

به نام پروردگار مهربان

فست بوک

FAST BOOK

ریاضی دهم

آموزش، تمرین، دوره

عباس اشرفی

سبحان سیف الهی راد



مهروماه

سخن نخست

الو...

سلام مهندس! آرش‌آم

مهندس می‌خوام یه گنبد کروی رو، تو یه ساختمون اجرا کنم. باید مساحتش رو حساب کنم.

فرمول‌هاش یادم رفته. زحمتش رو برام بکش نیمکره‌آس؟

نه یه بخشی از نیمکره‌آس.

آها، پس عرقچینه!

خوب فرمول شو بنویس.....

این مکالمه چند ماه پیش من با آرش‌عسگری، یکی از شاگردای

خوب و قدیمی‌ام هست که مهندس عمران‌ه و رفته تو کار تولید پنجره‌های دو جداره ساختمون.

برای ساخت یه پروژه جدید دنبال فرمول مساحت عرقچین کره بود. از اون روز به بعد رفتم تو فکر!

چه خوب می‌شد اگه کتاب‌های کوچولوی ریاضی داشتیم تا هر وقت

خواستیم تو مترو، تو ماشین، وسط خیابون یا حتی سر ساختمون

راحت دستمون بگیریم و بخونیمش بدون اینکه سنگین باشه و

اذیتمون کنه و بقیه اسم خرخون رو مون بذارن.

تو این فکر بودم که اومدم مهروماه و دیدم ای دل غافل! اون‌ی که من می‌خوام اینجا پُره.

آب در کوزه و ما تشنه‌لبان می‌گردیم!

کتاب‌های کوچولو و تر تمیز لقمه، تخصصش خلاصه کردن مطالب

کتاب درسی و تمرین‌هاست.

فقط ایرادش این بود که هیچ لقمه‌ای تو ریاضی دوره دوم دبیرستان وجود نداشت.

سریع دست به کار شدیم و اولین کتاب لقمهٔ ریاضی دهم رو به کمک به شاگرد قدیمی دیگه‌ام به نام مهندس سبحان سیف‌الهی تالیف کردیم.

بگذارید از این کتاب بیشتر براتون بگم.

این کتاب MP4 کتاب درسیه! 😊

یعنی خلاصهٔ درس‌ها و مثالی کتاب درسی رو تا حد امکان تو این کتاب جا دادیم. حتی اومدیم بهتون گفتیم تو چند تا وعده این لقمه رو بخورید!

تو این کتاب وعده درسی و مثال هستش.

سعی کردیم تو مثال‌ها، فقط از تمرین‌های کتاب درسی استفاده کنیم مگر جاهایی که کتاب درسی کم گذاشته!

خلاصه خیلی زحمتشو کشیدیم که به اینجا رسوندیمش، از اینجا به بعد می‌سپریمش دست شما. خیلی هواشو داشته باشید.

تشکر و قدردانی

■ راستی ما دو نفره این کتاب رو کامل نکردیم. خیلی‌ها زحمت کشیدن. مثلاً پیشنهاد وعده‌ها رو مدیر انتشارات مهروماه آقای احمد اختیاری دادن.

■ پیشنهاد استفاده از مثال‌های کتاب درسی رو آقای انوشه مدیر شورای تألیف انتشارات دادن.

■ جناب آقای مسعود محترمی یکتا زحمت صفحه‌آرایی این کتاب رو کشیدن.

■ جناب آقای نصیری اوانکی پیشنهاد ضمیمه آخر کتاب رو دادند.

■ سرکار خانم خوشنود توی مراحل تدوین این کتاب زحمت خیلی زیادی کشیدن.

خانم‌ها دنیا تسلیمی و سنور حریری و جناب آقای افشین فرزانه در ویرایش کتاب بسیار تلاش کردند. از همشون ممنونیم.

عباس اشرفی - سبحان سیف‌الهی راد

فهرست

- | | | |
|-----|-------------------------------|-------|
| ۷ | مجموعه، الگو و دنباله | فصل ۱ |
| ۴۵ | مثلثات | فصل ۲ |
| ۷۵ | توان‌های گویا و عبارتهای جبری | فصل ۳ |
| ۱۱۱ | معادله‌ها و نامعادله‌ها | فصل ۴ |
| ۱۴۹ | تابع | فصل ۵ |
| ۱۹۱ | شمارش بدون شمردن | فصل ۶ |
| ۲۲۱ | آمار و احتمال | فصل ۷ |
| ۲۴۶ | فرمول‌نامه | ضمیمه |

فصل ١

مجموعه، الگو و دنباله

مجموعه، الگو و دنباله

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

درس اول

- ◀ یادآوری
- ◀ وضعیت مجموعه‌های اعداد
- ◀ بازه‌ها
- ◀ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی
- ◀ جدول اعمال روی مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

متمم یک مجموعه

درس دوم

- ◀ مجموعه مرجع و مجموعه متمم
- ◀ متمم مجموعه‌های متناهی و نامتناهی
- ◀ محاسبه تعداد اعضای اجتماع، تفاضل و متمم دو مجموعه

الگو و دنباله

درس سوم

- ◀ الگو
- ◀ الگوی خطی
- ◀ الگوهای غیر خطی
- ◀ دنباله
- ◀ دنباله بازگشتی

دنباله‌های حسابی و هندسی

درس چهارم

- ◀ دنباله حسابی
- ◀ واسطه حسابی
- ◀ درج m واسطه حسابی
- ◀ قانون اندیس‌ها در دنباله حسابی
- ◀ دنباله هندسی
- ◀ واسطه هندسی
- ◀ درج m واسطه هندسی
- ◀ قانون اندیس‌ها در دنباله هندسی
- ◀ مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

وعده‌ا

یادآوری



برخی از مجموعه‌هایی را که در سال قبل با آن آشنا شدید، در زیر ملاحظه می‌کنید.

مجموعه اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

مجموعه اعداد حسابی: $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

مجموعه اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$

مجموعه اعداد گنگ: $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

مجموعه اعداد حقیقی: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

چاشنی: ۱ مجموعه اعداد حقیقی به دو زیرمجموعه اعداد

گویا (\mathbb{Q}) و اعداد گنگ (\mathbb{Q}') تقسیم می‌شود. هر عددی را

که بتوان به صورت $\frac{m}{n}$ نوشت، در صورتی که m و n اعدادی

صحیح باشند و n مخالف صفر باشد، را یک عدد گویا می‌نامند و

در غیر این صورت آن عدد را یک عدد گنگ می‌نامند.

۲ اگر هر عدد دلخواهی را در نظر بگیریم، جایی روی

محور اعداد حقیقی دارد هم‌چنین هر نقطه روی این محور

نشان‌دهنده یک عدد حقیقی مشخص است.



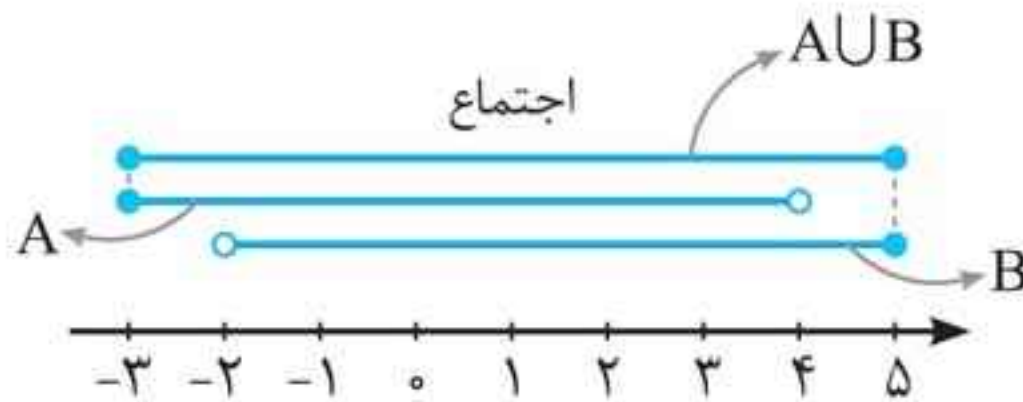
زیرمجموعه‌هایی از \mathbb{R} که مشخص کننده یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشند را «بازه» یا «فاصله» می‌نامیم. مثلاً می‌توان مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$ را به صورت $[0, 2]$ نوشت. دقت داشته باشید که خود اعداد 0 و 2 در این بازه حضور دارند یا مجموعه $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 1\}$ را می‌توان به صورت $(-1, 1]$ نوشت. عدد -1 در این بازه حضور ندارد ولی عدد 1 در این بازه حضور دارد.

انواع بازه

نمایش مجموعه‌ای	بازه	نمایش هندسی	نوع بازه
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$		بسته
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	(a, b)		باز
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$		نیم‌باز
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$		نیم‌باز
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	$[a, +\infty)$		نیم‌باز
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	$(-\infty, b]$		نیم‌باز
$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	$(a, +\infty)$		باز
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	$(-\infty, b)$		باز

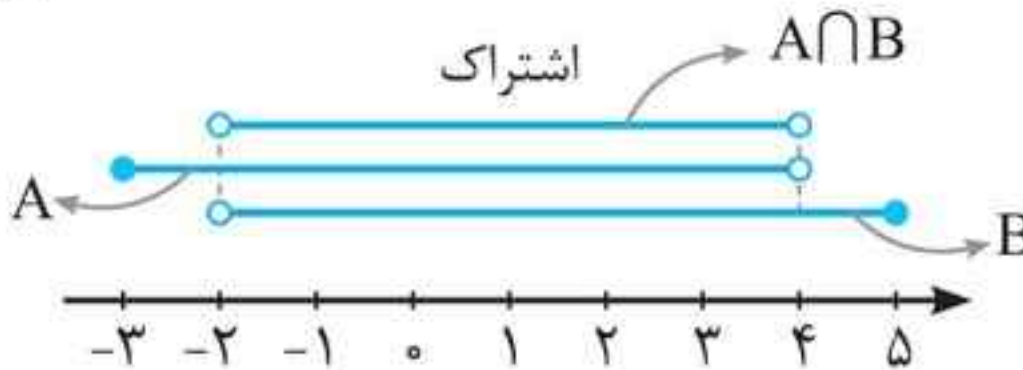
مثال ۴ نمایش هندسی دو بازه $A = [-3, 4)$ و $B = (-2, 5]$ را روی محور رسم کرده و سپس حاصل عبارتهای زیر را بنویسید.
(مشابه کاردرکلاس ص ۵)

الف) $A \cup B$



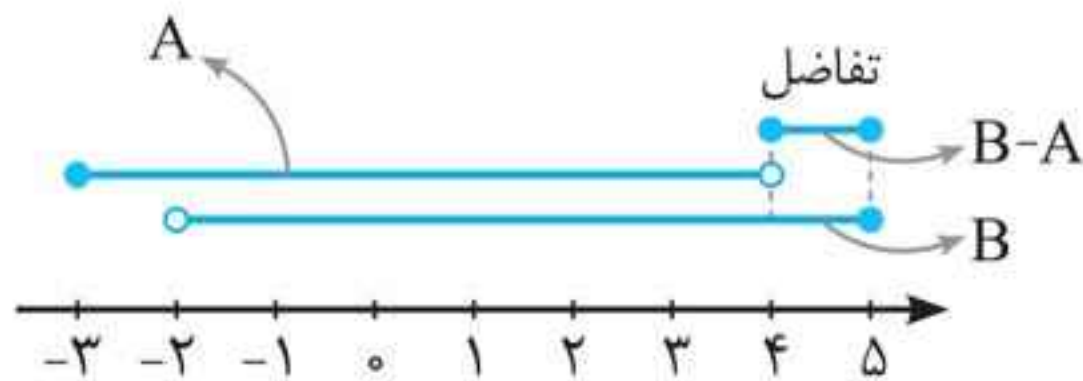
$$A \cup B = [-3, 5]$$

ب) $A \cap B$




$$A \cap B = (-2, 4)$$

پ) $B - A$



$$B - A = [4, 5]$$

مثال ۵  درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

(مشابه کاردرکلاس ص ۵)

الف $1 \in (-2, 1]$

درست است، چون بازه داده شده از سمت راست بسته است و عدد ۱ عضو این بازه می باشد.

ب $0 \in (0, 2)$

نادرست است، چون بازه داده شده از سمت چپ باز است و عدد صفر عضو این بازه نمی باشد.

پ $\frac{7}{8} \in [0, 1]$

درست است، زیرا $\frac{7}{8}$ یک عدد بین صفر و یک می باشد و در این بازه قرار دارد.

وعدۀ ۴



مجموعه های متناهی و نامتناهی

مجموعه هایی که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی است را **متناهی** می نامند. مانند تعداد مولکول های آب روی کره زمین یا تعداد کل انسان های متولد شده روی کره زمین از ابتدا تا کنون.

مجموعه نامتناهی، مجموعه ای است که تعداد اعضای آن از هر عددی بزرگ تر است مانند خود مجموعه اعداد طبیعی یا مجموعه اعداد صحیح کوچک تر از یک میلیون.



جدول اعمال روی مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

انواع مجموعه‌ها	اجتماع	اشتراک	تفاضل
دو مجموعه متناهی	متناهی	متناهی	متناهی
یک مجموعه متناهی و دیگری نامتناهی	نامتناهی	متناهی	نامتناهی - متناهی = نامتناهی
دو مجموعه نامتناهی	نامتناهی	نامعلوم	نامعلوم

مثال ۶ متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌ها را مشخص کنید.

(مشابه تمرین ص ۷)

الف) مجموعه اعداد زوج دورقمی

متناهی می‌باشد، چون تعداد عضوها یک عدد حسابی است.

$$A = \{10, 12, \dots, 98\}$$

ب) مجموعه اعداد طبیعی

نامتناهی می‌باشد، چون تعداد عضوهای مجموعه اعداد طبیعی

یک عدد حسابی نیست.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

پ) اعداد حقیقی بین ۰ و ۲ (بازه (۰, ۲))

نامتناهی می‌باشد، چون در این بازه بی‌شمار عدد وجود دارد.

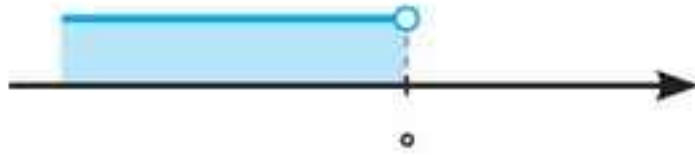
ت) مجموعه دانش‌آموزان پایه دهم سراسر کشور

متناهی می‌باشد، چون تعداد دانش‌آموزان پایه دهم سراسر کشور

یک عدد حسابی است.

پ) اگر $C = [0, +\infty)$ ، آن گاه C' را بیابید.

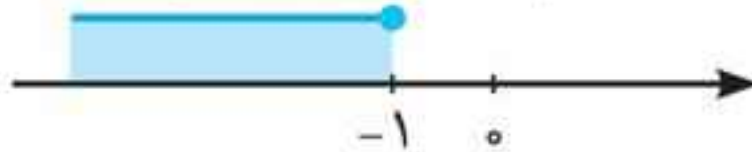
$$C' = \mathbb{R} - C = \mathbb{R} - [0, +\infty) = (-\infty, 0)$$



ت) با استفاده از قسمت الف و پ، مجموعه $(AUC)'$ را بیابید.

$$(AUC)' = \mathbb{R} - (AUC)$$

$$= \mathbb{R} - (-1, +\infty) = (-\infty, -1]$$



وعده ۷



متمم مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۱) متمم یک مجموعه متناهی در مجموعه مرجع نامتناهی، مجموعه‌ای نامتناهی است. به عنوان مثال اگر $U = \mathbb{N}$ و $A = \{1, 2\}$ باشد، متمم مجموعه A یعنی A' یک مجموعه نامتناهی است.
 $A' = \{3, 4, 5, \dots\}$

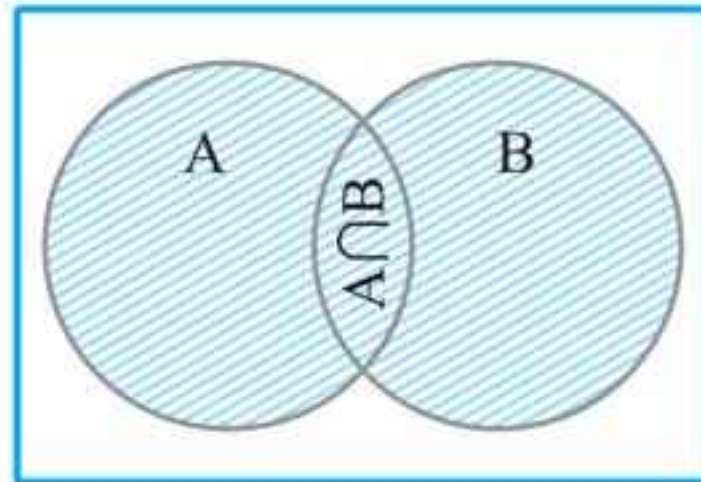
۲) متمم یک مجموعه نامتناهی ممکن است متناهی و ممکن است نامتناهی شود. به عنوان مثال مجموعه $A = \{4, 5, 6, \dots\}$ در مجموعه اعداد طبیعی، متممی برابر $A' = \{1, 2, 3\}$ دارد که متناهی است ولی متمم مجموعه A در مجموعه اعداد صحیح به صورت $A' = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ می‌باشد که نامتناهی است.

تعداد اعضای اجتماع، تفاضل و متمم
دو مجموعه



اگر تعداد اعضای مجموعه مرجع را با $n(U)$ نشان دهیم، آن گاه:

۱ $n(A \cup B) =$
 $n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

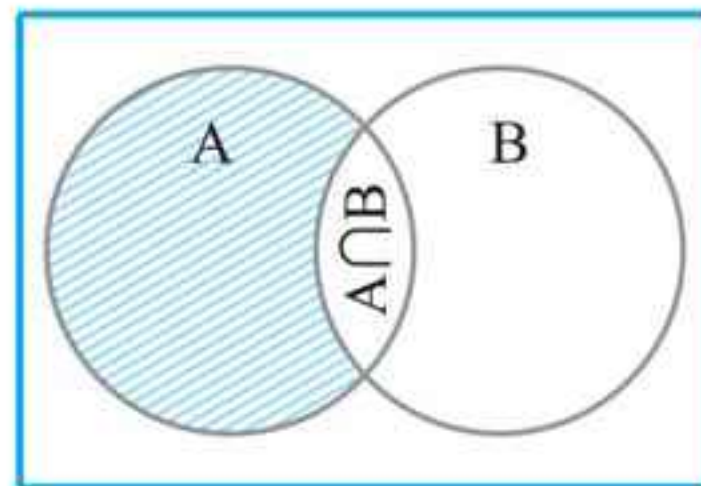


$n(A \cup B)$ یعنی تعداد عضوهایی که در A یا در B هستند.
 $n(A \cap B)$ یعنی تعداد عضوهایی که هم در A و هم در B هستند.

چاشنی: اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند،
($A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cap B) = 0$)، آن گاه داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

۲ $n(A - B) =$
 $n(A) - n(A \cap B)$



$n(A - B)$ یعنی تعداد عضوهایی که در A هستند ولی
در B نیستند یا تعداد عضوهایی که فقط در A هستند.

ب) نه در المپیاد ریاضی و نه در المپیاد فیزیک شرکت کرده‌اند. این کلاس ۳۲ دانش‌آموز دارد که ۲۶ تای آنها یا در المپیاد ریاضی و یا در المپیاد فیزیک شرکت کرده‌اند، بنابراین تعداد دانش‌آموزانی که نه در المپیاد فیزیک و نه در المپیاد ریاضی شرکت کرده‌اند برابر است با:

$$n(R' \cap P') = n(R \cup P)' = n(U) - n(R \cup P) = 32 - 26 = 6$$

پ) فقط در المپیاد ریاضی شرکت کرده‌اند.

$n(R - P)$: تعداد دانش‌آموزانی که فقط در المپیاد ریاضی

شرکت کرده‌اند:

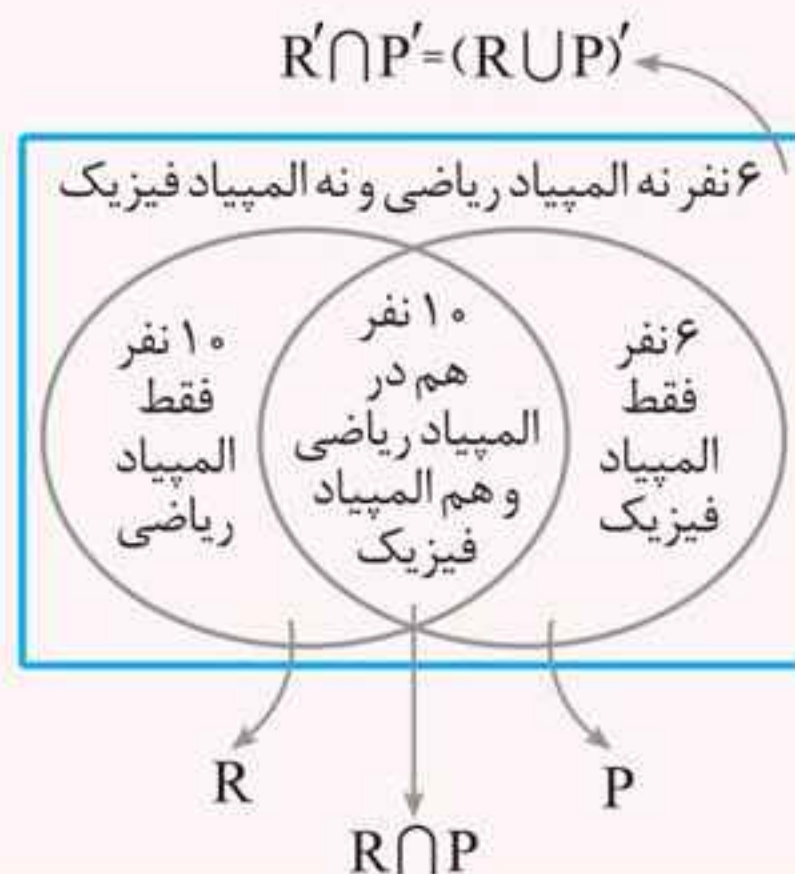
$$n(R - P) = n(R) - n(R \cap P) = 20 - 10 = 10$$

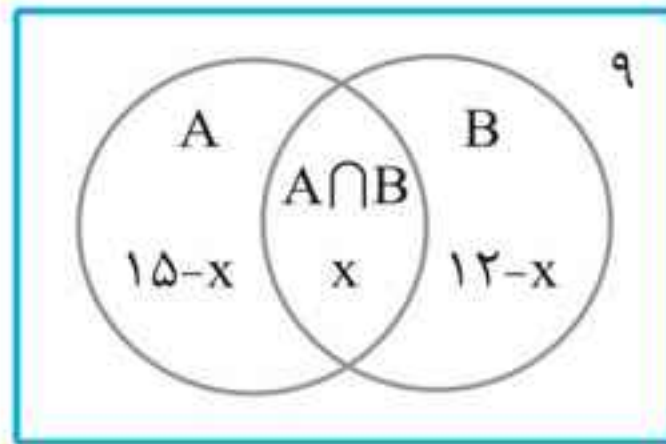
ت) فقط در المپیاد فیزیک شرکت کرده‌اند.

$n(P - R)$: تعداد دانش‌آموزانی که فقط در المپیاد فیزیک شرکت

کرده‌اند: $n(P - R) = n(P) - n(R \cap P) = 16 - 10 = 6$

چاشنی: نمودار ون مرتبط با مثال ۹ به صورت زیر می‌باشد:





با توجه به سوال می‌دانیم که داخل دایره‌ها ۲۶ نفر وجود دارند، پس:

$$15 - x + x + 12 - x = 26 \Rightarrow 27 - x = 26 \Rightarrow x = 27 - 26 = 1$$

مثال ۱۱ فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشند، به طوری که $n(U) = 120$ ، $n(A) = 50$ ، $n(B) = 60$ و $n(A \cap B) = 30$ ، مطلوب است:

الف) $n(A \cup B)$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 50 + 60 - 30 = 80$$

ب) $n(A \cap B')$

$$n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 50 - 30 = 20$$

پ) $n(A' \cap B)$

$$n(A' \cap B) = n(B \cap A') = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 60 - 30 = 30$$

ت) $n(A' \cap B')$

$$n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 120 - 80 = 40$$

ث) $n(A \cup B')$

$$n(A \cup B') = n(A) + n(B') - n(A \cap B') = 50 + (120 - 60) - 20 = 90$$

الگو و دنباله

وعدۀ ۹

الگو

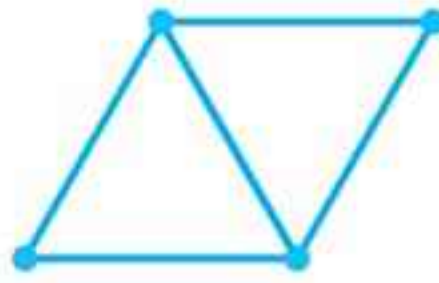


یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد است. برای مطالعه الگوها بهتر است آن‌ها را به زبان اعداد بیان کنیم.

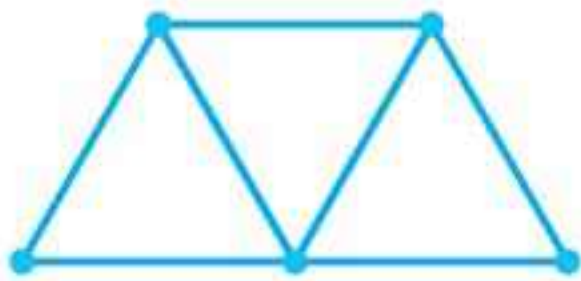
مثال ۱۲ در الگوی زیر تعداد چوب کبریت‌ها در مرحله دهم را بیابید.
(مشابه فعالیت ص ۱۵)



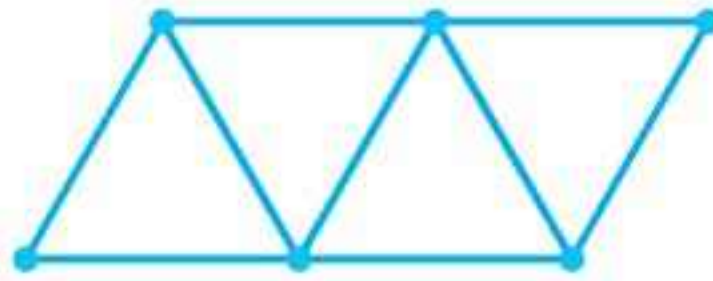
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

پاسخ اگر تعداد چوب کبریت‌ها را در هر مرحله از چپ به راست بنویسیم، داریم:

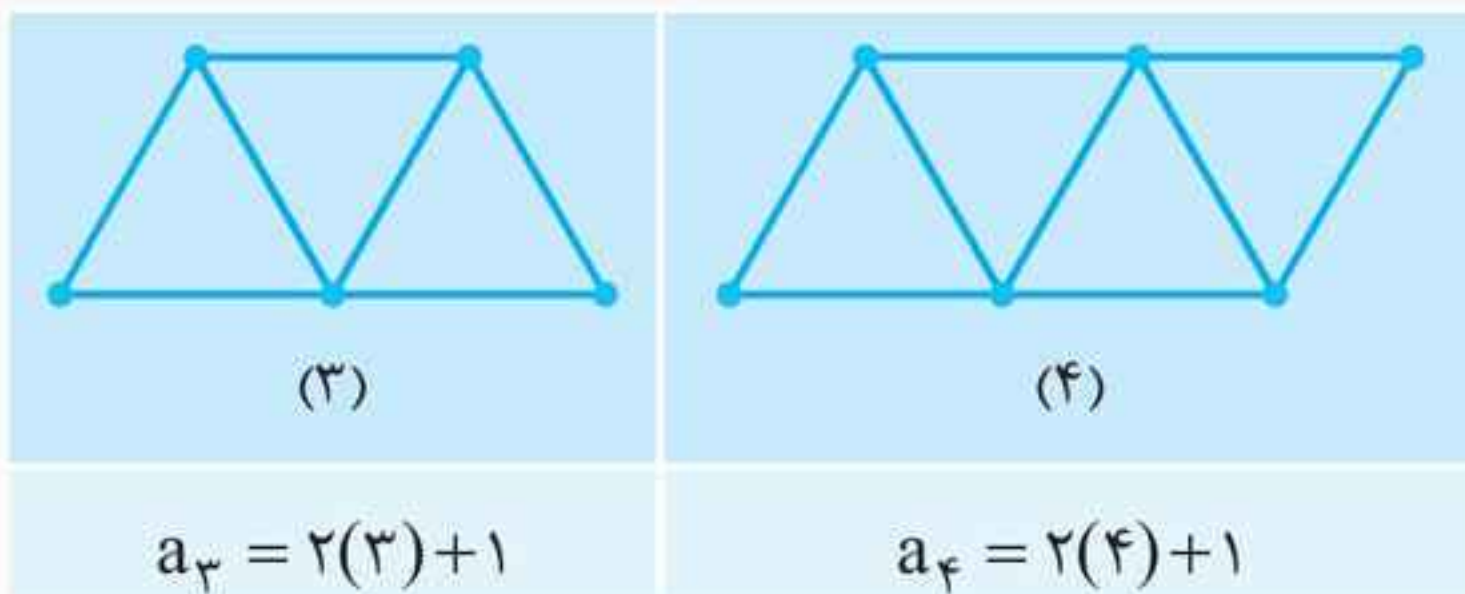
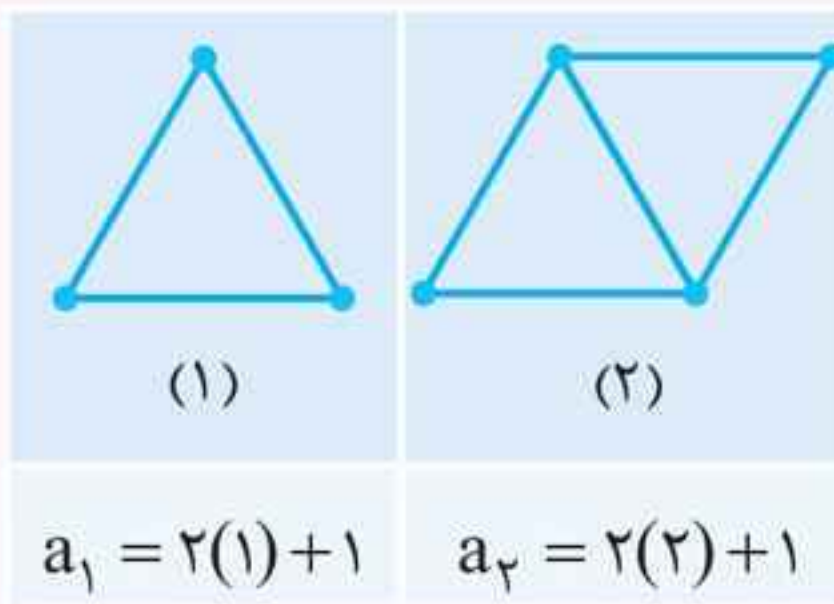
$$3, 5, 7, 9, \dots$$

$\xrightarrow{+2}$ $\xrightarrow{+2}$ $\xrightarrow{+2}$

می بینیم که در هر مرحله ۲ چوب کبریت به تعداد چوب کبریت‌های قبلی اضافه می‌شود، بنابراین تا مرحله دهم، ۹ بار دو چوب کبریت به اولین عضو الگو یعنی ۳، اضافه می‌شود. پس:

$$21 = 3 + 9 \times 2 = \text{تعداد چوب کبریت‌ها در مرحله دهم}$$

چاشنی: در مثال قبلی می‌توانیم جمله عمومی الگو را حدس بزنیم. جمله عمومی در واقع ساختار جملات الگو را مشخص می‌کند و به کمک آن می‌توان مقدار هر جمله از الگو را به دست آورد.



بنابراین جمله عمومی الگوی بالا را می‌توانیم به صورت $a_n = 2(n) + 1$ بنویسیم.



الگوهای غیرخطی

« **الگوی درجه دوم:** الگویی است که جمله عمومی آن به صورت $t_n = an^2 + bn + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) می باشد.

در این الگو اختلاف جملات متوالی الگو، خود تشکیل الگوی خطی می دهند که اختلاف ثابت جملات این الگوی خطی، دو برابر ضریب n^2 یعنی $2a$ می باشد.

به عنوان مثال الگوی $t_n = n^2 + 1$ را در نظر بگیرید.

$$2, \overset{+3}{\curvearrowright} 5, \overset{+5}{\curvearrowright} 10, \overset{+7}{\curvearrowright} 17, \dots$$

حال اگر الگوی اختلاف جملات را بنویسیم، داریم:

$$3, \overset{+2}{\curvearrowright} 5, \overset{+2}{\curvearrowright} 7, \dots$$

می بینید که اختلاف جملات ثابت است و الگو خطی می باشد و این اختلاف ثابت بین جملات الگوی خطی، دو برابر ضریب n^2 یعنی $2a$ می باشد.

« **الگوی مربعی:** الگویی است که هر جمله را به مربع شماره همان جمله نسبت می دهد.

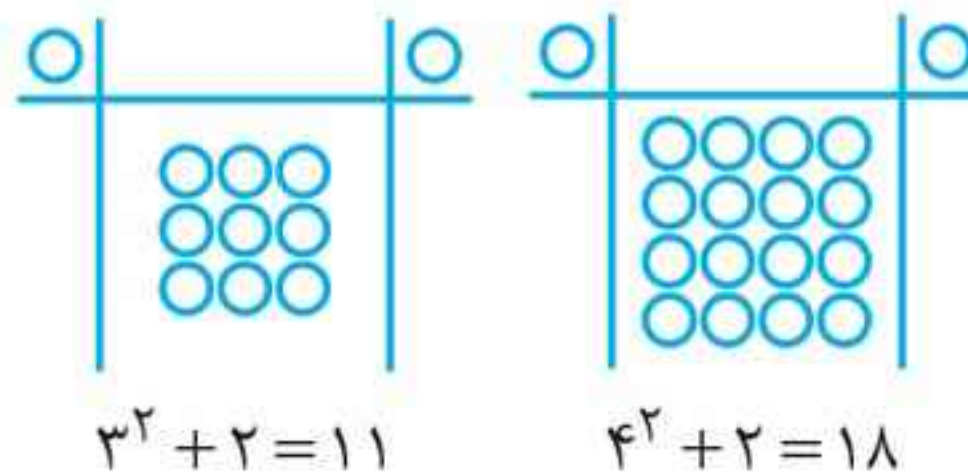
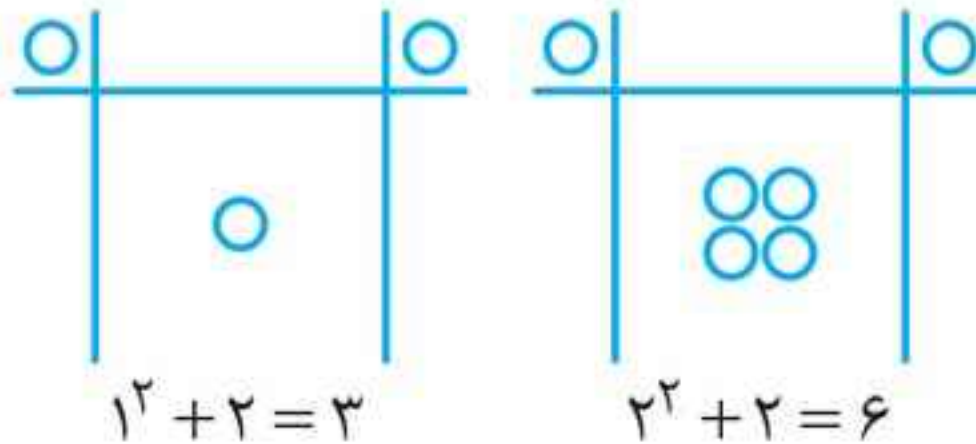
$$\begin{array}{cccccc} 1 & , & 4 & , & 9 & , & 16 & , & 25 & , & 36 & , & \dots \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ t_1 & & t_2 & & t_3 & & t_4 & & t_5 & & t_6 & & \end{array}$$

« **الگوی مثلثی:** الگویی است که هر جمله را به مجموع اعداد یک تا شماره آن جمله نسبت می دهد. جملات این الگو از

مثال ۱۶ برای دنباله درجه دو زیر، یک جمله عمومی به دست آورید و برای آن یک الگوی هندسی نظیر کنید. $3, 6, 11, 18, \dots$

(مشابه تمرین ص ۲۵)

پاسخ الگوی هندسی نظیر شده برای دنباله بالا مطابق زیر می باشد.



بنابراین جمله عمومی این دنباله برابر است با: $a_n = n^2 + 2$

وعدۀ ۱۳ دنباله بازگشتی



دنباله‌ای که هر جمله آن با نظم خاصی از روی جملات قبلی اش پیدا شود را دنباله بازگشتی می نامند. مشهورترین دنباله بازگشتی، دنباله فیبوناتچی است که در آن جملات اول و دوم برابر عدد یک هستند و از جمله سوم به بعد هر جمله از مجموع دو جمله قبلی به دست می آید.

دنباله فیبوناتچی: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$

وضابطه آن به صورت زیر است:

$$\begin{cases} t_1 = t_2 = 1 \\ t_{n+2} = t_n + t_{n+1} \end{cases}$$

درس چهارم

دنباله‌های حسابی و هندسی

وعده ۱۴
دنباله حسابی



دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبلیش به دست می‌آید. این عدد ثابت را **قدرنسبت** می‌نامند و با d نمایش می‌دهند. جمله عمومی هر دنباله حسابی به صورت زیر می‌باشد:

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$

\uparrow جمله اول \uparrow قدرنسبت

مثال ۱۷ جمله عمومی دنباله‌های حسابی زیر را بیابید.

(مشابه کاردرکلاس ص ۲۲)

الف) $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \dots$

برای به دست آوردن قدرنسبت، کافیست که هر جمله را منهای جمله قبل از خود کنیم. پس:

$$d = t_2 - t_1 = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}, t_1 = \sqrt{2}$$

در نتیجه:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = \sqrt{2} + (n-1)\sqrt{2} = \sqrt{2}n$$

ب) $\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \dots$

$$d = t_2 - t_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1, t_1 = \frac{1}{3}$$

در نتیجه:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = \frac{1}{3} + (n-1)(1) = n-1 + \frac{1}{3} \\ = n - \frac{2}{3}$$

پ) ۳, ۱۰, ۱۷, ۲۴, ...

$$d = t_2 - t_1 = 10 - 3 = 7, t_1 = 3$$

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = 3 + (n-1)(7) = 7n - 4 \text{ در نتیجه:}$$

مثال ۱۸ در یک دنباله حسابی، جملات هفتم و دوازدهم آن به ترتیب ۹ و ۱۲۹ می باشند. جملات دنباله را به دست آورید.

(مشابه تمرین ص ۲۴)

پاسخ در یک دنباله حسابی با به دست آوردن جمله اول و قدرنسبت، می توانیم تمامی جملات دنباله را به دست آوریم:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \xrightarrow{t_7=9} 9 = t_1 + (7-1) \times d \Rightarrow 9 = 6d + t_1$$

$$t_n = t_1 + (n-1)d \xrightarrow{t_{12}=129} 129 = t_1 + (12-1) \times d$$

$$\Rightarrow 129 = 11d + t_1$$


با حل دستگاه زیر جمله اول و قدرنسبت مشخص می شوند:

$$\begin{cases} 9 = 6d + t_1 \\ 129 = 11d + t_1 \end{cases} \xrightarrow{\times -1} \begin{cases} -9 = -6d - t_1 \\ 129 = 11d + t_1 \end{cases} \Rightarrow 120 = 5d$$

$$\Rightarrow d = \frac{120}{5} = 24$$

با جای گذاری d در یکی از معادله ها مشخص می شود که: $t_1 = -135$

$$\begin{array}{c} +24 \quad +24 \\ \xrightarrow{\quad} \xrightarrow{\quad} \\ \text{دنباله: } -135, -111, -87, \dots \end{array}$$

فصل ۱ ■ مجموعه، الگو و دنباله  مهروماه

قبل از خود تقسیم کنیم: $r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, t_1 = 12$
در نتیجه:

$$t_n = t_1 r^{n-1} \Rightarrow t_n = 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{12}{2^{n-1}}$$

ب) $2, -4, 8, -16, \dots$

$$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{-4}{+2} = -2, t_1 = 2$$

در نتیجه:
 $t_n = t_1 \times r^{n-1} \Rightarrow t_n = 2 \times (-2)^{n-1}$
مثال ۲۴ در یک دنباله هندسی جملات نهم و پنجم به ترتیب ۶۴ و ۴ می‌باشند. با فرض این که همه جملات مثبت هستند، جمله هفتم این دنباله را بیابید.
(مشابه تمرین ص ۲۷)

پاسخ

$$\begin{cases} t_9 = 64 \\ t_5 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 r^8 = 64 \\ t_1 r^4 = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{t_1 r^8}{t_1 r^4} = \frac{64}{4} \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r = \pm 2$$

دقت داشته باشید که چون همه جملات دنباله مثبت هستند، بنابراین $r = 2$ قابل قبول می‌باشد.

$$t_5 = 4 \Rightarrow t_1 r^4 = 4 \Rightarrow t_1 \times 16 = 4 \Rightarrow t_1 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$t_7 = t_1 r^6 = \frac{1}{4} \times 2^6 = 2^4 = 16$$

در نتیجه:

مثال ۲۵ یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۳ و جمله اول $\frac{1}{9}$ و جمله آخر ۲۴۳، چند جمله دارد؟

پاسخ

$$t_1 = \frac{1}{9}, r = 3$$

$$t_n = t_1 r^{n-1} \Rightarrow t_n = \frac{1}{9} \times 3^{n-1}$$

پس:

چون جمله آخر برابر ۲۴۳ می باشد، بنابراین:

$$t_n = 243 \Rightarrow 243 = \frac{1}{9} \times 3^{n-1} \Rightarrow 9 \times 243 = 3^{n-1}$$

$$\Rightarrow 3^2 \times 3^5 = 3^{n-1} \Rightarrow 3^7 = 3^{n-1} \Rightarrow n-1 = 7 \Rightarrow n = 8$$

این دنباله هشت جمله دارد.

وعدۀ ۱۹ واسطۀ هندسی



اگر سه عدد c ، b و a تشکیل دنباله هندسی بدهند، b را واسطۀ هندسی c و a می نامند و داریم:

$$b^2 = ac$$

مثال ۲۴ اگر $\frac{1}{۳۲}$ ، $\frac{1}{۸}$ و a تشکیل دنباله هندسی بدهند، a را بیابید.

(مشابه کاردرکلاس ص ۲۴)

پاسخ در این دنباله $\frac{1}{۸}$ واسطۀ هندسی دو عدد $\frac{1}{۳۲}$ و a می باشد، بنابراین:

$$a \times \frac{1}{۳۲} = \left(\frac{1}{۸}\right)^2 \Rightarrow \frac{a}{۳۲} = \frac{1}{۶۴} \Rightarrow 64a = ۳۲ \Rightarrow a = \frac{1}{۲}$$

وعدۀ ۲۰ درج m واسطۀ هندسی



اگر بخواهیم بین دو عدد b و a تعداد m واسطۀ هندسی درج کنیم تا همگی با هم تشکیل دنباله هندسی بدهند،

$a, \underbrace{\bigcirc, \bigcirc, \dots, \bigcirc}_m, b$
یعنی: m تا واسطۀ هندسی

پیوست

فرمول نامه

$$A' = U - A, A \cap A' = \emptyset, A \cup A' = U \quad \text{۱}$$

$$(A')' = A, (A \cup B)' = A' \cap B', (A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$A - B = A \cap B'$$

تعداد اعضایی که حداقل در یکی از مجموعه‌های A و B حضور دارند.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

تعداد اعضایی که در A حضور دارند ولی در B حضور ندارند.

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

تعداد اعضایی که در A حضور ندارند.

$$n(A') = n(U) - n(A)$$

تعداد اعضایی که نه در A حضور دارند، نه در B .

$$n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B)$$

۶ جمله عمومی الگوهای خطی: $t_n = an + b$

۷ جمله عمومی دنباله‌های حسابی: $t_n = t_1 + (n-1)d$

۸ اگر a, b و c تشکیل دنباله حسابی بدهند: $\frac{a+c}{2} = b$

۹ درج m واسطه عددی بین a و b : $d = \frac{b-a}{m+1}$

۱۰ اگر در یک دنباله حسابی، مجموع اندیس‌های دو جمله با مجموع اندیس‌های دو جمله دیگر برابر باشند، مجموع جملات آنها نیز با هم برابرند.

$$m+n = h+k \Rightarrow a_m + a_n = a_h + a_k$$

۱۱ جمله عمومی دنباله‌های هندسی: $t_n = t_1 r^{n-1}$

۱۲ اگر c و b و a تشکیل دنباله هندسی بدهند: $b^2 = ac$

۱۳ درج m واسطه هندسی بین a و b : $r^{m+1} = \frac{b}{a}$

۱۴ اگر در یک دنباله هندسی، مجموع اندیس‌های دو جمله با مجموع اندیس‌های دو جمله دیگر برابر باشند، حاصل ضرب جملات آنها نیز با هم برابرند.

$$m+n = h+k \Rightarrow a_m \cdot a_n = a_h \cdot a_k$$

۱۵ مجموع n عدد طبیعی:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$