9 (1) & 6 (2) & 12 (3) & 8 (4) \end{matrix}$$

پنج ابتدا تعداد نفرات در هر حالت و سهم هر فرد را تعیین می کنیم:

$$\left. \begin{aligned} n \text{ نفر در حالت اولیه} &\Leftarrow \text{سهم هر فرد } \frac{1}{n} \\ n-3 \text{ نفر در حالت جدید} &\Leftarrow \text{سهم هر فرد } \frac{1}{n-3} \end{aligned} \right\}$$

حالا طبق فرض مسئله اختلاف سهم ها در این دو حالت برابر $\frac{1}{18}$ است، پس می توان نوشت:

$$\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{n-(n-3)}{n(n-3)} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{3}{n(n-3)} = \frac{1}{18} \Rightarrow n(n-3) = 54 \Rightarrow n^2 - 3n - 54 = 0$$

$$\Rightarrow (n-9)(n+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n-9=0 \Rightarrow n=9 \text{ نفر} \\ n+6=0 \Rightarrow n=-6 \text{ غیر قابل قبول (تعداد نفرات منفی نیست).} \end{cases}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

معادله گویا

۱۰۱- در مورد معادله $\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} = 2$ کدام گزینه صحیح است؟

(۱) یک ریشه مثبت دارد. (۲) یک ریشه منفی دارد.

(۳) دو ریشه مثبت و منفی دارد. (۴) ریشه ندارد.

۱۰۲- جواب‌های معادله $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$ چگونه‌اند؟

(۱) فاقد ریشه (۲) یک جواب مثبت (۳) یک جواب منفی (۴) دو جواب وارون هم

۱۰۳- در معادله $\frac{x-6}{x-2} - \frac{x^2-4x}{x-2} - 2x = 0$ ریشه‌ها چگونه‌اند؟

(۱) دو ریشه مساوی (۲) دو ریشه قرینه (۳) دو ریشه وارون هم (۴) فقط یک ریشه دارد.

۱۰۴- در معادله $\frac{x^2}{x-2} - \frac{8-2x}{x-2} = 2x + \frac{3}{2}$ تفاضل جواب از معکوس خود برابر کدام است؟

(۱) $\frac{10}{21}$ (۲) $-\frac{21}{10}$ (۳) $\frac{21}{10}$ (۴) $-\frac{10}{21}$

۱۰۵- ریشه کوچک‌تر معادله $\frac{x^2+1}{3x-1} = 2 - \frac{3x-1}{x^2+1}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۰۶- به ازای کدام مقدار a ، ریشه معادله $\frac{3x-7}{4x+2} - \frac{3x-14}{4x-13} = 0$ یکی از ریشه‌های معادله $ax^2 - 5x - 14 = 0$ است؟

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) ۲

۱۰۷- معادله $\frac{1}{x^3+x^2} = \frac{2}{x+1}$ چند ریشه دارد؟

(۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه

۱۰۸- مجموع مکعبات دو ریشه معادله $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x-4}{2x} = \frac{6}{2x^2-2x}$ کدام است؟

(۱) $\frac{17}{27}$ (۲) $\frac{19}{27}$ (۳) $\frac{7}{8}$ (۴) $\frac{5}{8}$

(انسانی قارج ۹۹)

۱۰۹- قدرمطلق تفاضل ریشه‌های معادله $\frac{x-3}{x-4} + \frac{1}{2x-2} = \frac{2}{3}$ کدام است؟

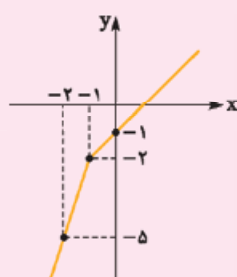
(۱) ۴ (۲) $4/5$ (۳) $5/5$ (۴) ۵

۱۱۰- اختلاف ریشه‌های معادله $\frac{x}{2x-1} + \frac{x-1}{2x+1} = \frac{9}{4x^2-1}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{31}$ (۲) $\sqrt{33}$ (۳) $\frac{\sqrt{31}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{33}}{2}$

۱۱۱- قدرمطلق تفاضل دو ریشه معادله $\frac{3x-2}{x+2} + \frac{3x^2-7x}{4-x^2} = \frac{x-1}{x-2}$ کدام است؟

(۱) $2\sqrt{7}$ (۲) $2\sqrt{5}$ (۳) $3\sqrt{7}$ (۴) $3\sqrt{5}$



$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x < -1 \\ x-1 & x \geq -1 \end{cases}$$

x	-1	0
y	-2	-1

x	-2	-1
y	-5	-2

پس ضابطه تابع $f(x)$ به شکل زیر است که می‌توانیم نمودار هر ضابطه را به کمک نقطه‌یابی رسم کنیم:

مسئله شکل زیر، نمودار کدام تابع است؟

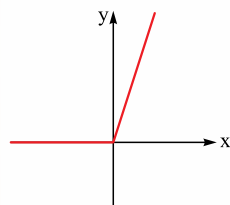
$$y = x - |x| \quad (1)$$

$$y = x + |x| \quad (2)$$

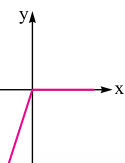
$$y = |x-1| - 1 \quad (3)$$

$$y = 1 - |x-1| \quad (4)$$

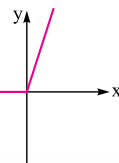
نمودار هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم.



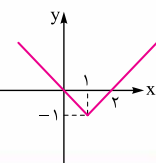
$$(1) \text{ گزینه } y = x - |x| = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$



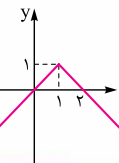
$$(2) \text{ گزینه } y = x + |x| = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$



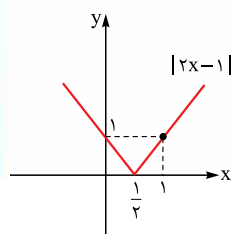
$$(3) \text{ گزینه } y = |x-1| - 1 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & -1 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow$$



$$(4) \text{ گزینه } y = 1 - |x-1| \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 0 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow$$



مسئله مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $f(x) = |2x-1|$ ، محور x ‌ها و دو خط $x=1$ و $x=-1$ کدام است؟



۳ (۴)

$\frac{5}{2}$ (۳)

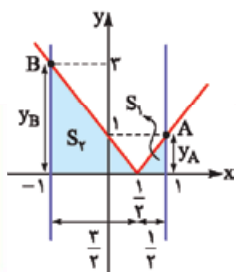
۲ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

نمودار تابع $f(x) = |2x-1|$ را به روش نقطه‌یابی رسم می‌کنیم:

x	0	$\frac{1}{2}$	1
y	1	0	1

حالا خطوط $x=1$ و $x=-1$ را رسم می‌کنیم تا ناحیه خواسته شده مشخص شود:



$$y_A = f(1) = |2(1)-1| = 1$$

حالا مقدار y_A و y_B را به دست می‌آوریم:

$$y_B = f(-1) = |2(-1)-1| = 3$$

پس مساحت ناحیه رنگی برابر مجموع مساحت دو مثلث می‌باشد:

$$S_{\text{کل}} = S_1 + S_2 = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{2} + \frac{3 \times \frac{3}{2}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

انتقال در این بخش می‌خواهیم از روی نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودارهای جدیدی رسم کنیم. برای این کار دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$y = f(x+k) \quad (2)$$

$$y = f(x) + k \quad (1)$$

قبل از بررسی این حالت‌ها، همیشه ابتدا بررسی می‌کنیم که k روی x تأثیر می‌گذارد یا روی y .

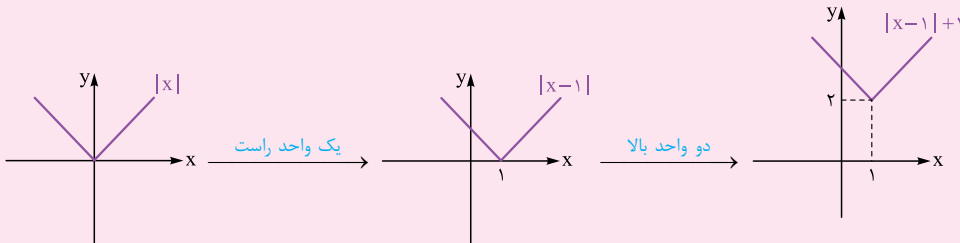
مهم‌ترین نکته این است که؛

تغییرات روی y مستقیم است ولی تغییرات روی x برعکس می‌باشد.

۱ $y = f(x) + k$: اول از همه این که k روی y تأثیر می‌گذارد (نه روی x) و چون گفتیم تغییرات روی y مستقیم است، پس برای رسم تابع $y = f(x) + k$ از روی $y = f(x)$ ، اگر $k > 0$ باشد، $f(x)$ به اندازه k واحد بالا می‌رود و اگر $k < 0$ باشد، $f(x)$ به اندازه k واحد پایین می‌آید.

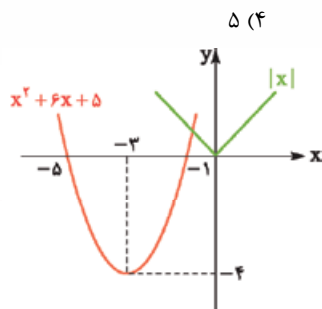
۲ $y = f(x + k)$: در این حالت k روی x تأثیر می‌گذارد. همان‌طور که گفتیم تغییرات روی x برعکس است. پس برای رسم تابع $y = f(x + k)$ از روی $y = f(x)$ ، اگر $k > 0$ باشد، $f(x)$ به اندازه k واحد به سمت چپ می‌رود (برعکس!) و اگر $k < 0$ باشد، $f(x)$ به سمت راست می‌رود.

برای مثال فرض کنید برای رسم $f(x) = |x - 1| + 2$ می‌خواهیم از روش انتقال استفاده کنیم.



مسئله نمودار $y = x^2 + 6x + 5$ را حداقل چند واحد به سمت راست حرکت دهیم تا طول دو نقطه مشترک آن با نمودار $y = |x|$ نامنفی باشد؟

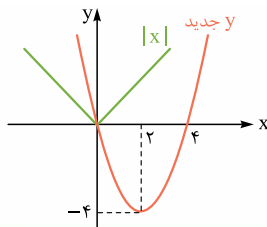
(انسانی دافل ۱۴۱۰)



ابتدا نمودار دو تابع $y = x^2 + 6x + 5$ و $y = |x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

$$y = x^2 + 6x + 5 \Rightarrow \begin{cases} \text{رأس: } x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3 \Rightarrow y_S = (-3)^2 + 6(-3) + 5 = -4 \\ \text{ریشه‌ها: } x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x+1)(x+5) = 0 \Rightarrow x = -1, x = -5 \end{cases}$$

حالا می‌خواهیم نمودار $y = x^2 + 6x + 5$ را به سمت راست انتقال دهیم تا نمودار $|x|$ را در بخش منفی‌ها قطع نکند، پس کافی است سهمی را حداقل ۵ واحد به سمت راست (جدید) انتقال دهیم.



اعمال جبری روی توابع

اگر بخواهیم با داشتن دو تابع f و g توابع $f + g$ ، $f - g$ ، $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ را تشکیل دهیم، برای این کار چند مطلب بسیار مهم وجود دارد:

- اولین کار این است که اشتراک دامنه‌های دو تابع f و g را به دست آوریم.
- دومین نکته در این بخش این است که هرگز مخرج هیچ کسری نباید صفر باشد.
- مسائل این بخش را در چند قسمت مختلف بررسی می‌کنیم.

۱) اعمال جبری در نمایش زوج مرتبی

x های مشترک (مؤلفه اول) را پیدا کرده و عملیات‌های خواسته‌شده (جمع، ضرب، تفریق یا تقسیم) را روی y (مؤلفه دوم) آن‌ها اعمال می‌کنیم.

برای مثال فرض کنید با داشتن توابع $f = \{(5, 3), (1, 5), (3, 4), (6, 2)\}$ و $g = \{(3, 2), (5, 6), (1, 2), (2, 1)\}$ می‌خواهیم تابع $\frac{f+g}{f}$ را به دست آوریم.

برای این کار ابتدا مؤلفه‌های اول مشترک را مشخص کرده (اشتراک دامنه‌ها) و سپس حاصل $\frac{f+g}{f}$ را به دست می‌آوریم.

دامنه مشترک دو تابع برابر است با:

$$\begin{cases} D_f = \{5, 1, 3, 6\} \\ D_g = \{3, 5, 1, 2\} \end{cases} \Rightarrow D_f \cap D_g = \{1, 3, 5\}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} (1, 5) \in f \\ (1, 2) \in g \end{cases} \xrightarrow{x=1} \frac{f+g}{f} = \frac{5+2}{5} = \frac{7}{5} = 1/4 \Rightarrow (1, 1/4)$$

$$\begin{cases} (3, 4) \in f \\ (3, 2) \in g \end{cases} \xrightarrow{x=3} \frac{f+g}{f} = \frac{4+2}{4} = \frac{6}{4} = 1/5 \Rightarrow (3, 1/5)$$

$$\begin{cases} (5, 3) \in f \\ (5, 6) \in g \end{cases} \xrightarrow{x=5} \frac{f+g}{f} = \frac{3+6}{3} = \frac{9}{3} = 3 \Rightarrow (5, 3)$$

$$\{(1, 1/4), (3, 1/5), (5, 3)\}$$

پس تابع $\frac{f+g}{f}$ به شکل روبه‌رو است:**۱۷) اعمال جبری در نمایش ضابطه‌ای**اگر دو تابع f و g به شکل ضابطه به ما داده شده باشند، به کمک جدول زیر مسائل این قسمت را حل می‌کنیم:

ضابطه	دامنه
$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g$
$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	$D_{f-g} = D_f \cap D_g$
$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$	$D_{f \times g} = D_f \cap D_g$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$

تست ۱ اگر $f(x) = (|a| - |b|)x$ تابع همانی، $g(x) = (b^2 - 1)x + (a^2 + 1)c$ تابعی ثابت و $(f - g)(x) = x + 5$ باشند، چند مقدار برای

ac وجود دارد؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) $|a| - |b| = 1$ (*) تابع $f(x) = (|a| - |b|)x$ ، تابع همانی است، پس ضریب x باید برابر ۱ باشد:

۲ تابع $(f - g)(x)$ را داریم: $(f - g)(x) = x + 5 \xrightarrow{\text{همانی } f} \underbrace{f(x)}_x - g(x) = x + 5 \Rightarrow -g(x) = 5 \Rightarrow g(x) = -5$

۳ تابع $g(x) = (b^2 - 1)x + (a^2 + 1)c$ تابعی ثابت با ضابطه $g(x) = -5$ است. در تابع ثابت، ضریب x همواره صفر است (این‌جا هم همین

است) و با توجه به ضابطه g ، عدد $(a^2 + 1)c$ باید برابر -5 باشد:

$$(b^2 - 1)x + (a^2 + 1)c \Rightarrow \begin{cases} b^2 - 1 = 0 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1 \\ (a^2 + 1)c = -5 \end{cases} (**)$$

حالا باید $b = 1$ و $b = -1$ را در (*) قرار دهیم و بعد مقدار a به دست آمده را در (**) بگذاریم:

حالت اول: $b = 1 \xrightarrow{*} |a| - |1| = 1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2 \xrightarrow{**} (a^2 + 1)c = -5 \Rightarrow 5c = -5 \Rightarrow c = -1$

در هر دو حالت ۵ می‌شه

حالت دوم: $b = -1 \xrightarrow{*} |a| - |-1| = 1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2 \xrightarrow{**} (a^2 + 1)c = -5 \Rightarrow 5c = -5 \Rightarrow c = -1$

در هر دو حالت ۵ می‌شه

$$\begin{cases} ac = 2 \times (-1) = -2 \\ ac = (-2) \times (-1) = 2 \end{cases}$$

پس در هر دو حالت از $a = \pm 2$ به $c = -1$ می‌رسیم. در نتیجه برای ac دو مقدار وجود دارد:**۱۸) اعمال جبری در توابع چندضابطه‌ای** در بازه‌های مشترک، ضابطه‌های داده‌شده را با هم جمع، تفریق یا ... می‌کنیم.

بانی مثال فرض کنید $f = \{(0, 1), (-1, \frac{3}{2}), (2, 4)\}$ و $g(x) = \begin{cases} 5-x^2 & x \leq 1 \\ 2x-1 & x > 1 \end{cases}$ می‌باشند و می‌خواهیم تابع $f + 2g$ را به دست آوریم. برای این کار در دامنه مشترک دو تابع، مقدار $f + 2g$ را حساب می‌کنیم:

$$D_f = \{0, -1, 2\}, D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_f \cap D_g = \{0, -1, 2\}$$

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \\ g(0) = 5 - (0)^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow (f + 2g)(0) = f(0) + 2g(0) = 1 + 2(5) = 11$$

$$x = -1 \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = \frac{3}{2} \\ g(-1) = 5 - (-1)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow (f + 2g)(-1) = f(-1) + 2g(-1) = \frac{3}{2} + 2(4) = \frac{19}{2}$$

$$x = 2 \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 4 \\ g(2) = 2(2) - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow (f + 2g)(2) = f(2) + 2g(2) = 4 + 2(3) = 10$$

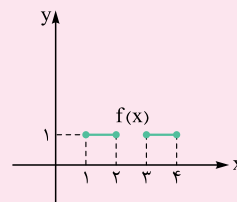
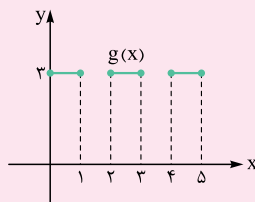
پس $f + 2g = \{(0, 11), (-1, \frac{19}{2}), (2, 10)\}$ می‌باشد.

(۴) اعمال چپری در نمایش نموداری

ابتدا دامنه توابع f و g را مشخص می‌کنیم، سپس به کمک روابطی که در قسمت‌های قبلی با هم دیدیم، دامنه و ضابطه تابع خواسته شده را به دست می‌آوریم.

نقطه یابی هم می‌تونه کمک زیادی به رسم نمودار در این قسمت بکنه.

بانی مثال اگر فرض کنیم نمودار توابع f و g به شکل زیر باشد، برای محاسبه تابع و رسم نمودار $f \times g$ و $f - g$ داریم:



با توجه به شکل‌های توابع f و g رسم شده، ابتدا دامنه توابع $f(x)$ و $g(x)$ را می‌یابیم، سپس در دامنه‌های مشترک به سراغ محاسبه ضابطه و رسم نمودار توابع $f \times g$ و $f - g$ می‌رویم:

$$\begin{cases} D_f = 1 \leq x \leq 2, 3 \leq x \leq 4 \\ D_g = 0 \leq x \leq 1, 2 \leq x \leq 3, 4 \leq x \leq 5 \end{cases} \Rightarrow D_g \cap D_f = \{1, 2, 3, 4\}$$

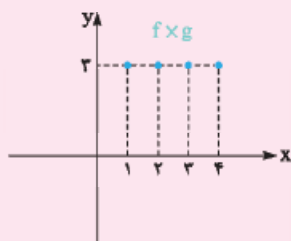
$$x = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 1 \\ g(1) = 3 \end{cases} \Rightarrow (f \times g)(1) = f(1) \times g(1) = 3, (f - g)(1) = f(1) - g(1) = 1 - 3 = -2$$

$$x = 2 \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 1 \\ g(2) = 3 \end{cases} \Rightarrow (f \times g)(2) = f(2) \times g(2) = 3, (f - g)(2) = f(2) - g(2) = 1 - 3 = -2$$

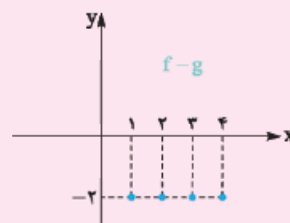
$$x = 3 \Rightarrow \begin{cases} f(3) = 1 \\ g(3) = 3 \end{cases} \Rightarrow (f \times g)(3) = f(3) \times g(3) = 3, (f - g)(3) = f(3) - g(3) = 1 - 3 = -2$$

$$x = 4 \Rightarrow \begin{cases} f(4) = 1 \\ g(4) = 3 \end{cases} \Rightarrow (f \times g)(4) = f(4) \times g(4) = 3, (f - g)(4) = f(4) - g(4) = 1 - 3 = -2$$

بنابراین ضابطه و نمودارهای $f \times g$ و $f - g$ به صورت زیر است:



$$f \times g = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3)\}$$



$$f - g = \{(1, -2), (2, -2), (3, -2), (4, -2)\}$$

۲۱۹- کدام گزینه عبارت‌های زیر را به درستی تکمیل می‌کند؟

الف) اگر f تابع خطی باشد، به طوری که $f(0) = a$ و $f(a) = 0$ باشد، آن‌گاه تابع $g(x) = f(a-x)$ ، تابعی است.

ب) نمودار تابع $y = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2$ نمودار یک تابع است.

- (۱) الف (ثابت)، ب (ثابت) (۲) الف (همانی)، ب (همانی) (۳) الف (ثابت)، ب (همانی) (۴) الف (همانی)، ب (ثابت)

۲۲۰- اگر $f(x) = \frac{(a-1)x+a}{(a+2)x+a+1}$ ، تابعی ثابت باشد، $a+f(a)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

۲۲۱- تابع $\begin{cases} f: A \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4} + x \end{cases}$ تابعی ثابت است. A کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\{x | x \in \mathbb{R}, -2 < x < 0\}$ (۲) $\{x | x \in \mathbb{R}, 0 < x < 2\}$ (۳) $\{x | x \in \mathbb{R}, -4 < x < -2\}$ (۴) $\{x | x \in \mathbb{R}, 2 < x < 4\}$

۲۲۲- اگر تابع $f(x) = \frac{(2x-3)^2 + a}{bx+c}$ ، تابعی همانی باشد، $f(a+b+c)$ کدام است؟

- (۱) -14 (۲) -15 (۳) -16 (۴) -17

۲۲۳- اگر f تابعی همانی، g تابعی ثابت و $\frac{g(f(a^2)) + 4g(3)}{f(f(a^2+1)) - f(a-3)f(a+3)} = 6$ باشد، حاصل $f(g(a))$ کدام است؟

- (۱) 3 (۲) -3 (۳) 12 (۴) -12

۲۲۴- اگر f تابعی همانی با دامنه $a-1 \leq x < b+3$ و $a-1 \leq y < 2a+1$ باشد، $a+b$ کدام است؟

- (۱) 10 (۲) 9 (۳) 8 (۴) 7

۲۲۵- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + (ax+b)$ با دامنه $x \leq 1$ ، تابعی همانی باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) -1 (۳) 3 (۴) -3

۲۲۶- سطح محصور بین تابع همانی f ، توابع $g(x) = c$ ، $h(x) = c+4$ و محور y ها برابر با 20 واحد مربع است. c کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 5

۲۲۷- اگر تابع همانی f را a واحد به سمت راست ببریم، آن‌گاه فقط یک نقطه مشترک با سهمی $y = x^2$ دارد. a کدام است؟

- (۱) 1 (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۲۲۸- زوج مرتب $(f(a) + f(-2a), 3a^2 - a - 21)$ روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم قرار دارد. اگر f تابعی همانی باشد، مجموع معکوس مقادیر ممکن برای a کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{21}$ (۲) $-\frac{2}{21}$ (۳) $\frac{1}{21}$ (۴) $-\frac{1}{21}$

۲۲۹- برای برخی مقادیر x ، زوج مرتب $(f(x) + f(-x), 3x^2 - 17x + 10)$ ، روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم قرار دارد. اگر تابع f همانی با دامنه $\mathbb{R}$ باشد، اختلاف مقادیر x کدام است؟

(انسانی نوبت اول ۱۴۰۲)

- (۱) $\frac{7}{2}$ (۲) $\frac{10}{3}$ (۳) $\frac{12}{3}$ (۴) $\frac{17}{3}$

تابع چندضابطه‌ای

۲۳۰- در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{2} & x \geq 1 \\ 2x + \sqrt{2} & x < 1 \end{cases}$ ، مقدار $f(3 - \sqrt{2}) + f(3 - 2\sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) 4 (۲) $\sqrt{2}$ (۳) 2 (۴) 3

۲۳۱- هرگاه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x > 1 \\ x^2 - x & x < 1 \end{cases}$ و $f(\frac{5}{4}) = a$ باشد، آن‌گاه $f(a)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{3}{4}$

۲۳۲- در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & x \geq 2 \\ ax^3 - 15 & -1 \leq x \leq 2 \\ bx - 6 & x \leq -1 \end{cases}$ ، حاصل $f(-3) - f(1)$ کدام است؟

- (۱) 26 (۲) -26 (۳) 33 (۴) -33

$$۲۳۳- \text{در تابع } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a & x \geq a \\ -x^2 - x - 2 & x \leq a \end{cases} \text{ مقدار } f(2a) \text{ کدام است؟}$$

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۸ (۴) -۸

$$۲۳۴- \text{در تابع } f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & x < 0 \\ x^2 - 2x & x \geq 0 \end{cases} \text{ اگر } f(a) = -1 \text{ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای } a \text{ کدام است؟}$$

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

$$۲۳۵- \text{در تابع } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases} \text{ اگر } -f(x) = a \text{ باشد، } f(a) \text{ کدام است؟}$$

- (۱) ۱ (۲) $x+1$ (۳) x^2+1 (۴) $(x^2+1)^2+1$

$$۲۳۶- \text{برد تابع } f(x) = \begin{cases} 1-x & x < 0 \\ x^2-1 & x \geq 0 \end{cases} \text{ کدام است؟}$$

- (۱) $y \in \mathbb{R}$ (۲) $-1 \leq y \leq 1$ (۳) $y \geq 1$ (۴) $y \geq -1$

$$۲۳۷- \text{برد تابع } f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ -4x-3 & x \leq 0 \end{cases} \text{ به صورت } y \geq a \text{ و } (a \in \mathbb{R}) \text{ است. حاصل } 2f(a-1) - f(a) \text{ کدام است؟}$$

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۵ (۳) ۱۷ (۴) ۱۹

$$۲۳۸- \text{برد تابع } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x \leq 0 \\ -x+k & x > 0 \end{cases} \text{ مجموعه اعداد حقیقی است. حداقل مقدار } k \text{ کدام است؟}$$

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۱

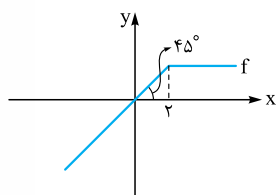
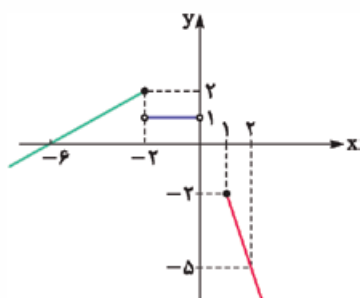
$$۲۳۹- \text{نمودار یک تابع چندضابطه‌ای به صورت مقابل است. حاصل } 2f(-\frac{7}{4}) + f(\frac{5}{3}) - f(-4) \text{ کدام است؟}$$

(۱) ۲

(۲) -۲

(۳) ۳

(۴) -۳



$$۲۴۰- \text{اگر نمودار تابع } f(x) = \begin{cases} (b+c+e)x + \frac{k}{e} & x \geq a \\ a(x+1)^2 + bx^2 + cx + d & x < a \end{cases} \text{ به صورت زیر باشد، } k \text{ کدام است؟}$$

(۱) ۸

(۲) -۸

(۳) ۱۰

(۴) -۱۰

توابع پلکانی (تابع علامت و جزء صحیح)

$$۲۴۱- \text{اگر } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{\sqrt{x+5}} & -4 \leq x < -\frac{2}{3} \\ |\frac{1}{3}x+1| & x \geq -\frac{2}{3} \end{cases} \text{ آن گاه حاصل } f(\text{sign}(2-\sqrt{3})) - f(\text{sign}(3-\sqrt{10})) \text{ کدام است؟}$$

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) -۱

$$۲۴۲- \text{مساحت محدود به نمودار تابع همانی و تابع علامت با محورهای مختصات کدام است؟}$$

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

$$۲۴۳- \text{کدام گزینه، نمودار تابع } y = \text{sign}(x^2+1) \text{ را به درستی نشان می‌دهد؟}$$

