

فصل دوم: مثلثات

در یک مثلث قائم الزاویه، نسبت های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت های مثلثاتی می نامیم.

مثال

خانم جلالی از دانش آموزان خواست تا نسبت های مثلثاتی زاویه 45° را حساب کنند. او ابتدا یک مربع با اضلاعی به طول ۱ واحد رسم کرد و از دانش آموزان خواست تا قطر AC را رسم کرده و سپس طول آن را حساب کنند.

فریبا: با توجه به اینکه مثلث ADC قائم الزاویه است، داریم $(AD)^2 + (DC)^2 = (AC)^2$. در **نتیجه** $(AC)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ و از این رو $(AC)^2 = 2$. چون اندازه قطر همواره عددی مثبت است، پس $AC = \sqrt{2}$.

معلم: با توجه به اینکه مثلث ADC متساوی الساقین است، از این رو $\hat{A}_1 = \hat{C}_1 = \dots\dots\dots$.

بینا: طبق تعریف سینوس، $\sin A_1 = \sin 45^\circ = \frac{DC}{\text{وتر}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.

سبا: من هم می توانم با توجه به روابط یالا کسینوس 45° را پیدا کنم.

$$\cos A_1 = \cos 45^\circ = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

مریم: اکنون در مثلث قائم الزاویه ADC، طبق تعریف داریم

$$\tan A_1 = \tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1 \text{ و } \cot A_1 = \cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1.$$

کار در کلاس

به کمک شکل فعالیت قبل، با پیدا کردن نسبت های مثلثاتی زاویه های 30° و 60° ، جدول زیر را کامل کنید (در صورت لزوم، کسر ها را گویا کنید).

مقدار	30°	45°	60°
$\sin A$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\cos A$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\tan A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
$\cot A$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

فصل دوم: مثلثات

در یک مثلث قائم الزاویه، نسبت های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت های مثلثاتی می نامیم.

مثال

خانم جلالی از دانش آموزان خواست تا نسبت های مثلثاتی زاویه 45° را حساب کنند. او ابتدا یک مربع با اضلاعی به طول ۱ واحد رسم کرد و از دانش آموزان خواست تا قطر AC را رسم کرده و سپس طول آن را حساب کنند.

فریبا: با توجه به اینکه مثلث ADC قائم الزاویه است، داریم $(AD)^2 + (DC)^2 = (AC)^2$. در **نتیجه** $(AC)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ و از این رو $(AC)^2 = 2$. چون اندازه قطر همواره عددی مثبت است، پس $AC = \sqrt{2}$.

معلم: با توجه به اینکه مثلث ADC متساوی الساقین است، از این رو $\hat{A}_1 = \hat{C}_1 = \dots\dots\dots$.

بینا: طبق تعریف سینوس، $\sin A_1 = \sin 45^\circ = \frac{DC}{\text{وتر}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.

سبا: من هم می توانم با توجه به روابط یالا کسینوس 45° را پیدا کنم.

$$\cos A_1 = \cos 45^\circ = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

مریم: اکنون در مثلث قائم الزاویه ADC، طبق تعریف داریم

$$\tan A_1 = \tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1 \text{ و } \cot A_1 = \cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1.$$

کار در کلاس

به کمک شکل فعالیت قبل، با پیدا کردن نسبت های مثلثاتی زاویه های 30° و 60° ، جدول زیر را کامل کنید (در صورت لزوم، کسر ها را گویا کنید).

مقدار	30°	45°	60°
$\sin A$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\cos A$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\tan A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
$\cot A$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

فصل دوم: مثلثات

درس سوم: روابط بین نسبت های مثلثاتی

در درس های قبل با نسبت های مثلثاتی و دایره مثلثاتی آشنا شدید. در این درس روابطی بین این نسبت ها و کاربردهایی از آنها را بیان می کنیم.

فعالیت

مثلث قائم الزاویه ABC را در نظر بگیرید.

الف اندازه وتر یعنی x را بیابید و سپس مقدار عددی هر یک از چهار نسبت مثلثاتی را برای زاویه θ و α به دست آورید.

$$\sin \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{\dots}$$

$$\cos \theta = \dots$$

$$\tan \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \dots$$

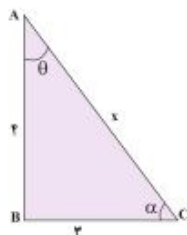
$$\cot \theta = \frac{1}{\dots} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \dots$$

$$\sin \alpha = \dots$$

$$\cos \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{\dots}$$

$$\tan \alpha = \frac{AB}{BC} = \dots$$

$$\cot \alpha = \dots$$



ب با توجه به مقادیر عددی حاصل در قسمت (الف) مقدار $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ و $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ را به دست آورید.

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = (\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$$

پ درستی رابطه $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ را با استفاده از تعریف و اضلاع مثلث، بررسی کنید.

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \dots$$

ت مشابه قسمت (پ) درستی رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ را بررسی کنید.

فصل دوم: مثلثات

درس سوم: روابط بین نسبت های مثلثاتی

در درس های قبل با نسبت های مثلثاتی و دایره مثلثاتی آشنا شدید. در این درس روابطی بین این نسبت ها و کاربردهایی از آنها را بیان می کنیم.

فعالیت

مثلث قائم الزاویه ABC را در نظر بگیرید.

الف اندازه وتر یعنی x را بیابید و سپس مقدار عددی هر یک از چهار نسبت مثلثاتی را برای زاویه θ و α به دست آورید.

$$\sin \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{\dots}$$

$$\cos \theta = \dots$$

$$\tan \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \dots$$

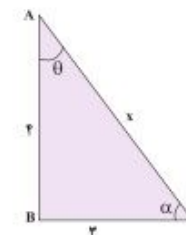
$$\cot \theta = \frac{1}{\dots} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \dots$$

$$\sin \alpha = \dots$$

$$\cos \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{\dots}$$

$$\tan \alpha = \frac{AB}{BC} = \dots$$

$$\cot \alpha = \dots$$



ب با توجه به مقادیر عددی حاصل در قسمت (الف) مقدار $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ و $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ را به دست آورید.

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = (\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$$

پ درستی رابطه $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ را با استفاده از تعریف و اضلاع مثلث، بررسی کنید.

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \dots$$

ت مشابه قسمت (پ) درستی رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ را بررسی کنید.

نمایش نموداری مجموعه‌ها

مجموعه این مقادیر را که در نمودار صفحه قبل مشخص کرده‌اید، به صورت بازه بنویسید.

۳ با استفاده از مراحل بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$\begin{aligned} \{x \mid x \leq 3\} &\Rightarrow \dots \leq x \dots \Rightarrow \text{مجموعه جواب (به شکل بازه)} \\ \{x \mid x \geq 3\} &\Rightarrow \dots \leq x \dots \Rightarrow \text{مجموعه جواب (به شکل بازه)} \end{aligned}$$

فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد. در این صورت

$$1- \text{اگر } |u| \leq a \text{ آن گاه } -a \leq u \leq a.$$

$$2- \text{اگر } |u| \geq a \text{ آن گاه } u \geq a \text{ یا } u \leq -a.$$

مثال

نامعده‌های زیر را حل می‌کنیم.

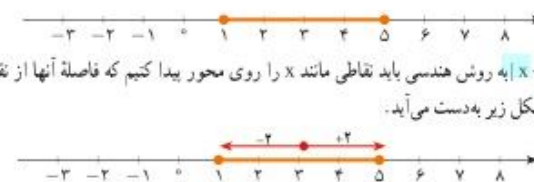
$$\text{الف) } |x - 3| \leq 2$$

$$\text{ب) } |2x - 1| > 5$$

برای حل نامعادله الف، با استفاده از خواص قدر مطلق آن را به یک نامعادله دوگانه تبدیل می‌کنیم: $-2 \leq x - 3 \leq 2$ اکنون داریم:

$$-2 \leq x - 3 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5$$

پس مجموعه جواب این نامعادله، بازه $[1, 5]$ است و نمایش هندسی آن به صورت زیر است.



برای حل نامعادله $|x - 3| \leq 2$ به روش هندسی باید نقاطی مانند x را روی محور پیدا کنیم که فاصله آنها از نقطه ۳، حداکثر دو باشد. بنابراین بازه $[1, 5]$ ، مطابق شکل زیر به دست می‌آید.

برای حل نامعادله ب نیز از خواص قدر مطلق استفاده می‌کنیم و داریم:

$$|2x - 1| > 5 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 > 5 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3 \\ 2x - 1 < -5 \Rightarrow 2x < -4 \Rightarrow x < -2 \end{cases}$$

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله عبارت است از: $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ و نمایش هندسی آن جواب نیز به صورت زیر است.



۱- در هر یک از این نامعده‌ها، اگر علامت مساری وجود نداشته باشد، هیچ کدام از جواب‌ها نیز علامت مساری ندارند.

نمایش نموداری مجموعه‌ها

مجموعه این مقادیر را که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید، به صورت بازه بنویسید.

۳ با استفاده از مراحل بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$\begin{aligned} \{x \mid x \leq 3\} &\Rightarrow \dots \leq x \dots \Rightarrow \text{مجموعه جواب (به شکل بازه)} \\ \{x \mid x \geq 3\} &\Rightarrow \dots \leq x \dots \Rightarrow \text{مجموعه جواب (به شکل بازه)} \end{aligned}$$

فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد. در این صورت

$$1- \text{اگر } |u| \leq a \text{ آن گاه } -a \leq u \leq a.$$

$$2- \text{اگر } |u| \geq a \text{ آن گاه } u \geq a \text{ یا } u \leq -a.$$

مثال

نامعده‌های زیر را حل می‌کنیم.

$$\text{الف) } |x - 3| \leq 2$$

$$\text{ب) } |2x - 1| > 5$$

برای حل نامعادله الف، با استفاده از خواص قدر مطلق آن را به یک نامعادله دوگانه تبدیل می‌کنیم: $-2 \leq x - 3 \leq 2$ اکنون داریم:

$$-2 \leq x - 3 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5$$

پس مجموعه جواب این نامعادله، بازه $[1, 5]$ است و نمایش هندسی آن به صورت زیر است.

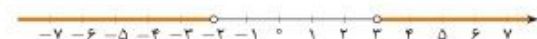


برای حل نامعادله $|x - 3| \leq 2$ به روش هندسی باید نقاطی مانند x را روی محور پیدا کنیم که فاصله آنها از نقطه ۳، حداکثر دو باشد. بنابراین بازه $[1, 5]$ ، مطابق شکل زیر به دست می‌آید.

برای حل نامعادله ب نیز از خواص قدر مطلق استفاده می‌کنیم و داریم:

$$|2x - 1| > 5 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 > 5 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3 \\ 2x - 1 < -5 \Rightarrow 2x < -4 \Rightarrow x < -2 \end{cases}$$

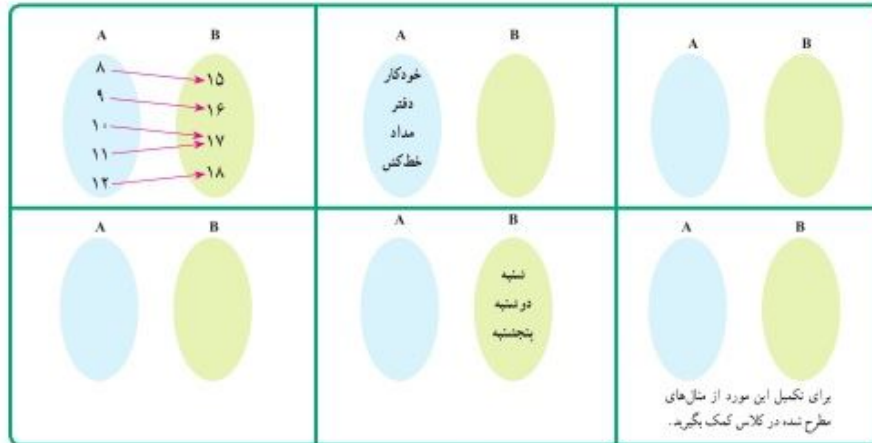
بنابراین مجموعه جواب این نامعادله عبارت است از: $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ و نمایش هندسی آن جواب نیز به صورت زیر است.



۱- در هر یک از این نامعده‌ها، اگر علامت مساری وجود نداشته باشد، هیچ کدام از جواب‌ها نیز علامت مساری ندارند.

فعالیت ۲

جدول های فعالیت ۱ را می توان به کمک مجموعه ها و پیکان هایی که اعضای آنها را به هم **مربوط** می کنند، مشخص کرد. به این شیوه نمایش، نمودارهای پیکانی می گویم. یک نمونه کامل شده است. بقیه را شما کامل کنید.



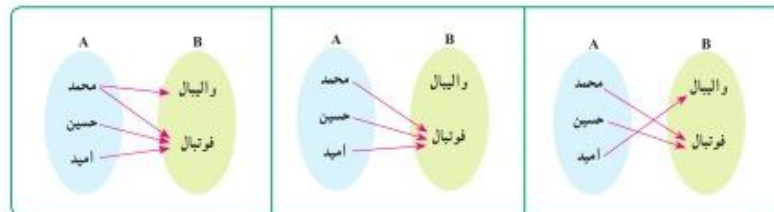
توجه دارید که در رابطه های بالا، از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک پیکان خارج شده است. این گونه رابطه بین دو مجموعه را یک «تابع» می نامند.

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B، رابطه ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می شود.

در فعالیت ۱، همه مثال های ارائه شده تابع هایی هستند که به صورت جدول نمایش داده شده اند.

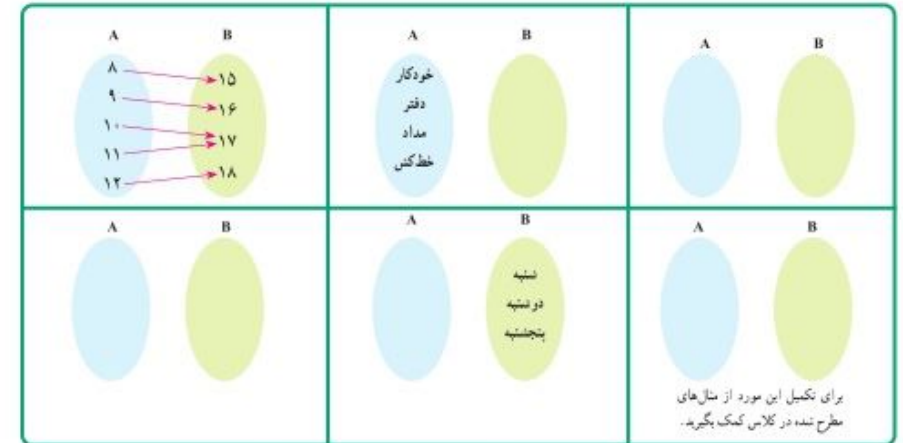
کار در کلاس

۱ مجموعه A شامل سه دانش آموز به نام های محمد، حسین و امید و مجموعه B شامل دو رشته ورزشی است که دانش آموزان می توانند انتخاب کنند. کدام یک از نمودارهای پیکانی داده شده تابع است و کدام یک تابع نیست؟



فعالیت ۲

جدول های فعالیت ۱ را می توان به کمک مجموعه ها و پیکان هایی که اعضای آنها را به هم **مربوط** می کنند، مشخص کرد. به این شیوه نمایش، نمودارهای پیکانی می گویم. یک نمونه کامل شده است. بقیه را شما کامل کنید.



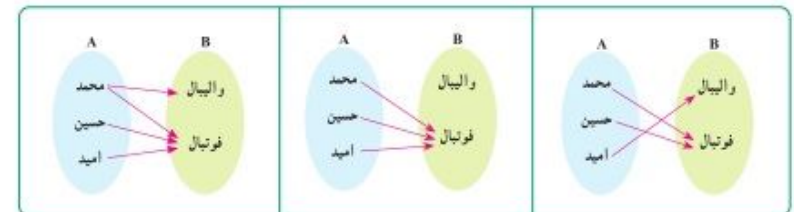
توجه دارید که در رابطه های بالا، از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک پیکان خارج شده است. این گونه رابطه بین دو مجموعه را یک «تابع» می نامند.

یک تابع از مجموعه ناتهی A به مجموعه B، رابطه ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می شود.

در فعالیت ۱، همه مثال های ارائه شده تابع هایی هستند که به صورت جدول نمایش داده شده اند.

کار در کلاس

۱ مجموعه A شامل سه دانش آموز به نام های محمد، حسین و امید و مجموعه B شامل دو رشته ورزشی است که دانش آموزان می توانند انتخاب کنند. کدام یک از نمودارهای پیکانی داده شده تابع است و کدام یک تابع نیست؟



فصل ۷ آشنایی با آزمون

اندازه نمونه	نمونه	اندازه جامعه	عضو جامعه	جامعه
۱۰۰۰			قطعات تولیدی	کارخانه الف
	قطعات تولیدی انتخابی			کارخانه ب

تمرین



۱ می‌خواهیم درباره کیفیت محصولات تولیدی یک کارخانه، تحقیقی انجام دهیم. برای این منظور، از تعداد کل قطعات تولید شده در کارخانه که برابری ۱۰۰۰۰ قطعه است، ۱۰۰ قطعه انتخاب می‌شود. با توجه به اطلاعات موجود، جدول زیر را کامل کنید:

ویژگی مورد بررسی	اندازه نمونه	اندازه جامعه	جامعه

۲ کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است:

الف) اندازه جامعه کمتر از اندازه نمونه است.....

ب) اعضای نمونه، همان اعضای جامعه‌اند.....

پ) نمونه زیر مجموعه‌ای از جامعه است.....

۳ در شکل زیر، دانش‌آموزان یک مدرسه در صف صبحگاهی مشاهده می‌شوند.

هر صف افقی نشان‌دهنده تعداد دانش‌آموزان یک کلاس است. جامعه و اعضای آن را مشخص کنید و دو نمونه دلخواه از این جامعه را ارائه کنید.



فصل ۷ آشنایی با آزمون

اندازه نمونه	نمونه	اندازه جامعه	عضو جامعه	جامعه
۱۰۰۰			قطعات تولیدی	کارخانه الف
	قطعات تولیدی انتخابی			کارخانه ب

تمرین



۱ می‌خواهیم درباره کیفیت محصولات تولیدی یک کارخانه، تحقیقی انجام دهیم. برای این منظور، از تعداد کل قطعات تولید شده در کارخانه که برابری ۱۰۰۰۰ قطعه است، ۱۰۰ قطعه انتخاب می‌شود. با توجه به اطلاعات موجود، جدول زیر را کامل کنید:

ویژگی مورد بررسی	اندازه نمونه	اندازه جامعه	جامعه

۲ کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است:

الف) اندازه جامعه کمتر از اندازه نمونه است.....

ب) اعضای جامعه، دقیقاً همان اعضای نمونه‌اند.....

پ) نمونه زیر مجموعه‌ای از جامعه است.....

۳ در شکل زیر، دانش‌آموزان یک مدرسه در صف صبحگاهی مشاهده می‌شوند.

هر صف افقی نشان‌دهنده تعداد دانش‌آموزان یک کلاس است. جامعه و اعضای آن را مشخص کنید و دو نمونه دلخواه از این جامعه را ارائه کنید.

