

فصل ١ حير ومعادله



دنباله حسابی

یادآوری

تعریف دنباله: هر تعداد عدد را که پشت سر هم قرار می‌گیرند، یک دنباله از اعداد می‌نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند. جمله n ام دنباله را که با a_n نشان می‌دهیم، جمله عمومی دنباله می‌نامیم.

دنباله حسابی: دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنباله حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، قدرنسبت دنباله می‌گویند.

تذکره: جملات یک دنباله حسابی، با جمله اول a_1 و قدرنسبت d به صورت $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots$ می‌باشد. جمله عمومی دنباله حسابی از رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ به دست می‌آید.

مثال: جمله هفتم و دهم یک دنباله حسابی به ترتیب ۱۲ و ۲۱ می‌باشند. جمله چندم این دنباله برابر صفر است؟

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow \begin{cases} a_7 = 12 \Rightarrow a_1 + 6d = 12 \\ a_{10} = 21 \Rightarrow a_1 + 9d = 21 \end{cases}$$

پاسخ

از حل دستگاه بالا مقادیر $a_1 = -6$ و $d = 3$ به دست می‌آید. حال معادله $a_n = 0$ را حل می‌کنیم.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 0 = -6 + (n-1) \times 3 \Rightarrow n = 3$$

نکته: اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، آن‌گاه $b = \frac{a+c}{2}$ است و b را واسطه حسابی a و c می‌نامیم.

تست: بین دو عدد ۲ و ۲۶، پنج عدد قرار می‌دهیم به طوری که تشکیل دنباله حسابی دهند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۴ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴)

پاسخ: گزینه «۱» دنباله دارای ۷ جمله به صورت ۲، ۰، ۰، ۰، ۰، ۰، ۲۶ می‌باشد که $a_1 = 2$ و $a_7 = 26$ است.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_7 = 2 + 6d = 26 \Rightarrow d = 4$$

مجموع جملات دنباله حسابی

در یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d ، مجموع n جمله اول از روابط زیر به دست می‌آید:

$$1 \quad S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \quad 2 \quad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مثال: مجموع جملات سوم و نهم یک دنباله حسابی برابر ۱۶ است. مجموع یازده جمله اول دنباله را بیابید.

$$a_3 + a_9 = (a_1 + 2d) + (a_1 + 8d) = 2a_1 + 10d = 16 \quad \text{پاسخ: از رابطه } a_n = a_1 + (n-1)d \text{ داریم:}$$

$$S_{11} = \frac{11}{2}(2a_1 + 10d) = \frac{11}{2} \times 16 = 88 \quad \text{طبق رابطه } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \text{ داریم:}$$

تست: در دنباله حسابی $50, a, 56, \dots$ مجموع جملات مثبت چه قدر است؟

۵۴۸ (۱) ۵۵۱ (۲) ۵۵۴ (۳) ۵۵۸ (۴)

پاسخ: گزینه «۲» a واسطه حسابی ۵۰ و ۵۶ است. پس $a = \frac{50+56}{2} = 53$. پس قدرنسبت $d = -3$ است. جمله عمومی به صورت

$$a_n = 56 + (n-1)(-3) \quad \text{یا} \quad a_n = -3n + 59 \text{ است. اگر } a_n \text{ بخواهد مثبت باشد داریم: } a_n > 0 \Rightarrow -3n + 59 > 0 \Rightarrow n < 19.7$$

$$S_{19} = \frac{19}{2}(2 \times 56 + 18(-3)) = 551 \quad \text{پس ۱۹ جمله اول دنباله مثبت است. هدف یافتن } S_{19} \text{ است.}$$

تست: در یک دنباله حسابی با ۲۰ جمله، مجموع سه جمله اول برابر ۱۰ و مجموع سه جمله آخر برابر ۵۶ است. مجموع کل جملات کدام است؟

۱۶۰ (۱) ۲۶۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۲۲۰ (۴)

پاسخ: گزینه «۴» دقت کنید که $a_1 + a_{20}, a_2 + a_{19}, a_3 + a_{18}$ هر سه برابرند. پس داریم:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 10 \\ a_{20} + a_{19} + a_{18} = 56 \end{cases} \Rightarrow (a_1 + a_{20}) + (a_2 + a_{19}) + (a_3 + a_{18}) = 66 \Rightarrow 3(a_1 + a_{20}) = 66 \Rightarrow a_1 + a_{20} = 22$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(a_1 + a_{20}) = 10 \times 22 = 220 \quad \text{حال طبق فرمول } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \text{ داریم:}$$



تذکره در دنباله عددی با جمله عمومی a_n رابطه $a_n = S_n - S_{n-1}$ برای $n > 1$ برقرار است.

مثال در یک دنباله حسابی، $S_n = 4n^2 + 3n$ می‌باشد. جمله عمومی دنباله را به دست آورید.

پاسخ راه اول: $a_n = S_n - S_{n-1} = 4n^2 + 3n - (4(n-1)^2 + 3(n-1)) = 4n^2 + 3n - (4n^2 - 8n + 4 + 3n - 3) = 8n - 1$

راه دوم: ابتدا a_1 و a_2 و سپس d را محاسبه می‌کنیم:

$$S_n = 4n^2 + 3n \Rightarrow \begin{cases} a_1 = S_1 = 4 + 3 = 7 \\ S_2 = 16 + 6 = 22 \Rightarrow a_1 + a_2 = 22 \Rightarrow a_2 = 15 \end{cases}$$

پس $d = a_2 - a_1 = 8$ است. حال جمله عمومی:

۱ $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

۲ $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2$

تذکره

دنباله هندسی

یادآوری

تعریف: دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل در عددی ثابت، به نام قدرنسبت، به دست می‌آید.

تذکره جملات یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q به صورت a_1, a_1q, a_1q^2, \dots می‌باشد. جمله عمومی یک دنباله هندسی از رابطه $a_n = a_1q^{n-1}$ به دست می‌آید.

تست در یک دنباله هندسی صعودی با جملات مثبت، جمله هفتم مربع جمله n م است. اگر جمله هفدهم این دنباله برابر ۱ باشد، مقدار n کدام است؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ گزینه «۳» طبق فرض سؤال $a_n = (a_1)^n$ است. پس: $a_7 = (a_1)^7 = a_1^2 \Rightarrow a_1^5 = 1 \Rightarrow a_1 = 1$

چون $a_{17} = 1$ است بنابراین $a_{17} = a_1 q^{16} = 1$ از مقایسه این تساوی با تساوی $a_7 = a_1 q^6 = 1$ در می‌یابیم که $16 = 2n - 8$ و لذا $n = 12$ است.

تذکره اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه $b^2 = ac$ است و b را واسطه هندسی a و c می‌نامیم.

مثال در دنباله هندسی $2, a, b, c, 8, \dots$ مقدار b را بیابید.

پاسخ راه اول: جمله اول ۲ و جمله پنجم ۸ است.

$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_5 = a_1 q^4 \Rightarrow 8 = 2q^4 \Rightarrow q^4 = 4 \Rightarrow q = \pm\sqrt{2}$$

راه دوم: b واسطه هندسی ۲ و ۸ است. پس $b^2 = 2 \times 8$ و یا $b = 4$ (چون جمله اول مثبت است پس جمله سوم هم مثبت است).

تست جملات ششم، هشتم و چهاردهم یک دنباله حسابی، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی اند. جمله چندم دنباله حسابی برابر صفر است؟

۴ (نهم)

۳ (پنجم)

۲ (چهارم)

۱ (سوم)

پاسخ گزینه «۳» جملات a_6, a_8, a_{14} از دنباله حسابی، سه جمله متوالی دنباله هندسی اند. پس $a_8 a_{14} = a_6^2$. حال داریم:

$$(a_1 + 7d)^2 = (a_1 + 5d)(a_1 + 13d) \Rightarrow a_1^2 + 14ad + 49d^2 = a_1^2 + 18ad + 65d^2$$

$$\Rightarrow 4ad = -16d^2 \xrightarrow{d \neq 0} a_1 = -4d \Rightarrow a_1 + 4d = 0 \Rightarrow a_5 = 0$$

تست جملات دوم، پنجم و یازدهم یک دنباله حسابی غیر ثابت، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی اند. قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

۲ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

پاسخ گزینه «۲» به شرطی a_2, a_5, a_{11} سه جمله متوالی دنباله هندسی اند که $a_5 a_{11} = a_2^2$ باشد، پس:

$$(a_1 + 4d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 10d) \Rightarrow a_1^2 + 16d^2 + 8a_1d = a_1^2 + 10d^2 + 11a_1d \Rightarrow 6d^2 = 3a_1d \Rightarrow a_1 = 2d$$

$$q = \frac{a_5}{a_2} = \frac{a_1 + 4d}{a_1 + d} = \frac{2d + 4d}{2d + d} = 2$$

قدرنسبت دنباله هندسی برابر $q = \frac{a_5}{a_2}$ است. پس:



نکته اگر جملات n ام، k ام و m ام یک دنباله حسابی غیر ثابت، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند آن گاه قدرنسبت دنباله هندسی برابر است با: $\frac{m-k}{k-n}$.

به طور مثال در تست قبلی که $n=2, k=5, m=11$ بود، قدرنسبت دنباله هندسی برابر است با: $q = \frac{11-5}{5-2} = \frac{6}{3} = 2$.

تست جملات سوم، پنجم و n ام یک دنباله حسابی غیر ثابت، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۳ می باشند. مقدار n کدام است؟
 (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

پاسخ گزینه «۴» طبق نکته بالا داریم:
 $3 = \frac{n-5}{5-3} \Rightarrow n=11$

مجموع جملات دنباله هندسی

در یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q ، مجموع n جمله اول از رابطه زیر به دست می آید:
 $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \quad q \neq 1$

تست در یک دنباله هندسی، مجموع شش جمله اول، $\frac{35}{8}$ برابر مجموع سه جمله اول است. قدرنسبت این دنباله چه قدر است؟

(۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ گزینه «۳» طبق رابطه $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ و همچنین به کمک اتحاد مزدوج $(1+q^3)(1-q^3) = 1-q^6$ ، داریم:

$$S_6 = \frac{35}{8} S_3 \Rightarrow a_1 \frac{1-q^6}{1-q} = \frac{35}{8} a_1 \frac{1-q^3}{1-q} \Rightarrow 1-q^6 = \frac{35}{8} (1-q^3)$$

$$\Rightarrow (1-q^3)(1+q^3) = \frac{35}{8} (1-q^3) \Rightarrow 1+q^3 = \frac{35}{8} \Rightarrow q^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow q = \frac{3}{2}$$

تست حاصل $x^9 - x^8 + x^7 - x^6 + \dots - x^2 + x - 1$ به ازای $x = \sqrt{2}$ چند برابر $1 - \sqrt{2}$ است؟

(۱) ۳۳ (۲) ۳۱ (۳) ۱۷ (۴) ۱۵

پاسخ گزینه «۲» هدف یافتن مجموع ده جمله اول دنباله هندسی $-x^9, -x^8, x^7, -x^6, \dots, -x, x^2, -x, 1$ است که جمله اول آن ۱ و قدرنسبت آن $-x$ است.

$$S_{10} = a_1 \frac{1-q^{10}}{1-q} = 1 \times \frac{1-(-x)^{10}}{1-(-x)} = \frac{1-x^{10}}{1+x} = \frac{1-\sqrt{2}^{10}}{1+\sqrt{2}} = \frac{-31}{\sqrt{2}+1} = -31(\sqrt{2}-1) = 31(1-\sqrt{2})$$

تست تعداد جملات یک دنباله هندسی زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن $1/5$ برابر مجموع جملات با ردیف زوج باشد، قدرنسبت آن کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ گزینه «۱» اگر تعداد جملات دنباله را $2n$ و قدرنسبت را q فرض کنید آن گاه جملات ردیف زوج، خود یک دنباله ای هندسی هستند که

قدرنسبت آن ها q^2 و تعداد آن ها n تا است.
 دنباله اصلی: $S_{2n} = a_1 \frac{1-q^{2n}}{1-q}$

$$S'_n = a_2 \frac{1-(q^2)^n}{1-q^2} = a_1 q \frac{1-q^{2n}}{1-q^2}$$

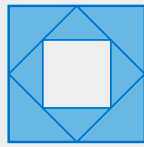
طبق صورت سؤال $S_{2n} = 1/5 S'_n$ است. پس داریم:

$$a_1 \frac{1-q^{2n}}{1-q} = \frac{3}{5} a_1 q \frac{1-q^{2n}}{1-q^2} \Rightarrow \frac{1}{1-q} = \frac{3}{5} \frac{q}{1-q^2} \Rightarrow \frac{1-q^2}{1-q} = \frac{3}{5} q \Rightarrow \frac{(1-q)(1+q)}{1-q} = \frac{3}{5} q \Rightarrow 1+q = \frac{3}{5} q \Rightarrow q=2$$

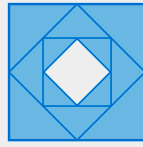
تست در الگوی زیر حداقل چند مرحله پیش برویم تا ۹۷ درصد مساحت مربع اولیه رنگ آمیزی شود؟ (در هر مرحله وسط اضلاع به هم وصل می شود.)



مرحله ۱



مرحله ۲



مرحله ۳

۵ (۱)

۶ (۲)

۷ (۳)

۸ (۴)

پاسخ گزینه «۲» در مرحله اول، $\frac{1}{4}$ سطح مربع رنگ می شود. در مرحله دوم، $\frac{1}{4}$ از $\frac{1}{4}$ دیگر مربع سطح رنگ نشده در مرحله اول رنگ می شود و ... بنابراین هدف یافتن مجموع جملات دنباله $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots$ است.

$$S_n \geq \frac{97}{100} \Rightarrow a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \geq \frac{97}{100} \Rightarrow \frac{1}{4} \times \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}} \geq \frac{97}{100} \Rightarrow 1-\frac{1}{4^n} \geq \frac{97}{100} \Rightarrow \frac{1}{4^n} \leq \frac{3}{100} \Rightarrow 4^n \geq \frac{100}{3}$$

حداقل n برابر ۶ است ($4^6 = 64$).

تست دنباله هندسی $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ را در نظر بگیرید. حاصل جمع ده جمله اول دنباله $a_1 a_2, a_2 a_3, a_3 a_4, \dots$ چند برابر $1 - 2^{20}$ است؟

(۴) شش برابر

(۳) چهار برابر

(۲) سه برابر

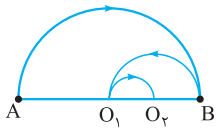
(۱) دو برابر

۱۸, ۷۲, ۲۸۸, ...

پاسخ گزینه «۴» جملات دنباله خواسته شده به صورت مقابل است:

$$S_{10} = 18 \times \frac{1-4^{10}}{1-4} = 6(4^{10} - 1) = 6 \times (2^{20} - 1)$$

این دنباله خود یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۴ است. بنابراین داریم:



مثال در شکل مقابل متحرکی در مرحله اول از A به B، در مرحله دوم از B به O_۱، در مرحله سوم از O_۱ به O_۲ و ... بر روی نیم دایره ها حرکت می کند. اگر قطر نیم دایره بزرگ برابر ۱ باشد، پس از ده مرحله، متحرک چه مسافتی را طی کرده است؟ (O_۱ ها مرکز نیم دایره ها هستند)

مسافت طی شده مرحله اول: $\frac{1}{2} \pi R_1 = \frac{1}{2} \pi$

مسافت طی شده مرحله دوم: $\frac{1}{4} \pi R_2 = \frac{1}{4} \pi$

مسافت طی شده پس از ده مرحله، مجموع ده جمله اول دنباله هندسی $\frac{1}{2} \pi, \frac{1}{4} \pi, \frac{1}{8} \pi, \dots$ است.

$$S_{10} = \frac{1}{2} \pi \frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}} = \pi (1 - \frac{1}{2^{10}}) = \frac{1023}{1024} \pi$$

تکنه اگر n عدد طبیعی باشد، به کمک مجموع جملات دنباله هندسی می توان ثابت کرد:

۱ $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$

۲ $a^n + 1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \dots - a + 1)$ (فرد n)

۳ $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

تذکر بهتر است که به جای استفاده از روابط بالا، از رابطه مجموع جملات دنباله هندسی استفاده کنید.

تست حاصل $P = \frac{1+x+x^2+\dots+x^{11}}{1+x^3+x^6+x^9}$ به ازای $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ چه قدر است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ گزینه «۲» صورت کسر حاصل جمع دوازده جمله اول دنباله هندسی $1, x, x^2, \dots$ می باشد که $a_1 = 1$ و $q = x$ است.

$$S_{12} = a_1 \frac{1-q^{12}}{1-q} = \frac{1-x^{12}}{1-x}$$

مخرج کسر، حاصل جمع ۴ جمله اول دنباله هندسی $1, x^3, x^6, \dots$ می باشد که $a_1 = 1$ و $q = x^3$ است.



$$S'_f = a_1 \frac{1-q^f}{1-q} = \frac{1-(x^r)^f}{1-x^r} = \frac{1-x^{1r}}{1-x^r}$$

با جای گذاری در عبارت داده شده داریم:

$$P = \frac{S_{1r}}{S'_f} = \frac{\frac{1-x^{1r}}{1-x}}{\frac{1-x^{1r}}{1-x^r}} = \frac{1-x^r}{1-x} = \frac{(1-x)(1+x+x^r)}{1-x} = 1+x+x^r$$

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow 2x+1 = \sqrt{5} \Rightarrow 4x^2+4x+1=5 \Rightarrow x^2+x=1$$

$$P = x^2 + x + 1 = 2$$

حد مجموع جملات دنباله هندسی

در یک دنباله هندسی با قدرنسبت q ، وقتی $0 < |q| < 1$ باشد مجموع کل جملات از رابطه $\frac{a_1}{1-q}$ به دست می آید. در واقع:

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots = \frac{a_1}{1-q}$$

به طور مثال مجموع کل جملات دنباله هندسی $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ برابر است با: $S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

مثال در یک دنباله با جمله عمومی $a_n = \frac{2^{n+1}}{3^n}$ مجموع کل جملات را بیابید.

پاسخ جملات این دنباله به صورت $\frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \dots$ می باشد که یک دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = \frac{4}{3}$ و قدرنسبت $q = \frac{2}{3}$ است. پس:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 4$$

تست در یک دنباله هندسی نامتناهی، مجموع سه جمله اول با مجموع بقیه جملات برابر است. قدرنسبت این دنباله چه قدر است؟

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad (4)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

پاسخ گزینه «۴» سؤال به بیان ریاضی به صورت $a_1 + a_2 + a_3 = a_4 + a_5 + \dots$ می باشد. حاصل سمت راست تساوی به کمک فرمول حد مجموع به دست می آید.

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 = \frac{a_4}{1-q} \Rightarrow \cancel{a_1}(1+q+q^2) = \frac{a_1q^3}{1-q} \Rightarrow (1-q)(1+q+q^2) = q^3 \Rightarrow 1-q^3 = q^3 \Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله عددی باشند، k کدام باشد تا $a, b + 3, c + k$ هم تشکیل دنباله عددی دهند؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۸

۲- در یک دنباله عددی اگر $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ و $a_2 + a_3 + a_4 = 27$ ، قدرنسبت چه عددی است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳- در یک دنباله عددی $a_8 = 3$ و $a_9 = 19$ ، چند جمله از این دنباله منفی است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۴- اگر $x^2 + 2, x^3 + 2, x^4 + 2$ سه جمله ابتدایی از یک دنباله عددی باشند، جمله چهارم این دنباله کدام است؟

- (۱) $x^4 + 2$ (۲) $x^4 - 2$ (۳) $2x^4 + 2$ (۴) $2x^4 - 2$

۵- اعداد $a, b, 3$ تشکیل دنباله عددی و اعداد $3, a - 1, b + 1$ تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. قدرنسبت دنباله هندسی کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۲

۶- جملات دوم، هفتم و n ام یک دنباله عددی جملات متوالی یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۴ می‌باشد، n کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۲۳ (۳) ۲۷ (۴) ۳۷

۷- هرگاه a, b, c, d, \dots جملات یک دنباله هندسی با قدرنسبت q باشند، قدرنسبت ab, bc, cd, \dots چه عددی است؟

- (۱) q (۲) q^2 (۳) aq^2 (۴) aq

۸- هرگاه $3, x + 3, 4x, \dots$ جملات ابتدایی یک دنباله هندسی باشند، از جمله سوم چه عددی را کم کنیم تا اعداد حاصل، تشکیل دنباله حسابی دهند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹- ریشه‌های معادله $x^2 - (3m + 1)x^2 + m^2 = 0$ تشکیل دنباله حسابی می‌دهند. مقدار m کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۰- در یک دنباله عددی به جمله اول ۴ واحد اضافه می‌کنیم و از قدرنسبت k واحد کم می‌کنیم به طوری که در دو دنباله جمله چهارم برابر است، k کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{39}$ (۲) $\frac{1}{10}$ (۳) $\frac{4}{41}$ (۴) $\frac{4}{38}$

۱۱- اگر اعداد غیر صفر a, b, c تشکیل یک دنباله عددی با قدرنسبت $d \neq 0$ بدهند، کدام سه عدد، دنباله عددی تشکیل نمی‌دهند؟

- (۱) ad, bd, cd (۲) $a + d^2, b + d^2, c + d^2$ (۳) da^2, db^2, dc^2 (۴) $c + d, b + d, a + d$

۱۲- اگر در دو دنباله عددی $\begin{cases} a_n : -19, -15, -11, \dots \\ b_n : 1, 4, 7, \dots \end{cases}$ جملات مشترک را بنویسیم، چهارمین جمله مشترک، چه عددی است؟

- (۱) ۴۹ (۲) ۱۳ (۳) ۲۵ (۴) ۳۷

۱۳- دو دنباله حسابی $\begin{cases} a_n : 3, 7, 11, \dots \\ b_n : -5, 1, 7, \dots \end{cases}$ مفروض‌اند، بیستمین جمله مشترک آن‌ها، چندمین جمله a_n است؟

- (۱) ۵۸ (۲) ۵۹ (۳) ۶۰ (۴) ۶۱

۱۴- در یک دنباله عددی $a_3 = 9, a_4 = 12$ است. چند جمله از ابتدای آن را جمع کنیم تا حاصل صفر شود؟

- (۱) ۳۹ (۲) ۴۰ (۳) ۴۱ (۴) ۴۲

۱۵- مجموع بیست جمله اول دنباله حسابی $\frac{9}{p}, a, b, -3, \dots$ کدام است؟

- (۱) ۴۱۵ (۲) ۳۱۵ (۳) ۳۷۵ (۴) ۴۲۵



۱۶- بین دو عدد ۴ و ۳۴، ۹ عدد قرار می‌دهیم به طوری که تشکیل دنباله حسابی دهند. مجموع ۹ عدد درج شده کدام است؟

- ۱۸۱ (۱) ۱۷۱ (۲) ۲۰۹ (۳) ۲۱۹ (۴)

۱۷- مجموع اعداد دو رقمی که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر ۵ برابر ۳ می‌باشد کدام است؟

- ۶۹۹ (۱) ۷۹۹ (۲) ۸۹۹ (۳) ۹۹۹ (۴)

۱۸- هرگاه مجموع شش جمله ابتدایی یک دنباله عددی برابر جمله چهارم باشد، جمله هفتم چند برابر جمله اول است؟

- $-\frac{3}{2}$ (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{7}{12}$ (۳) $-\frac{7}{12}$ (۴)

۱۹- در یک دنباله عددی قدرنسبت دو برابر جمله اول است و جمع بیست جمله اول آن ۳۰۰ می‌باشد. جمله چندم آن $\frac{147}{4}$ می‌باشد؟

- ۲۵ (۱) ۲۴ (۲) ۴۵ (۳) ۴۸ (۴)

۲۰- در دنباله عددی $a_n = 4n - 3$ جمع ۵ جمله دوم چه قدر از جمع ۵ جمله اول بیشتر است؟

- ۲۰۰ (۱) ۷۵ (۲) ۵۰ (۳) ۱۰۰ (۴)

۲۱- در یک دنباله حسابی جمله عمومی برابر a_n و مجموع n جمله اول آن S_n است. اگر $S_n = n^2 a_1$ باشد، آن‌گاه a_n چند برابر a_1 است؟

- $2n + 1$ (۱) $2n - 1$ (۲) $3n + 2$ (۳) $3n - 2$ (۴)

۲۲- هرگاه $2, 2, 6, \dots$ جملات ابتدایی یک دنباله عددی باشند، حداقل چند جمله از ابتدای آن را جمع کنیم تا حاصل از ۲۰۰ بیشتر شود؟

- ۱۰ (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴)

۲۳- در یک دنباله حسابی با قدرنسبت مخالف صفر، جمله چهارم دو برابر جمله نهم است. مجموع چند جمله اول این دنباله صفر است؟

- ۱۳ (۱) ۱۴ (۲) ۲۵ (۳) ۲۷ (۴)

۲۴- جمع ۱۰ جمله اول دو دنباله a_1, a_2, a_3, \dots (با قدرنسبت d) و دنباله $a_1 + d, a_2 + 2d, a_3 + 3d, \dots$ با یکدیگر ۱۱۰ واحد اختلاف دارند. d چه عددی است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴)

۲۵- مجموع جملات مشترک دو رقمی دو دنباله حسابی $2, 5, 8, \dots$ و $3, 7, 11, \dots$ چه قدر است؟

- ۴۱۵ (۱) ۴۲۴ (۲) ۴۳۶ (۳) ۴۴۸ (۴)

۲۶- در یک دنباله عددی تمام اعضای دنباله، عدد طبیعی هستند، اگر مجموع چهل جمله اول آن ۸۶۰ باشد جمع بیست جمله اول آن کدام است؟

- ۲۳۰ (۱) ۴۳۰ (۲) ۲۱۵ (۳) ۳۲۵ (۴)

۲۷- اگر S_n مجموع n جمله اول دنباله حسابی باشد، حاصل $2S_1 - S_2$ چند برابر قدرنسبت است؟

- ۵۰ (۱) ۱۰۰ (۲) ۱۵۰ (۳) ۲۰۰ (۴)

۲۸- در یک دنباله عددی اگر $S_n = 3n - 2n^2$ ، حاصل $S_7 - 20a_1$ کدام است؟

- -820 (۱) -780 (۲) -840 (۳) -760 (۴)

۲۹- در یک دنباله عددی ۱۰ جمله‌ای جمع جملات مرتبه زوج، ۶ برابر جمع جملات مرتبه فرد است. اگر قدرنسبت ۴ باشد، جمع جملات مرتبه فرد چه عددی است؟

- ۸۰ (۱) ۶۰ (۲) ۴۰ (۳) ۱۲۰ (۴)

۳۰- در یک دنباله حسابی منتهای، مجموع پنج جمله اول، پنج جمله آخر و مجموع کل جملات به ترتیب برابر ۱۷، ۲۸ و ۵۴ می‌باشد. تعداد جملات این دنباله کدام است؟

- ۲۱ (۱) ۱۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴)

۳۱- در یک دنباله حسابی، جمله n ام برابر $3n + a$ و مجموع n جمله اول برابر $bn^2 + 4n$ می‌باشد. مقدار $a + b$ کدام است؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۳۲- جملات اول، پنجم و هفتم در یک دنباله عددی تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند. جمع چند جمله ابتدایی دنباله عددی صفر است؟

- ۱۵ (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴)



۳۳- در یک دنباله حسابی جملات دوم، پنجم و چهاردهم به ترتیب برابر q ، q^2 و q^3 می‌باشد. مجموع n جمله اول این دنباله کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۲۶ (۲) ۲۴ (۳) ۴۹ (۴) ۶۳

۳۴- مجموع شش جمله اول یک دنباله هندسی برابر ۷۷ و مجموع سه جمله اول آن برابر ۸۸ است. جمله پنجم چند برابر جمله هشتم است؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۸ (۴) -۸

۳۵- در یک دنباله هندسی مجموع ۸ جمله اول ۱۷ برابر مجموع چهار جمله اول است. اگر دنباله افزایشی باشد، جمله هفتم چند برابر جمله دوم است؟

- (۱) -۱۶ (۲) ۳۲ (۳) ۱۶ (۴) -۳۲

۳۶- اگر S_n جمع n جمله نخست دنباله هندسی با جمله عمومی $a_n = 2^{1-n}$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $S_n = 2 - a_n$ (۲) $S_n = 2 + a_n$ (۳) $S_n = a_n - 2$ (۴) $S_n = -a_n - 2$

۳۷- در یک دنباله هندسی $2n$ جمله‌ای، اگر مجموع تمام جملات آن ۴ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۳۸- در یک دنباله هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از یک، مجموع جملات اول و چهارم برابر ۱۸ و مجموع شش جمله اول آن برابر ۱۲۶ می‌باشد. مجموع پنج جمله اول کدام است؟

- (۱) ۶۲ (۲) ۶۳ (۳) ۶۸ (۴) ۷۴

۳۹- در دنباله هندسی a_n که قدرنسبت آن منفی است، جملات ابتدایی $\dots, \frac{1}{p}, a, 4$ می‌باشند. جمع ۵ جمله اول چند برابر جمله پنجم است؟

- (۱) ۲۰۵ (۲) ۲۶۹ (۳) -۲۰۵ (۴) -۲۶۹

۴۰- اگر a_n جمله عمومی یک دنباله هندسی باشد و مجموع ۹ جمله اول برابر ۵ است. اگر جمله دوازدهم از جمله سوم ۹۰ واحد بیشتر باشد قدرنسبت دنباله اصلی کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۱- در دنباله هندسی با جمله عمومی a_n ، مجموع ۱۰ جمله اول دنباله $\dots, \frac{a_3}{a_2 + a_3}, \frac{a_2}{a_1 + a_2}, \frac{a_1}{a_1 + a_2}$ برابر ۲ باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) ۴

۴۲- در یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۲، اگر مجموع n جمله اول برابر ۳ و مجموع $3n$ جمله اول برابر ۸۱۹ باشد، مقدار n کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۴۳- اگر $\frac{1+x+x^2+\dots+x^{11}}{1+x^3+x^6+x^9} = 2$ باشد، مقدار x کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{7}-1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{7}+1}{2}$

۴۴- حاصل $(1+x+x^2+x^3+\dots+x^9)(1-x+x^2-x^3+\dots-x^9)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ چه قدر است؟

- (۱) ۱۰۲۳ (۲) -۱۰۲۵ (۳) ۵۱۳ (۴) -۹۶۱

۴۵- اعداد فرد را به صورت $\dots, \{7, 9, 11\}, \{3, 5\}, \{1\}$ دسته‌بندی کرده‌ایم. جمع اعداد واقع در دسته نهم چه عددی است؟

- (۱) ۲۱۸۷ (۲) ۶۵۹۱ (۳) ۲۴۳ (۴) ۷۲۹

۴۶- توان‌های عدد ۲ را به صورت $\dots, \{16, 32, 64\}, \{4, 8\}, \{2\}$ دسته‌بندی می‌کنیم. جمع عضوهای مجموعه هشتم چند برابر 2^3 است؟

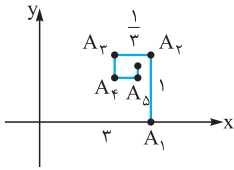
- (۱) ۱۲۲ (۲) ۱۲۲/۵ (۳) ۱۲۷ (۴) ۱۲۷/۵

۴۷- نقطه O بر روی محور x ها با یک حرکت رفت و برگشتی به سمت چپ و راست حرکت می‌کند و در هر مرحله، نصف مسافت قبلی را طی می‌کند. اگر مرحله اول ۵ متر در جهت مثبت حرکت کرده باشد، فاصله آن از مبدأ پس از ۱۰ مرحله چه قدر است؟

- (۱) $\frac{1023}{512}$ (۲) $\frac{1703}{512}$ (۳) $\frac{1025}{512}$ (۴) $\frac{1705}{512}$



۴۸- متحرکی مطابق الگوی مقابل از مبدأ مختصات در جهت مثبت محور x ها حرکت می‌کند. در هر مرحله 90° تغییر جهت داده و $\frac{1}{3}$ فاصله قبلی را طی می‌کند. اگر به همین روش پیش رود، نقطه A_8 با کدام طول است؟



$$\begin{aligned} & \frac{728}{243} \quad (2) \\ & \frac{8^\circ}{27} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{656}{243} \quad (1) \\ & \frac{22}{9} \quad (3) \end{aligned}$$

۴۹- در یک دنباله $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 3$ می‌باشد. به ازای کدام مقدار k دنباله با جمله عمومی $a_n - k$ هندسی است؟

$$2 \quad (4) \qquad 3 \quad (3) \qquad 6 \quad (2) \qquad 9 \quad (1)$$

۵۰- اگر در یک دنباله $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ، مجموع 10 جمله ابتدایی a_n کدام است؟

$$2^{11} - 12 \quad (4) \qquad 2^{10} + 12 \quad (3) \qquad 2^{11} + 12 \quad (2) \qquad 2^{10} - 12 \quad (1)$$

۵۱- در شکل مقابل اگر هر بار هر ضلع مربع به 3 قسمت برابر تقسیم شود و ضلع مربع بزرگ‌تر 2 باشد و این عمل 10 مرتبه تکرار شود، مجموع مساحت رنگی کدام است؟



$$\begin{aligned} & 1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{10} \quad (1) \\ & 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \quad (3) \\ & 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^{10} \quad (2) \\ & 1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{10} \quad (4) \end{aligned}$$

۵۲- در یک دنباله هندسی مجموع دو جمله اول 3 برابر مجموع بقیه جملات است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

$$\pm \frac{1}{3} \quad (2) \qquad \pm \frac{1}{4} \quad (3) \qquad \pm \frac{1}{5} \quad (4) \qquad \pm \frac{1}{6} \quad (1)$$

۵۳- حاصل $\frac{81}{10} (7 + 77 + 777 + \dots + \underbrace{777\dots7}_{10 \text{ بار}})$ کدام است؟

$$70(10^{10} - 1) \quad (1) \qquad 70(10^9 - 1) \quad (2) \qquad 7(10^{10} - 1) \quad (3) \qquad 7(10^9 - 1) \quad (4)$$

۵۴- حاصل $10x^9 + 4x^8 + 3x^7 + 2x^6 + x^5 + \dots + 2x + 1$ به ازای $x = 2$ چه قدر است؟

$$9 \times 2^{10} - 1 \quad (1) \qquad 9 \times 2^{11} + 1 \quad (2) \qquad 2^{11} + 1 \quad (3) \qquad 2^{11} - 1 \quad (4)$$

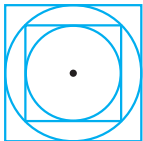
۵۵- در یک دنباله هندسی جمله عمومی $2 \times 3^{1-n}$ می‌باشد، جمع تمام جملات کدام است؟

$$3 \quad (1) \qquad 6 \quad (2) \qquad \frac{9}{2} \quad (3) \qquad 12 \quad (4)$$

۵۶- اگر از دنباله هندسی $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ جملات a_7, a_6, a_5 و a_9 را حذف کنیم، حد مجموع جملات باقی‌مانده چه قدر است؟

$$\frac{6}{7} \quad (1) \qquad \frac{7}{8} \quad (2) \qquad \frac{8}{9} \quad (3) \qquad \frac{9}{10} \quad (4)$$

۵۷- در شکل مقابل هر دایره درون یک مربع محاط و بر یک مربع دیگر محیط است. اگر شعاع بزرگ‌ترین دایره برابر R باشد حد مجموع مساحت دایره‌ها چه قدر است؟



$$\frac{3}{2}\pi R^2 \quad (1) \qquad 2\pi R^2 \quad (2) \qquad \frac{5}{2}\pi R^2 \quad (3) \qquad 3\pi R^2 \quad (4)$$

۵۸- اگر $a_n = \frac{2^n + 3^n}{6^n}$ حاصل $S = a_1 + a_2 + \dots$ چه عددی است؟

$$\frac{4}{3} \quad (4) \qquad \frac{3}{2} \quad (3) \qquad 1 \quad (2) \qquad 5 \quad (1)$$

۵۹- در دنباله‌ای با جمله عمومی $a_n = \frac{2^n + 3^n}{4^n}$ حد مجموع جملات ردیف فرد چه قدر است؟

$$4 \quad (1) \qquad \frac{5^\circ}{21} \quad (2) \qquad \frac{22}{21} \quad (3) \qquad \frac{55}{21} \quad (4)$$

۶۰- مجموع تمام جملات دنباله‌ای با جمله عمومی $a_n = \frac{n}{2^n}$ چه قدر است؟

$$2 \quad (1) \qquad 3 \quad (2) \qquad \frac{5}{2} \quad (3) \qquad \frac{7}{2} \quad (4)$$



پاسخ نامه نشریحی

$$\begin{cases} a_7 = a_1 + d & \text{در نتیجه:} \\ a_6 = a_1 + 5d \Rightarrow a_7 + a_6 + a_1 = 3a_1 + 15d = 9 \\ a_{10} = a_1 + 9d \Rightarrow a_1 + 5d = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_8 = a_1 + 4d \\ a_9 = a_1 + 8d \Rightarrow a_8 + a_9 + a_{13} = 3a_1 + 24d = 27 \\ a_{13} = a_1 + 12d \Rightarrow a_1 + 8d = 9 \end{cases}$$

به کمک تشکیل دستگاه زیر مقدار d را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_1 + 5d = 3 \\ a_1 + 8d = 9 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 3d = 6 \Rightarrow d = 2$$

۲- گزینه ۲ برای آن که متوجه شویم چند جمله از یک دنباله منفی است، کافی است معادله $a_n < 0$ را در مجموعه اعداد حسابی حل کنیم. در نتیجه ابتدا باید با محاسبه جمله اول و قدرنسبت جمله عمومی دنباله (a_n) را بنویسیم:

$$\begin{cases} a_9 = 19 \\ a_8 = 3 \end{cases} \Rightarrow a_{19} - a_8 = 4d = 16 \Rightarrow d = 4$$

$$a_8 = a_1 + 4d = 3 \xrightarrow{d=4} a_1 = -13$$

از طرفی می‌دانیم $a_n = a_1 + (n-1)d$ است، پس جمله عمومی دنباله به صورت زیر است:

$$a_n = -13 + 4(n-1) \Rightarrow a_n = 4n - 17$$

حال معادله $a_n < 0$ را در مجموعه اعداد حسابی حل می‌کنیم:

$$4n - 17 < 0 \Rightarrow 4n < 17 \Rightarrow n < \frac{17}{4} = 4 \dots$$

در نتیجه این دنباله ۴ جمله منفی دارد: $n = 1, 2, 3, 4$

$$a_m - a_n = (m-n)d$$

تذکر

۴- گزینه ۲ اگر a ، b و c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، داریم:

$$\frac{a+c}{2} = b$$

$$x, x^2 + 2, x^3 + 2 \Rightarrow \frac{x + (x^2 + 2)}{2} = x^2 + 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x^2(x-2) + (x-2) = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x^2+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

با توجه به آن که $x=2$ است، دنباله به این صورت خواهد بود:

۱- گزینه ۲ می‌دانیم هرگاه a ، b و c سه جمله متوالی از

$$\frac{a+c}{2} = b$$

$$a+c = 2b$$

یک دنباله حسابی باشند، داریم:

پس:

با توجه به آن که a ، $b+3$ و $c+k$ نیز سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند، داریم:

$$\frac{a+(c+k)}{2} = b+3 \Rightarrow a+c+k = 2b+6$$

حال به کمک تشکیل دستگاه زیر مقدار k را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} a+c = 2b \\ \frac{a+c+k}{2} = b+3 \Rightarrow 2b+k = 2b+6 \Rightarrow k=6 \end{cases}$$

۲- گزینه ۲ راه اول: در هر دنباله حسابی جملاتی از دنباله

که دارای فواصل مساوی‌اند نیز با یکدیگر تشکیل دنباله حسابی می‌دهند. در واقع جمله وسط در این جملات نیز میانگین دو عدد دیگر است. در نتیجه اگر a ، b ، c سه جمله از یک دنباله حسابی (نه الزاماً متوالی) باشند به طوری که فاصله جمله b از a و c یکی باشد، داریم:

$$\frac{a+c}{2} = b$$

فاصله جمله a_6 از a_7 و a_{10} یکسان است. پس a_6 میانگین حسابی a_7 و a_{10} خواهد بود:

$$a_7, a_6, a_{10} \Rightarrow \frac{a_7+a_{10}}{2} = a_6 \Rightarrow a_7+a_{10} = 2a_6$$

$$\begin{array}{ccc} \swarrow & & \searrow \\ a_7 & & a_{10} \\ \leftarrow -4d & & +4d \rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow a_7 + a_6 + a_{10} = 3a_6 = 9 \Rightarrow a_6 = 3$$

به همین ترتیب فاصله جمله a_9 از a_5 و a_{13} نیز برابر است و a_9 میانگین حسابی a_5 و a_{13} است:

$$a_5, a_9, a_{13} \Rightarrow \frac{a_5+a_{13}}{2} = a_9 \Rightarrow a_5+a_{13} = 2a_9$$

$$\begin{array}{ccc} \swarrow & & \searrow \\ a_5 & & a_{13} \\ \leftarrow -4d & & +4d \rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow a_5 + a_9 + a_{13} = 3a_9 = 27 \Rightarrow a_9 = 9$$

از طرفی می‌دانیم $a_n - a_m = (n-m)d$ ، در نتیجه:

$$\begin{cases} a_9 = 9 \\ a_6 = 3 \end{cases} \Rightarrow a_9 - a_6 = 9 - 3 \Rightarrow 3d = 6 \Rightarrow d = 2$$

راه دوم: می‌توانیم هر یک از جملات یک دنباله حسابی را بر حسب جمله اول و قدرنسبت دنباله بنویسیم. می‌دانیم $a_n = a_1 + (n-1)d$

تذکر در حالت کلی اگر a_k, a_m, a_n سه جمله از دنباله‌ای حسابی باشند که با هم تشکیل دنباله هندسی می‌دهند، قدرنسبت دنباله هندسی از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{k-m}{m-n} = q$$

$$\frac{n-7}{7-2} = q = 4 \Rightarrow n = 27$$
 در نتیجه در این سؤال:

۷- گزینه ۲ می‌دانیم از حاصل تقسیم هر جمله دنباله هندسی بر جمله قبلی آن (به جز جمله اول) قدرنسبت به دست می‌آید:

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad (n \neq 1)$$

اگر قدرنسبت دنباله ab, bc, cd, \dots را q' بنامیم، داریم:

$$ab, bc, cd, \dots \Rightarrow q' = \frac{bc}{ab} = \frac{c}{a}$$

از طرفی در دنباله a, b, c, d, \dots اگر قدرنسبت برابر q باشد، جمله سوم (یعنی c) برابر است با:

$$c = aq^2 \Rightarrow q' = \frac{c}{a} = \frac{aq^2}{a} = q^2$$
 در نتیجه:

۸- گزینه ۳ هرگاه a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، داریم:

$$ac = b^2$$

در نتیجه با توجه به آن که $3, (x+3), 4x$ تشکیل دنباله هندسی می‌دهند، داریم:

$$3 \times 4x = (x+3)^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$$

در نتیجه دنباله به این صورت خواهد بود: $3, 6, 12, \dots$

اگر دو جمله اول این دنباله، دو جمله اول یک دنباله حسابی نیز باشند، قدرنسبت برابر $3-3=3$ خواهد بود. در نتیجه جمله سوم این دنباله حسابی $9=3+3+3$ است. پس کافی است از جمله سوم دنباله هندسی 3 واحد کم کنیم تا سه جمله حاصل، تشکیل دنباله حسابی دهند.

۹- گزینه ۴ هر معادله به صورت $ax^4 + bx^2 + c = 0$ اگر دارای ریشه α باشد، قطعاً دارای ریشه $-\alpha$ نیز خواهد بود. زیرا مجذور α و $-\alpha$ ($\alpha^2 = (-\alpha)^2$) با هم برابرند:

$$a\alpha^4 + b\alpha^2 + c = 0 \Rightarrow a(-\alpha)^4 + b(-\alpha)^2 + c = 0$$

$$a(-\alpha)^4 + b(-\alpha)^2 + c = 0$$

\downarrow \downarrow
 α^4 α^2

به همین ترتیب اگر معادله فوق دارای ریشه β باشد، دارای ریشه $-\beta$ نیز خواهد بود. در نتیجه این معادله دارای 4 ریشه $\alpha, -\alpha, \beta, -\beta$ است. ($\alpha, \beta > 0$).

$2, 6, 10, \dots$

در نتیجه جمله چهارم این دنباله با توجه به آن که $d = 4$ است، برابر است با:

$$a_4 = a_3 + d = 10 + 4 = 14$$

که در بین گزینه‌ها تنها **۲** به ازای $x = 2$ برابر 14 است.

۵- گزینه ۴ اگر سه عدد a, b, c تشکیل دنباله حسابی دهند، داریم:

$$\frac{a+c}{2} = b$$

با توجه به آن که a, b, c تشکیل دنباله حسابی می‌دهند، داریم:

$$\frac{3+b}{2} = a \Rightarrow b = 2a - 3$$

با توجه به آن که $a-1, b+1, c$ تشکیل دنباله هندسی می‌دهند، داریم:

$$3(b+1) = (a-1)^2$$

حال با تشکیل دستگاه زیر و حذف b مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} b+1 = 2a-2 \\ 3(b+1) = (a-1)^2 \end{cases} \Rightarrow 3(2a-2) = (a-1)^2$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 = 6(a-1) \Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \\ a-1=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=7 \end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم با توجه به تعریف دنباله هندسی، هیچ یک از جملات یک دنباله هندسی صفر نباید باشد. (چرا؟) در نتیجه چون به ازای $a=1$ جمله دوم دنباله هندسی برابر صفر می‌شود $a=7$ قابل قبول نیست و خواهد بود. در نتیجه دنباله هندسی به این صورت است:

۶- گزینه ۳

$$a_7 = a_1 + 6d$$

$$a_7 = a_1 + 6d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

چون a_7, a_4, a_n سه جمله متوالی دنباله هندسی هستند، پس:

$$a_7^2 = a_4 a_n \Rightarrow (a_1 + 6d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + (n-1)d)$$

$$a_1^2 + 36d^2 + 12a_1d = a_1^2 + a_1nd + (n-1)d^2$$

$$36d^2 - (n-1)d^2 = a_1nd - 12a_1d$$

$$\Rightarrow (37-n)d^2 = a_1d(n-12)$$

$$\xrightarrow{\div d} (37-n)d = a_1(n-12) \Rightarrow a_1 = \frac{37-n}{n-12}d$$

$$\Rightarrow a_7 = a_1 + 6d = \frac{37-n}{n-12}d + 6d = \frac{25}{n-12}d$$

$$a_4 = a_1 + 3d = \frac{37-n}{n-12}d + 3d = \frac{5n-35}{n-12}d$$

$$\Rightarrow q = \frac{a_7}{a_4} = \frac{\frac{25}{n-12}d}{\frac{5n-35}{n-12}d} = \frac{n-7}{5} = 4$$



در نتیجه ❶ یک دنباله حسابی با قدرنسبت d^2 است.

$$a + d^2, b + d^2, c + d^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (b + d^2) - (a + d^2) = b - a = d \\ (c + d^2) - (b + d^2) = c - b = d \end{cases}$$

در نتیجه ❷ یک دنباله حسابی با قدرنسبت d است.

$$c + d, b + d, a + d \Rightarrow \begin{cases} (b + d) - (c + d) = b - c = -d \\ (a + d) - (b + d) = a - b = -d \end{cases}$$

در نتیجه ❸ یک دنباله حسابی با قدرنسبت $-d$ است.

❹ یک دنباله حسابی نیست، زیرا اگر جملات یک دنباله حسابی را به توان ۲ برسانیم، فاصله جملات از یکدیگر ثابت نمی‌مانند مگر آن‌که جملات دنباله یکسان باشند:

$$da^2, db^2, dc^2, \dots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} db^2 - da^2 = d(b-a)(b+a) = d^2(b+a) \\ dc^2 - db^2 = d(c-b)(c+b) = d^2(c+b) \end{cases}$$

$$\Rightarrow d^2(b+a) \neq d^2(c+b)$$

راه دوم: می‌دانیم اگر a, b و c با یکدیگر دنباله حسابی بسازند $\frac{a+c}{2} = b$ است. در نتیجه گزینه‌ای که حاصل جمع جمله اول و سوم آن برابر ۲ برابر جمله وسط نباشد، دنباله حسابی نیست:

$$ad, bd, cd \Rightarrow ad + cd = d(a+c) = 2bd \Rightarrow \checkmark$$

❶ یک دنباله حسابی است.

$$\Rightarrow (c+d) + (a+d) = \frac{a+c}{2} + 2d = 2(b+d) \Rightarrow \checkmark$$

❷ یک دنباله حسابی است.

$$\Rightarrow (a+d^2) + (c+d^2) = \frac{a+c}{2} + 2d^2 = 2(b+d^2) \Rightarrow \checkmark$$

❸ یک دنباله حسابی است.

$$da^2, db^2, dc^2 \Rightarrow da^2 + dc^2 = d(a^2 + c^2) \neq 2db^2$$

در نتیجه ❹ یک دنباله حسابی نیست.

چند تذکر:

❶ اگر به جملات یک دنباله حسابی با قدرنسبت d ، عدد ثابتی اضافه شود، دنباله جدید نیز یک دنباله حسابی با قدرنسبت d است.

❷ اگر جملات یک دنباله حسابی با قدرنسبت d را در عدد ثابتی مانند k ضرب کنیم، دنباله جدید یک دنباله حسابی با قدرنسبت kd خواهد بود.

از طرفی اگر این ریشه‌ها بخواهند تشکیل دنباله حسابی دهند باید از کوچک به بزرگ (یا برعکس) تشکیل دنباله حسابی دهند. (چرا؟) با فرض مثبت بودن α و β این دنباله به این صورت خواهد بود:

$$-\beta, -\alpha, \alpha, \beta \quad (\alpha < \beta)$$

با توجه به این دنباله، قدرنسبت دنباله برابر 2α است $(\alpha - (-\alpha) = 2\alpha)$ و در نتیجه $\beta = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$ است.

تجزیه معادله داده شده به صورت زیر است:

$$(x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2) = 0$$

دارای ریشه‌های $\pm\alpha$ و $\pm\beta$ است.

$$\Rightarrow x^4 - (\alpha^2 + \beta^2)x^2 + \alpha^2\beta^2 = 0$$

$$\xrightarrow{\beta=3\alpha} x^4 - 10\alpha^2x^2 + 9\alpha^4 = 0$$

با توجه به معادله داده شده تساوی‌های زیر برقرارند:

$$\begin{cases} x^4 - 10\alpha^2x^2 + 9\alpha^4 = 0 \\ x^4 - (3m+1)x^2 + m^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10\alpha^2 = 3m+1 \\ 9\alpha^4 = m^2 \end{cases}$$

دو طرف عبارت $10\alpha^2 = 3m+1$ را به توان ۲ می‌رسانیم و داریم:

$$\begin{cases} 100\alpha^4 = (3m+1)^2 \\ 9\alpha^4 = m^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{100}{9} = \left(\frac{3m+1}{m}\right)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3m+1}{m} = \frac{10}{3} \Rightarrow m = 3 \\ \frac{3m+1}{m} = \frac{-10}{3} \Rightarrow m = -\frac{3}{19} \end{cases}$$

که در بین گزینه‌ها فقط $m = 3$ وجود دارد.

❶- گزینه اگر جمله اول دنباله جدید را a_1' و قدرنسبت

$$\begin{cases} a_1' = a_1 + 4 \\ d' = d - k \end{cases}$$

دنباله جدید را d' بنامیم، داریم:

$$a_4' = a_1' + 39d' = a_1 + 4 + 39(d - k)$$

در نتیجه:

با توجه به تساوی a_4' و a_4 داریم:

$$a_1 + 4 + 39(d - k) = a_1 + 39d$$

$$\Rightarrow \cancel{a_1} + 4 + 39\cancel{d} - 39k = \cancel{a_1} + 39\cancel{d} \Rightarrow k = \frac{4}{39}$$

❷- راه اول: می‌دانیم اگر هر جمله از دنباله حسابی

را از جمله قبلی آن کم کنیم (به جز جمله اول) قدرنسبت حاصل می‌شود. در نتیجه:

$$ad, bd, cd \Rightarrow \begin{cases} bd - ad = d(b-a) = d^2 \\ cd - bd = d(c-b) = d^2 \end{cases}$$

چپ تساوی نیز باید مضربی از ۴ باشد. ۳ که مضرب ۴ نیست پس $m+7$ باید مضرب ۴ باشد:

$$\underbrace{3(m+7)}_{\text{مضرب ۳}} = \underbrace{4n}_{\text{مضرب ۴}} \Rightarrow \begin{cases} m+7=4k \Rightarrow \text{مضرب ۴} \\ n=3k' \Rightarrow \text{مضرب ۳} \end{cases}$$

از آنجا که m و n اعداد طبیعی اند، کوچکترین m که $m+7$ را مضربی از ۴ کند، عدد ۱ است، در نتیجه $m+7=8$ است و تساوی

$$\underbrace{3(m+7)}_8 = 4n \Rightarrow 24 = 4n \Rightarrow n=6$$

مقابل برقرار است. پس اولین جمله مشترک ششمین جمله دنباله a و اولین جمله دنباله b است. با توجه به آن که قدرنسبت دنباله‌ها ۴ و ۳ است، قدرنسبت دنباله‌های مشترک، ۱۲ است و داریم:

$$c_n = 1 + 12(n-1) = 12n - 11 \Rightarrow c_4 = 37$$

↓
جملات مشترک

۱۳- گزینه ۲ اولین جمله مشترک این دو دنباله ۷ است. از آنجا که قدرنسبت دنباله با جمله عمومی a_n برابر ۴ و قدرنسبت دنباله با جمله عمومی b_n برابر ۶ است، پس قدرنسبت جملات مشترک ک.م.م آن‌ها یعنی ۱۲ خواهد بود:

$$c_n = 7, 19, 31, \dots$$

جمله عمومی دنباله با جمله عمومی c_n به صورت زیر است:

$$\begin{cases} c_1 = 7 \\ d = 12 \Rightarrow c_n = 7 + (n-1) \times 12 = 12n - 5 \end{cases}$$

برای آن که بفهمیم بیستمین جمله مشترک چندمین جمله a_n است ابتدا $c_{20} = 12 \times 20 - 5 = 235$ را به دست می‌آوریم. حال جمله عمومی a_n را برابر c_{20} قرار می‌دهیم و n را به دست می‌آوریم:

$$a_n = c_{20} \Rightarrow 3 + 4(n-1) = 235 \Rightarrow 4(n-1) = 232 \Rightarrow n-1 = 58 \Rightarrow n = 59$$

پس داریم $c_{20} = a_{59}$. یعنی جمله ۵۹ام دنباله با جمله عمومی a_n ، جمله ۲۰ام دنباله با جمله عمومی c_n است.

۱۴- گزینه ۳

$$\begin{cases} a_9 = 12 \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 8d = 12 \\ a_{17} = 9 \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 16d = 9 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow -3d = 3 \Rightarrow d = -1 \end{cases}$$

$$a_1 + 8d = 12 \xrightarrow{d=-1} a_1 - 8 = 12 \Rightarrow a_1 = 20$$

با توجه به داشتن جمله اول و قدرنسبت این دنباله می‌توانیم مجموع جمله اول آن را به صورت زیر بنویسیم:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2} [40 - n + 1] = \frac{n}{2} [41 - n] = 0 \Rightarrow n = 41$$

۱۲- گزینه ۴ راه اول: ابتدا باید اولین جمله مشترک این دو دنباله را به دست آوریم. از آنجا که جملات اولیه دنباله a_n منفی هستند و جملات اولیه دنباله b_n مثبت هستند و هر دو دنباله صعودی‌اند. اولین جمله مشترک این دو دنباله عددی مثبت خواهد بود. در نتیجه ابتدا جمله عمومی دنباله a_n را می‌نویسیم و به کمک آن سعی می‌کنیم جملات مثبت این دنباله را بنویسیم. سپس اولین جمله مشترک این دو دنباله را پیدا می‌کنیم:

$$a_n: -19, -15, -11, \dots \Rightarrow \begin{cases} d = 4 \\ a_1 = -19 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = -19 + 4(n-1) = 4n - 23$$

اولین جمله مثبت دنباله a_n جمله ششم آن است که برابر ۱ است:

$$a_n: -19, -15, \dots, 1, 5, 9, \dots$$

$$a_6 = 4 \times 6 - 23 = 1$$

از آنجا که اولین جمله دنباله b_n برابر ۱ است، پس اولین جمله مشترک این دو دنباله ۱ است:

$$\begin{cases} a_n: -19, -15, \dots, 1, 5, \dots \\ b_n: 1, 4, 7, \dots \end{cases} \Rightarrow 1 = \text{اولین جمله مشترک}$$

از طرفی قدرنسبت دنباله a_n ، ۴ و قدرنسبت دنباله b_n ، ۳ است. در نتیجه قدرنسبت دنباله مشترک برابر ک.م.م آن‌ها یعنی ۱۲ خواهد بود و این دنباله را اگر c_n بنامیم، به صورت زیر است:

$$c_n: 1, 13, 25, 37, \dots$$

در نتیجه جمله عمومی این دنباله به صورت زیر است:

$$c_n = 1 + 12(n-1) = 12n - 11 \Rightarrow c_4 = 37$$

تذکره اگر دو دنباله حسابی دارای جملات مشترک باشند، جملات مشترک آن‌ها نیز یک دنباله حسابی‌اند که قدرنسبت آن برابر ک.م.م قدرنسبت‌های آن دو دنباله است.

راه دوم: جمله عمومی دو دنباله را می‌نویسیم:

$$a_n = -19 + 4(n-1) = 4n - 23$$

$$b_m = 1 + 3(m-1) = 3m - 2$$

حال اولین n و m را پیدا می‌کنیم که معادله زیر برقرار باشد:

$$b_m = a_n \Rightarrow 3m - 2 = 4n - 23 \Rightarrow 3m + 21 = 4n$$

$$\Rightarrow 3(m+7) = 4n$$

با توجه به آن که n و m دو عدد طبیعی‌اند، برای آن که تساوی بالا برقرار باشد لازم است $m+7$ مضرب عدد ۴ و n مضرب ۳ باشد.

زیرا سمت چپ تساوی مضرب ۳ است، در نتیجه سمت راست هم باید مضرب ۳ باشد. ۴ که مضرب ۳ نیست پس n باید مضربی از ۳ باشد. از طرفی سمت راست تساوی مضرب ۴ است، در نتیجه سمت



۱۵- گزینه ۱

با توجه به آن که جمله اول و چهارم این دنباله را داریم، می‌توانیم قدرنسبت این دنباله را به دست آوریم.

$$\begin{cases} a_4 = \frac{9}{2} \\ a_1 = -3 \end{cases} \Rightarrow a_4 - a_1 = 3d \Rightarrow \frac{9}{2} + 3 = 3d$$

$$\Rightarrow \frac{15}{2} = 3d \Rightarrow d = \frac{5}{2}$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}[-6 + 19 \times \frac{5}{2}] = -60 + 19 \times 25 = 415$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n] = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

تذکر

۱۶- گزینه ۲

دنباله شامل ۱۱ جمله است که به صورت زیر

$$4, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{9 \text{ تا}}, 34$$

هستند:

جمله اول این دنباله ۴، و جمله یازدهم آن ۳۴ است از طرفی می‌دانیم مجموع جمله اول و یازدهم، برابر مجموع جمله دوم و دهم است. پس برای محاسبه مجموع ۹ جمله وسط لازم نیست قدرنسبت دنباله محاسبه شود. زیرا مجموع جمله اول و آخر ۹ جمله درج شده همان مجموع جمله اول و یازدهم دنباله است، در نتیجه:

$$a_1 + a_{11} = a_2 + a_{10} = 4 + 34 = 38$$

$$S_9 = \frac{9 \times (a_2 + a_{10})}{2} = \frac{9 \times 38}{2} = 9 \times 19 = 171$$

۱۷- گزینه ۴

هر عددی که باقی‌مانده آن بر ۵ برابر ۳ است را

به صورت $\delta k + 3$ ($k \in \mathbb{Z}$) می‌توان نوشت. به ازای $k = 2$ ، اولین عدد دو رقمی که باقی‌مانده آن بر ۵ برابر ۳ است ایجاد می‌شود و به ازای $k = 19$ ، بزرگ‌ترین عدد دو رقمی که باقی‌مانده آن بر ۵ برابر ۳ است ایجاد می‌شود. این عدد هجدهمین جمله این دنباله است. جملات این دنباله یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۵ هستند که تعداد آن‌ها هم ۱۸ تا است:

$$S_{18} = \frac{18}{2}[a_1 + a_{18}] = 9[13 + 98] = 9 \times 111 = 999$$

تذکر: با توجه به آن که ۱۳، اولین جمله این دنباله است می‌توانستیم آخرین جمله و تعداد جملات این دنباله را به صورت زیر نیز به دست آوریم:

$$\begin{cases} a_1 = 13 \\ d = 5 \end{cases} \Rightarrow a_n = 13 + 5(n-1) = 5n + 8$$

$$\Rightarrow 5n + 8 < 100 \Rightarrow 5n < 92 \Rightarrow n < \frac{92}{5} = 18.4 \dots$$

در نتیجه بزرگ‌ترین مقدار n برابر ۱۸ است. به ازای $n = 18$ ، $a_{18} = 98$ خواهد بود.

۱۸- گزینه ۱

$$\begin{cases} S_6 = \frac{6}{2}[2a_1 + (6-1)d] = 3[2a_1 + 5d] = 6a_1 + 15d \\ a_6 = a_1 + 5d \end{cases}$$

با توجه به تساوی S_6 و a_6 داریم:

$$S_6 = a_6 \Rightarrow 6a_1 + 15d = a_1 + 5d \Rightarrow 5a_1 + 10d = 0$$

$$\Rightarrow d = -\frac{5}{12}a_1$$

از طرفی می‌دانیم $a_7 = a_1 + 6d$ است و با توجه به آن که

$$d = -\frac{5}{12}a_1 \text{ است، داریم:}$$

$$\frac{a_7}{a_1} = \frac{a_1 + 6d}{a_1} = \frac{a_1 + (6 \times -\frac{5}{12}a_1)}{a_1} = \frac{a_1 - \frac{5}{2}a_1}{a_1} = \frac{-\frac{3}{2}a_1}{a_1} = -\frac{3}{2}$$

۱۹- گزینه ۱

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2a_1 + (20-1)d] = 10[2a_1 + 19d] = 300$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 19d = 30$$

از طرفی می‌دانیم $d = 2a_1$ در نتیجه:

$$\begin{cases} 2a_1 + 19d = 30 \\ d = 2a_1 \end{cases} \Rightarrow d + 19d = 30 \Rightarrow 20d = 30 \Rightarrow d = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow d = 2a_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{3}{4}$$

با توجه به آن که جمله اول این دنباله $\frac{3}{4}$ و قدرنسبت آن $\frac{3}{4}$ است، می‌توانیم جمله عمومی آن را بنویسیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}(n-1) = \frac{3}{4}n - \frac{3}{4}$$

می‌خواهیم بدانیم جمله چندم این دنباله برابر $\frac{147}{4}$ است، پس

جمله عمومی را برابر $\frac{147}{4}$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{3}{4}n - \frac{3}{4} = \frac{147}{4} \Rightarrow \frac{3}{4}n = \frac{150}{4} \Rightarrow n = 25$$

۲۰- گزینه ۴

راه اول: ۵ جمله دوم این دنباله خود یک

دنباله حسابی‌اند که جمله اول آن a_6 و جمله آخر آن a_1 است. در

نتیجه مجموع این ۵ جمله برابر $S_1 - S_5 = \frac{5}{2}[a_6 + a_1]$ است.

از طرفی مجموع ۵ جمله اول این دنباله برابر است با:

$$S_5 = \frac{5}{2}[a_1 + a_5]$$

راه دوم:

$$\begin{cases} S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \\ S_n = n^2 a_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = n^2 a_1$$

$$\Rightarrow a_1 + a_n = 2na_1 \Rightarrow a_n = (2n-1)a_1 \Rightarrow \frac{a_n}{a_1} = 2n-1$$

ابتدا قدرنسبت دنباله را به دست می آوریم: **گزینه ۴-۲۲**

$d = 6 - 2 = 4$
 $-2, 2, 6, \dots$
 $+4 \quad +4$

حالا به کمک جمله اول و قدرنسبت، S_n را بر حسب n می نویسیم.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}[-4 + 4(n-1)] = \frac{n}{2}[4n-8] = n(2n-4)$$

با حل نامعادله $S_n > 200$ حداقل n را می توانیم به دست آوریم:

$$S_n = n(2n-4) > 200 \Rightarrow 2n(n-2) > 200$$

$$\Rightarrow n(n-2) > 100$$

از آن جا که n و $n-2$ دو عدد طبیعی باید باشند که به فاصله ۲ از هم هستند با حدس و آزمایش حداقل آن را به دست می آوریم:

$$n=11 \Rightarrow n(n-2) = 99 < 100 \quad \times$$

$$n=12 \Rightarrow n(n-2) = 12 \times 10 > 100 \quad \checkmark$$

پس حداقل n برابر ۱۲ است.

تذکره می توانیم به کمک اتحاد مربع دوجمله ای نیز این نامعادله را

حل کنیم: $S_n = n(n-2) > 100 \Rightarrow n^2 - 2n > 100$

$$\Rightarrow n^2 - 2n + 1 > 101 \Rightarrow (n-1)^2 > 101 \Rightarrow n \geq 12$$

گزینه ۴-۲۳ $a_4 = 2a_9 \Rightarrow a_1 + 3d = 2(a_1 + 8d)$

$$\Rightarrow a_1 + 3d = 2a_1 + 16d \Rightarrow a_1 + 13d = 0 \Rightarrow a_{14} = 0$$

با توجه به این که جمله چهاردهم برابر صفر است. ۱۳ جمله اول با

۱۳ جمله بعد از جمله چهاردهم ۲ به دو قرینه یکدیگرند. در نتیجه

حاصل جمعشان صفر است:

$$\begin{matrix} a_1 & \dots & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & \dots & a_{27} \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ -13d & & -d & 0 & d & 2d & 3d & & 13d \end{matrix}$$

$$a_1 = -a_{27}, a_2 = -a_{26}, \dots, a_{13} = -a_{15}$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_{27} = 0$$

در نتیجه:

$$\frac{5}{2}[a_6 + a_{10}] - \frac{5}{2}[a_1 + a_5] = \frac{5}{2}[a_6 + a_{10} - a_1 - a_5]$$

مجموع ۵ جمله اول مجموع ۵ جمله دوم

از طرفی می دانیم $a_6 - a_1 = 5d$ و $a_{10} - a_5 = 5d$ است، در

نتیجه:

$$\frac{5}{2}[a_6 - a_1 + a_{10} - a_5] = \frac{5}{2}[5d + 5d] = \frac{5}{2} \times 10d = 25d$$

اما با توجه به آن که جمله عمومی این دنباله به صورت $a_n = 4n - 3$

است، قدرنسبت آن برابر ۴ است (ضریب n همان قدرنسبت دنباله

حسابی است)، در نتیجه:

$$100 = 25d = 25 \times 4 = 100$$

راه دوم: می دانیم $a_p - a_q = (p-q)d$ است. در نتیجه $a_6 - a_1 = 5d$

و $a_{10} - a_5 = 5d$ و $a_9 - a_4 = 5d$ و $a_8 - a_3 = 5d$ و $a_7 - a_2 = 5d$

برابر $5d$ خواهند داشت. در نتیجه مجموع ۵ جمله دوم به اندازه ۵

تا $5d$ یعنی $25d$ از مجموع ۵ جمله اول بیشتر است:

$$\frac{a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5} = \frac{5d + 5d + 5d + 5d + 5d}{5d + 5d + 5d + 5d + 5d} = 25d$$

با توجه به آن که $a_n = 4n - 3$ است، $d = 4$ است و اختلاف ۵

جمله دوم از اول برابر $100 = 25 \times 4$ است.

تذکره مجموع n جمله دوم یک دنباله حسابی از مجموع n جمله

اول آن به اندازه $n^2 d$ بیشتر است. (چون هر جمله از n جمله دوم

nd بیشتر است پس $n \times nd$ یعنی $n^2 d$ بیشتر هستند.)

گزینه ۴-۲۱

راه اول:

$$\begin{cases} S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \\ a_n = a_1 + (n-1)d \\ S_n = n^2 a_1 \end{cases} \Rightarrow n^2 a_1 = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow 2na_1 = 2a_1 + nd - d \Rightarrow 2na_1 - 2a_1 = nd - d$$

$$\Rightarrow 2a_1(n-1) = d(n-1)$$

$$2a_1 = d \quad \text{با فرض آن که } n \neq 1 \text{ است، داریم:}$$

در نتیجه: $\frac{a_n}{a_1} = \frac{a_1 + (n-1)d}{a_1} \stackrel{2a_1=d}{=} \frac{a_1 + 2a_1(n-1)}{a_1}$

$$= \frac{a_1(1+2(n-1))}{a_1} = 1+2n-2 = 2n-1$$



۲۴- گزینه ۲

راه اول: دو دنباله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} a_1, a_2, a_3, \dots \\ d, 2d, 3d, \dots \end{cases}$$

d قدرنسبت دو دنباله است. پس دنباله‌ای که هر جمله آن از حاصل جمع دو جمله با شماره جمله مشابه به دست می‌آید، دارای قدرنسبت $2d$ است:

$$a_1 + d, a_2 + 2d, a_3 + 3d, \dots$$

$$S_1 = \frac{1}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

در نتیجه:

$$S'_1 = \frac{1}{2} [2(a_1 + d) + (n-1) \times 2d]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_1 = \frac{1}{2} [2a_1 + (n-1)d] \\ S'_1 = \frac{1}{2} [2a_1 + 2d + 2(n-1)d] \end{cases}$$

$$\Rightarrow S'_1 - S_1 = \frac{1}{2} [2a_1 + 2d + 2(n-1)d - 2a_1 - (n-1)d]$$

$$\stackrel{n=1}{=} \frac{1}{2} \Delta \left[\underbrace{(n-1)}_1 d + 2d \right] = \frac{1}{2} \Delta [11d] = 5.5d = 110 \Rightarrow d = 2$$

راه دوم: جملات اول، دوم، سوم و ... دنباله دوم به ترتیب هر کدام d واحد بزرگ‌تر از جملات اول، دوم، سوم و ... دنباله اول است:

$$\begin{array}{c} a_1 + d, a_2 + 2d, a_3 + 3d, \dots \\ \hline a_1, a_2, a_3, \dots \\ \hline d, 2d, 3d, \dots \end{array}$$

در نتیجه مجموع جملات دنباله دوم به اندازه حاصل جمع زیر از مجموع جملات دنباله اول بیشتر است:

$$S'_1 - S_1 = d + 2d + 3d + \dots + 10d = \frac{10 \times 11d}{2} = 55d$$

$$\Rightarrow S'_1 - S_1 = 55d = 110 \Rightarrow d = 2$$

۲۵- گزینه ۲

با نوشتن چند جمله اول این دو دنباله اولین

جمله مشترک آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 2, 5, 8, (11), \dots \\ 3, 7, (11), 15, \dots \end{aligned} \Rightarrow 11 \text{ اولین جمله مشترک}$$

از آن‌جا که ۱۱ عددی دورقمی است، اولین جمله جملات مشترک دورقمی نیز محسوب می‌شود. با توجه به آن که قدرنسبت دو دنباله به ترتیب ۳ و ۴ است، پس جملات مشترک دارای قدرنسبتی برابر ۱۲ (به مقدار ک.م.م قدرنسبت دو دنباله) دارند: ۱۱، ۲۳، ۳۵، ... حال می‌توانیم جمله عمومی جملات مشترک را بنویسیم:

$$a_n = 11 + 12(n-1) = 12n - 1$$

از آن‌جا که آخرین جمله این دنباله بزرگ‌ترین عدد ۲ رقمی در این

دنباله است، داریم:

$$12n - 1 < 100 \Rightarrow 12n < 101 \Rightarrow n < \frac{101}{12} \approx 8.416 \dots$$

در نتیجه این دنباله دارای ۸ جمله است. پس مجموع این ۸ جمله برابر است با:

$$S_8 = \frac{1}{2} [2 \times 11 + 7 \times 12] = 4[22 + 84] = 4 \times 106 = 424$$

۲۶- گزینه ۱

$$S_{40} = 860 \Rightarrow S_{40} = \frac{40}{2} [2a_1 + 39d] = 860$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 39d = 43$$

با توجه به آن که a_1 و d هر دو عدد طبیعی هستند، با عددگذاری می‌توانیم d و a_1 را به دست آوریم:

$$2a_1 + 39d = 43 \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

$$S_{40} = \frac{40}{2} [2a_1 + 39d] = 10[4 + 19] = 230 \quad \text{در نتیجه:}$$

راه اول:

۲۷- گزینه ۲

$$S_{40} = \frac{40}{2} [2a_1 + 39d] = 10[2a_1 + 39d]$$

$$S_1 = \frac{1}{2} [2a_1 + 39d] = 5[2a_1 + 39d]$$

$$\Rightarrow S_{40} - 2S_1 = 10[2a_1 + 39d] - 10[2a_1 + 39d]$$

$$= 190d - 90d = 100d$$

راه دوم: می‌دانیم $S_{40} - S_1$ مجموع ۱۰ جمله دوم یک دنباله حسابی است. اولین جمله ۱۰ جمله دوم (یعنی جمله یازدهم) $10d$ بیشتر از جمله اول دنباله است. دومین جمله ۱۰ جمله دوم (جمله دوازدهم) نیز $10d$ بیشتر از جمله دوم دنباله است. به همین ترتیب دهمین جمله ۱۰ جمله دوم (یعنی جمله بیستم) نیز $10d$ بیشتر از جمله دهم است. در نتیجه مجموع ۱۰ جمله دوم از مجموع ۱۰ جمله اول $100d$ بیشتر است.

$$S_{40} - 2S_1 = \underbrace{S_{40} - S_1}_{\substack{\text{مجموع} \\ \text{جمله دوم}}} - \underbrace{S_1}_{\substack{\text{مجموع} \\ \text{جمله اول}}} = 10 \times 10d = 100d$$

$$\begin{cases} S_{40} - S_1 = S_{11} + S_{12} + \dots + S_{40} \\ S_1 = S_1 + S_2 + \dots + S_{10} \end{cases}$$

$$S_{40} - S_1 - S_1 = \underbrace{10d + 10d + \dots + 10d}_{100d}$$

$$\Rightarrow S_{40} - 2S_1 = 100d$$

تذکر مجموع n جمله دوم هر دنباله حسابی با قدرنسبت d ، $n^2 d$

بیشتر از مجموع n جمله اول است.

برابر است با m برابر مجموع جملات اول و آخر.

تذکره اگر $m + n = p + q$ باشد، حاصل جمع جملات m ام و n ام با حاصل جمع جملات p ام و q ام برابر است.

$$a_m + a_n = a_p + a_q$$

مثال به عنوان مثال: $a_1 + a_{10} = a_2 + a_9 = a_3 + a_8$

$$1 + 10 = 2 + 9 = 3 + 8$$

۳۱- گزینه ۱ راه اول: در دنباله a اگر جمله عمومی

$a_n = 3n + a$ باشد، به ازای $n = 1$ جمله اول به دست می‌آید:

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 3 + a$$

از طرفی اگر S_n مجموع n جمله اول دنباله حسابی باشد، S_1 همان

$$S_1 = a_1 = b \times 1^2 + 4 \times 1 = b + 4 \quad \text{جمله اول } (a_1) \text{ است:}$$

$$3 + a = b + 4 \Rightarrow a - b = 1$$

در نتیجه:

از طرفی $S_2 = a_1 + a_2$ است، در نتیجه $S_2 - a_1 = a_2$ می‌شود و

در نتیجه داریم: $S_2 - S_1 = a_2$.

$$\begin{cases} S_2 = b \times 2^2 + 4 \times 2 = 4b + 8 \\ S_1 = a_1 = 3 + a \\ a_2 = 3 \times 2 + a = a + 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_2 - S_1 = 4b + 8 - a - 3 = a + 6 \Rightarrow 4b - 2a = 1$$

با حل دستگاه زیر داریم:

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ 4b - 2a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 4b = 4 \\ 4b - 2a = 1 \end{cases} \Rightarrow 2a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

$$\xrightarrow{a = \frac{5}{2}} 4b - 5 = 1 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$$

راه دوم: اگر از مجموع n جمله اول هر دنباله مجموع جمله اول را کم کنیم، حاصل، جمله n ام خواهد بود:

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n \Rightarrow S_n - S_{n-1} = a_n$$

اگر در رابطه $S_n = bn^2 + 4n$ به جای n ، $n-1$ قرار دهیم، مجموع $n-1$ جمله اول به دست می‌آید:

$$\begin{cases} S_n = bn^2 + 4n \\ S_{n-1} = b(n-1)^2 + 4(n-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_n - S_{n-1} = bn^2 + 4n - b(n-1)^2 - 4(n-1) = a_n$$

$$\Rightarrow bn^2 + 4n - bn^2 + 2bn - b - 4n + 4 = 3n + a$$

$$\Rightarrow 2bn - b + 4 = 3n + a$$

۲۸- گزینه ۴

می‌دانیم S_1 برابر همان a_1 است. در نتیجه:

$$S_{20} = 3 \times 20 - 2 \times 20^2 = 60 - 800 = -740$$

$$S_1 = a_1 = 3 - 2 = 1$$

$$\Rightarrow S_{20} - 20a_1 = -740 - 20 = -760$$

۲۹- گزینه ۳

می‌دانیم در هر دنباله حسابی قدرنسبت برابر

است با حاصل تفاضل هر جمله از جمله قبلی. در نتیجه تفاضل جمله دوم از اول برابر d ، تفاضل جمله چهارم از سوم برابر d و در حالت کلی تفاضل هر جمله با ردیف زوج به اندازه d واحد از جمله قبلی آن، که در ردیف فرد است بیشتر است. در نتیجه مجموع جملات ردیف زوج در 100 جمله ابتدایی، $50d$ بیشتر از مجموع جملات ردیف فرد است و در نتیجه:

$$6S = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{100}$$

$$S = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{99}$$

$$5S = \underbrace{d + d + d + \dots + d}_{\text{تا } 50} \Rightarrow 5S = 50d \Rightarrow S = 10d$$

$$\xrightarrow{d=4} S = 40$$

۳۰- گزینه ۳

در هر دنباله حسابی مجموع جمله اول و

n ام، دوم و $n-1$ ام، سوم و $n-2$ ام و ... با هم برابرند. در واقع با افزایش شماره جمله از 1 به 2 قدرنسبت d واحد افزایش می‌یابد اما با کاهش شماره جمله از $n-1$ به n ، قدرنسبت d واحد کاهش می‌یابد در نتیجه مجموع جمله اول و n ام با مجموع جمله دوم و $n-1$ ام برابر است.

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3}$$

$$= a_5 + a_{n-4}$$

در نتیجه مجموع 5 جمله اول و 5 جمله آخر برابر مجموع جملات اول و آخر است:

$$+ \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4} \end{cases}$$

$$(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2})$$

$$+ (a_4 + a_{n-3}) + (a_5 + a_{n-4}) = 5(a_1 + a_n)$$

از طرفی با توجه به سؤال، مجموع 5 جمله اول و آخر برابر $45 = 17 + 28$ است. در نتیجه:

$$5(a_1 + a_n) = 45 \Rightarrow a_1 + a_n = 9$$

با توجه به آن که مجموع n جمله اول برابر 54 است، داریم:

$$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n] = 54 \Rightarrow \frac{9n}{2} = 54 \Rightarrow n = 12$$

تذکره مجموع m جمله اول هر دنباله حسابی با m جمله آخر آن،



$$\Rightarrow q = 3 \Rightarrow \begin{cases} a_1 + d = q \\ a_1 + 4d = q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + d = 3 \\ a_1 + 4d = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 2 \\ a_1 = 1 \end{cases} \quad \underline{rd = 6}$$

تذکر اگر a_n و a_m و a_k جملات یک دنباله حسابی باشند که

تشکیل دنباله هندسی با قدرنسبت q بدهند، داریم:

$$q = \frac{k-m}{m-n}$$

$$q = \frac{14-5}{5-2} = \frac{9}{3} = 3$$

در نتیجه:

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{q} [2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{3} [2 + 2n - 2] = n^2$$

پس $S_n = n^2$ است. یعنی S_n مربع کامل است. تنها مربع کامل در بین گزینه‌ها ۴۹ است.

۳۴ - گزینه ۴ مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی به

صورت $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ است که در آن q قدرنسبت و a_1 جمله اول است. در نتیجه:

$$S_6 = \frac{a_1(q^6 - 1)}{q - 1} = 77$$

$$S_3 = \frac{a_1(q^3 - 1)}{q - 1} = 88$$

با تقسیم S_6 به S_3 داریم:

$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{\frac{a_1(q^6 - 1)}{q - 1}}{\frac{a_1(q^3 - 1)}{q - 1}} = \frac{77}{88} \Rightarrow \frac{q^6 - 1}{q^3 - 1} = \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{(q^3 - 1)(q^3 + 1)}{(q^3 - 1)} = \frac{7}{8} \Rightarrow q^3 + 1 = \frac{7}{8} \Rightarrow q^3 = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow q = -\frac{1}{2}$$

و از طرفی می‌دانیم $a_8 = a_1 q^7$ و $a_5 = a_1 q^4$ است، با تقسیم

$$\frac{a_8}{a_5} = \frac{a_1 q^7}{a_1 q^4} = \frac{1}{q^3} = \frac{1}{(-\frac{1}{2})^3} = -8$$

به a_8 داریم:

۳۵ - گزینه ۲

$$\frac{S_8}{S_4} = 17 \Rightarrow \frac{a_1 \frac{(q^8 - 1)}{q - 1}}{a_1 \frac{(q^4 - 1)}{q - 1}} = 17 \Rightarrow \frac{q^8 - 1}{q^4 - 1} = 17$$

$$\Rightarrow \frac{(q^4 - 1)(q^4 + 1)}{(q^4 - 1)} = 17 \Rightarrow q^4 + 1 = 17 \Rightarrow q^4 = 16$$

$$\Rightarrow q = \pm 2$$

باید ضریب جمله درجه اول دو سمت (ضریب n) و مقدار عددی دو سمت با هم برابر باشند تا تساوی همواره صحیح باشد:

$$2bn + 4 - b = 3n + a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{2} \\ 4 - b = a \xrightarrow{b = \frac{3}{2}} a = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow a + b = 4$$

تذکر اگر a_n و S_n به ترتیب جمله عمومی و مجموع n جمله اول

یک دنباله حسابی باشند، داریم: $S_1 = a$, $S_n - S_{n-1} = a_n$

۳۲ - گزینه ۳ اگر a , b و c سه جمله متوالی یک دنباله

هندسی باشند، داریم $ac = b^2$. پس در این جا داریم:

$$a_1, a_5, a_9 \Rightarrow a_1, a_9 = a_5^2$$

از طرفی می‌دانیم $a_5 = a_1 + 4d$ و $a_9 = a_1 + 8d$ است. پس:

$$a_1(a_1 + 8d) = (a_1 + 4d)^2$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 8a_1d = a_1^2 + 8a_1d + 16d^2$$

$$16d^2 = -2a_1d \xrightarrow{\div 2d} 8d = -a_1$$

$$S_n = \frac{n}{q} [2a_1 + (n-1)d]$$

از طرفی می‌دانیم:

با توجه به تساوی $a_1 = -8d$ داریم:

$$S_n = \frac{n}{q} [-16d + (n-1)d] = 0 \Rightarrow -16d + (n-1)d = 0$$

$$\Rightarrow n - 1 = 16 \Rightarrow n = 17$$

تذکر می‌توانیم خیلی سریع از روی تساوی $a_1 = -8d$ نتیجه

بگیریم پس $a_1 + 8d = 0$ است؛ یعنی $a_9 = 0$ است. با توجه به

آن که دنباله حسابی است پس جملات قبل و بعد a_9 دوه‌دو قرینه

یکدیگرند. پس مجموع ۸ جمله اول و ۸ جمله بعد از a_9 همگی صفر

خواهد بود. پس مجموع ۱۷ جمله اول دنباله برابر صفر است.

$$\begin{matrix} a_1 & \dots & a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ -8d & & -2d & -d & 0 & d & 2d & & & & 8d \end{matrix}$$

$$a_1 + a_9 + \dots + a_9 + a_1 + \dots + a_1 = 0$$

۳۳ - گزینه ۳

$$a_2 = a_1 + d = q$$

$$a_5 = a_1 + 4d = q^2 \Rightarrow a_5 - a_2 = 3d = q^2 - q$$

$$a_{14} = a_1 + 13d = q^3 \Rightarrow a_{14} - a_5 = 9d = q^3 - q^2$$

$$\Rightarrow \frac{3d}{9d} = \frac{q^2 - q}{q^3 - q^2} \Rightarrow \frac{q(q-1)}{q^2(q-1)} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\frac{q \neq 0}{q \neq 1}} \frac{1}{q} = \frac{1}{3}$$

راه دوم: در هر دنباله هندسی جملات ردیف فرد (جملات با شماره جمله فرد) با یکدیگر یک دنباله هندسی با قدرنسبت q^2 می‌سازند. هم‌چنین جملات ردیف زوج نیز با یکدیگر یک دنباله هندسی با قدرنسبت q^2 می‌سازند. زیرا:

$$a_1, a_3, a_5, \dots \quad \frac{a_3}{a_1} = \frac{a_5}{a_3} = \dots = \frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}} = q^2$$

$\times q^2 \quad \times q^2$

$$a_2, a_4, a_6, \dots \quad \frac{a_4}{a_2} = \frac{a_6}{a_4} = \dots = \frac{a_{2k}}{a_{2k-2}} = q^2$$

$\times q^2 \quad \times q^2$

در نتیجه جملات ردیف فرد دنباله‌ای با قدرنسبت q^2 هستند که جمله اول آن‌ها a_1 است و اگر تعداد اعضای دنباله $2n$ باشد، تعداد جملات این دنباله n است. در نتیجه:

$$\left\{ \begin{aligned} S_{2n} &= \frac{a_1(q^{2n} - 1)}{q - 1} \\ S' &= \frac{a_1((q^2)^n - 1)}{q^2 - 1} = \frac{a_1(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1} \end{aligned} \right.$$

قدرنسبت
مجموع جملات ردیف فرد
قدرنسبت

با توجه به آن که $S_{2n} = 4S'$ است، داریم:

$$\frac{a_1(q^{2n} - 1)}{q - 1} = \frac{4a_1(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1} \Rightarrow \frac{1}{q - 1} = \frac{4}{q^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{q^2 - 1}{q - 1} = 4 \Rightarrow \frac{(q - 1)(q + 1)}{(q - 1)} = 4$$

$$\xrightarrow{q \neq 1} q + 1 = 4 \Rightarrow q = 3$$

۳۸- گزینه ۱

$$\left\{ \begin{aligned} S_6 &= \frac{a_1(q^6 - 1)}{q - 1} = 126 \\ a_1 + a_6 &= 18 \Rightarrow a_1 + a_1q^5 = 18 \Rightarrow a_1(q^5 + 1) = 18 (*) \end{aligned} \right.$$

از تقسیم S_6 به $a_1 + a_6$ داریم:

$$\frac{S_6}{a_1 + a_6} = \frac{126}{18} \Rightarrow \frac{a_1 \frac{(q^6 - 1)}{q - 1}}{a_1(q^5 + 1)} = 7$$

$$\Rightarrow \frac{(q^6 - 1)(q^5 + 1)}{(q - 1)(q^5 + 1)} = 7 \Rightarrow \frac{q^6 - 1}{q - 1} = 7$$

اگر قدرنسبت یک دنباله هندسی منفی باشد، جملات آن یک در میان مثبت و منفی‌اند و نه کاهشی و نه افزایشی‌اند، در نتیجه

$$\frac{a_7}{a_4} = \frac{a_1q^6}{a_1q^3} = q^3 = 2^3 = 8 \quad \text{پس: } q = 2$$

تذکره در هر دنباله هندسی با قدرنسبت q داریم:

۳۶- گزینه ۱ **راه اول:** می‌دانیم در حالت کلی جمله عمومی

هر دنباله هندسی به صورت $a_n = a_1q^{n-1}$ است. در نتیجه می‌توانیم با توجه به جمله عمومی دنباله، a_1 و q را به دست آوریم:

$$a_n = 2^{1-n} = 2^{-(n-1)} = (2^{-1})^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_1q^{n-1} = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{در نتیجه:}$$

راه دوم: اگر به جای n قرار دهیم ۱، جمله اول به دست می‌آید و از طرفی $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ ، در نتیجه:

$$\begin{cases} a_1 = 2^0 = 1 \\ q = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2^{1-n}}{2^{1-(n-1)}} = \frac{2^{1-n}}{2^{2-n}} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

در نتیجه:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$\xrightarrow{q = \frac{1}{2}, a_1 = 1} S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 2(1 - 2^{-n})$$

$$\Rightarrow S_n = 2 - 2^{1-n} \xrightarrow{a_n = 2^{1-n}} S_n = 2 - a_n$$

۳۷- گزینه ۲ **راه اول:** هر جمله با شماره جمله زوج،

q برابر هر جمله با شماره جمله فرد ماقبل خود است. پس اگر

تعداد جملات دنباله زوج باشد. مجموع جملات ردیف زوج، q

برابر مجموع جملات ردیف فرد است. پس اگر فرض کنیم مجموع

جملات ردیف فرد X باشد، مجموع جملات ردیف زوج Xq است:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1, a_2, a_3, a_4, a_{2n-1}, a_{2n} & & & & & & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & & \\ a_1q & a_2q & & a_{2n-1}q & & & \\ q(a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) & = & a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} & & & & \\ \underbrace{\hspace{10em}}_X & & \underbrace{\hspace{10em}}_{Xq} & & & & \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع کل جملات} = \underbrace{X}_{\text{مجموع جملات ردیف فرد}} + \underbrace{Xq}_{\text{مجموع جملات ردیف زوج}} = 4X$$

$$\Rightarrow 3X = Xq \Rightarrow q = 3$$



با توجه به آن که q عددی است طبیعی با حدس و آزمایش $q = 3$

$$q = 3 \Rightarrow 3^2 \times (3-1) = 18 \quad \text{خواهد بود:}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \text{در هر دنباله هندسی می‌دانیم } q \quad \text{گزینه ۴}$$

پس $a_{n+1} = a_n q$ پس:

$$a_{n+1} + a_n = a_n q + a_n = a_n (q+1)$$

$$\frac{a_r}{a_r + a_{r+1}} = \frac{a_r}{a_r(1+q)} = \frac{1}{q+1} \quad \text{در نتیجه:}$$

$$\frac{a_r}{a_r + a_{r+1}} = \frac{a_r}{a_r(1+q)} = \frac{1}{q+1}$$

$$\frac{a_n}{a_n + a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_n(1+q)} = \frac{1}{q+1}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_{10}}{a_{10} + a_{11}} = \frac{10}{q+1}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{q+1} = 2 \Rightarrow q = 4$$

گزینه ۴-۲

$$\begin{cases} S_{rn} = \frac{a_1(q^{rn} - 1)}{q-1} = 119 \\ S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} = 3 \end{cases}$$

با تقسیم S_{rn} بر S_n داریم:

$$\frac{S_{rn}}{S_n} = \frac{\frac{a_1(q^{rn} - 1)}{q-1}}{\frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}} = \frac{q^{rn} - 1}{q^n - 1} = \frac{119}{3} = 27\frac{2}{3}$$

با توجه به اتحاد $a^r - b^r = (a-b)(a^{r-1} + ab^{r-2} + \dots + b^{r-1})$ داریم:

$$\frac{q^{rn} - 1}{q^n - 1} = 27\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{(q^n - 1)(q^{rn} + q^{n(r-1)} + \dots + q^n + 1)}{(q^n - 1)} = 27\frac{2}{3}$$

با توجه به آن که $q = 2$ است، داریم:

$$q^{rn} + q^n + 1 = 27\frac{2}{3} \xrightarrow{q=2} 2^{rn} + 2^n = 27\frac{2}{3}$$

در رابطه بالا اگر $n = 4$ ، تساوی برقرار است:

$$n = 4 \Rightarrow 2^8 + 2^4 = 256 + 16 = 272$$

تذکره برای حل معادله $2^{2n} + 2^n = 272$ می‌توان فرض کرد $2^n = t$ است و به کمک حل معادله درجه ۲ نیز معادله را حل کرد

که کمی برای تست طولانی است!

$$2^n = t \Rightarrow t^2 + t = 272 \Rightarrow t^2 + t - 272 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(q-1)(q^2 + q + 1)}{(q-1)} = 7 \Rightarrow q^2 + q - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (q+3)(q-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = -3 & \text{غ ق} \\ q = 2 \end{cases}$$

با توجه به آن که دنباله داده شده باید دارای قدرنسبت بزرگ‌تر از ۱ باشد. $q = -3$ غیرقابل قبول است.

حال با توجه به داشتن $q = 2$ با جای‌گذاری در رابطه (*) می‌توانیم a_1 را به دست آوریم:

$$a_1(q^r + 1) = 18 \xrightarrow{q=2} 9a_1 = 18 \Rightarrow a_1 = 2$$

$$S_\Delta = \frac{a_1(q^\Delta - 1)}{q-1} = \frac{2(2^\Delta - 1)}{2-1} = 62 \quad \text{در نتیجه:}$$

$$a^r - b^r = (a-b)(a^{r-1} + ab^{r-2} + \dots + b^{r-1}) \quad \text{تذکره}$$

$$a^r + b^r = (a+b)(a^{r-1} - ab^{r-2} + \dots + b^{r-1})$$

گزینه ۳۹-۱ می‌دانیم اگر a, b, c سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند داریم $ac = b^2$. پس:

$$4, a, \frac{1}{4} \Rightarrow 4 \times \frac{1}{4} = a^2 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

قدرنسبت منفی است پس $a = -1$ است. در نتیجه:

$$a = -1 \Rightarrow q = -\frac{1}{4}$$

$$S_\Delta = \frac{a_1 \left(\frac{1 - q^\Delta}{1 - q} \right)}{a_1 q^r} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^\Delta}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{4^\Delta + 1}{4^\Delta} = \frac{4^\Delta + 1}{4^\Delta} = \frac{1025}{5} = 205$$

گزینه ۴۰-۲

$$\begin{cases} S_q = \frac{a_1(q^q - 1)}{q-1} = 5 \\ a_{12} - a_3 = 90 \Rightarrow a_1 q^{11} - a_1 q^2 = 90 \\ \Rightarrow a_1 q^2 (q^9 - 1) = 90 \end{cases}$$

با تقسیم S_q بر $a_{12} - a_3$ ، داریم:

$$\frac{S_q}{a_{12} - a_3} = \frac{\frac{a_1(q^q - 1)}{q-1}}{\frac{a_1(q^9 - 1)}{q-1}} = \frac{5}{90}$$

$$\frac{1}{q^2(q-1)} = \frac{1}{18} \Rightarrow q^2(q-1) = 18$$

$$S'_0 = 1 + x + x^2 + \dots + x^9 = \frac{b_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{1 \times (x^{10} - 1)}{x - 1}$$

$$= \frac{x^{10} - 1}{x - 1}$$

در نتیجه:

$$(1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^9)(1 + x + x^2 + \dots + x^9)$$

$$= \frac{1 - x^{10}}{x + 1} \times \frac{x^{10} - 1}{x - 1} = -\frac{(x^{10} - 1)^2}{x^2 - 1}$$

در نتیجه به ازای $x = \sqrt{2}$ داریم:

$$-\frac{(x^{10} - 1)^2}{x^2 - 1} = -\frac{(\sqrt{2}^{10} - 1)^2}{\sqrt{2}^2 - 1} = -31^2 = -961$$

۴۵- گزینه ۴ راه اول: بدون در نظر گرفتن دسته‌ها، دنباله زیر یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۲ است:

$$b_n : 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$$

برای پیدا کردن اولین جمله و آخرین جمله دسته نهم باید ببینیم جمله اول دسته نهم چندمین جمله از دنباله فوق است. با توجه به آن که دسته اول ۱ عضو، دسته دوم ۲ عضو، دسته سوم ۳، ... و دسته n ام n عضو دارد، پس شماره جمله اولین جمله دسته نهم از حاصل جمع $1 + 2 + 3 + \dots + 8 + 1$ به دست می‌آید:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 8 = \frac{9 \times 8}{2} = 36 \Rightarrow 1 + 2 + \dots + 8 + 1 = 37$$

پس ۳۷ امین جمله دنباله b_n اولین جمله دسته نهم است. چون دنباله یک دنباله حسابی است، پس درون هر دسته نیز یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۲ است. تعداد جملات هر دسته نیز با شماره آن دسته برابر است. پس:

$$a_1 = b_{37} = 1 + (37 - 1) \times 2$$

$$= 1 + 36 \times 2 = 73$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d) \Rightarrow S_n = \frac{9}{2}[2a_1 + 8d]$$

$$S_n = 9(a_1 + 4d) = 9(73 + 8) = 9 \times 81 = 729$$

راه دوم: حاصل جمع هر دسته برابر تعداد اعضای دسته به توان ۳ است. (این مطلب را با کمی تلاش می‌توان اثبات کرد.) در نتیجه حاصل جمع اعضای دسته نهم برابر ۹^۳ است. $9^3 = 729$

۴۶- گزینه ۴ جملات هر دسته یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۲ هستند. تعداد جملات هر دسته برای شماره آن دسته است. مثلاً دسته اول ۱ عضو، دسته دوم ۲ عضو و ... و دسته n ام، n عضو دارد.

اگر اولین جمله هر دسته را بتوانیم به دست آوریم می‌توانیم به کمک رابطه مجموع جملات دنباله هندسی مجموع کل اعضای آن دسته را حساب کنیم.

$$\Rightarrow (t - 16)(t + 17) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 16 \Rightarrow 2^n = 16 \Rightarrow n = 4 \\ t = -17 \Rightarrow 2^n = -17 \Rightarrow \text{امکان ناپذیر است} \end{cases}$$

به دنباله‌های زیر دقت کنید:

$$a : 1, x, x^2, \dots, x^{11}$$

$$b : 1, x^3, x^6, x^9$$

دنباله a یک دنباله هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت x است. در نتیجه مجموع ۱۲ جمله اول این دنباله برابر است با:

$$S_{12} = \frac{b_1(q^{12} - 1)}{q - 1} = \frac{1 \times (x^{12} - 1)}{x^3 - 1} = \frac{x^{12} - 1}{x^3 - 1}$$

دنباله b یک دنباله هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت x^۳ است که مجموع ۴ جمله اول آن برابر است با:

$$S'_4 = \frac{b_1(q^4 - 1)}{q - 1} = \frac{1 \times ((x^3)^4 - 1)}{x^3 - 1} = \frac{x^{12} - 1}{x^3 - 1}$$

در نتیجه:

$$\frac{1 + x + x^2 + \dots + x^{11}}{1 + x^3 + x^6 + x^9} = \frac{\frac{x^{12} - 1}{x - 1}}{\frac{x^{12} - 1}{x^3 - 1}} = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

$$= \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)} = 2 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

که در بین گزینه‌ها $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ وجود دارد.

دو دنباله زیر را در نظر بگیرید:

$$a : 1, -x, x^2, -x^3, \dots, -x^9$$

$\times(-x) \quad \times(-x) \quad \times(-x)$

$$b : 1, x, x^2, x^3, \dots, x^9$$

$\times x \quad \times x \quad \times x$

دنباله a یک دنباله هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت -x است، در نتیجه مجموع ۱۰ جمله اول آن برابر است با:

$$S_{10} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^9 = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1}$$

$$= \frac{1((-x)^{10} - 1)}{-x - 1} = \frac{1 - x^{10}}{x + 1}$$

دنباله b نیز یک دنباله هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت x است. در نتیجه مجموع ۱۰ جمله اول آن برابر است با:



۴۸- گزینه ۱ با توجه به شکل، مؤلفه x نقاط A_1 و A_7 با هم برابرند. همچنین مؤلفه x نقاط A_3 و A_4 نیز با هم برابرند و می‌توان در حالت کلی گفت مؤلفه x نقاط A_{2k-1} و A_{2k} با هم برابرند. مختصات مؤلفه x نقاط A_1 و A_7 برابر ۳ است. با توجه به آن که از نقطه A_1 به A_7 ۱ واحد حرکت کرده‌ایم، پس مؤلفه x نقاط A_3 و A_4 به اندازه $\frac{1}{3}$ واحد کم‌تر از مؤلفه x نقاط A_1 و A_7 است. به همین ترتیب مؤلفه x نقاط A_5 و A_6 به اندازه $\frac{1}{5}$ واحد بیشتر از مؤلفه x نقاط A_3 و A_4 است. در نتیجه داریم:

$$x_{A_1} = x_{A_7} = 3$$

$$x_{A_3} = x_{A_4} = 3 - \frac{1}{3}$$

$$x_{A_5} = x_{A_6} = 3 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$$

$$x_{A_7} = x_{A_8} = 3 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$$

پس مختصات طول نقطه A_8 از حاصل جمع جملات یک دنباله هندسی با قدرنسبت $-\frac{1}{9}$ و جمله اول ۳ ایجاد می‌شود:

$$x_{A_8} = S_8 = \frac{3(1 - (-\frac{1}{9})^8)}{1 - (-\frac{1}{9})} = \frac{3(\frac{9^8 - 1}{9^8})}{\frac{10}{9}} = \frac{6560}{243} = \frac{2187}{9}$$

۴۹- گزینه ۱ راه اول: جملات دنباله با جمله عمومی a_n را

$$1, \frac{2}{3} + 3, \frac{2}{3}(\frac{2}{3} + 3) + 3, \dots$$

$$1, \frac{11}{3}, \frac{49}{9}, \dots$$

اگر از جملات دنباله فوق k واحد کم کنیم، دنباله جدید به صورت مقابل است:

$$1 - k, \frac{11}{3} - k, \frac{49}{9} - k, \dots$$

اگر جملات دنباله فوق تشکیل دنباله هندسی دهند، داریم:

$$a, b, c \Rightarrow ac = b^2 \Rightarrow (1-k)(\frac{49}{9} - k) = (\frac{11}{3} - k)^2$$

$$\Rightarrow k^2 - \frac{58}{9}k + \frac{49}{9} = k^2 - \frac{22}{3}k + \frac{121}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{22k}{3} - \frac{58}{9}k = \frac{121}{9} - \frac{49}{9} \Rightarrow \frac{1}{9}k = \frac{72}{9} \Rightarrow k = 9$$

شماره جمله اول هر دسته در دنباله اصلی از جمع تعداد اعضای دسته‌های قبل به علاوه یک به دست می‌آید. پس الگوی زیر را داریم:

$$2 = 1 + 1 = \text{شماره جمله اول دسته ۲}$$

$$4 = 1 + 2 + 1 = \text{شماره جمله اول دسته ۳}$$

$$7 = 1 + 2 + 3 + 1 = \text{شماره جمله اول دسته ۴}$$

:

$$\text{شماره جمله اول دسته ۸} = 1 + 2 + 3 + \dots + 7 + 1 = \frac{7(1+7)}{2} + 1 = 29$$

شماره اولین عضو دسته هشتم دنباله بیست و نهمین عضو از دنباله حسابی اصلی است. پس اولین عضو از دسته هشتم برابر 2^{29} است. چون تعداد اعضای این دسته برابر ۸ است، داریم:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{2^{29}(2^8 - 1)}{(2 - 1)} = 2^{29} \times 255$$

$$\frac{2^{29} \times 255}{2^{30}} = \frac{255}{2} = 127.5$$

در نتیجه:

۴۷- گزینه ۴ متحرک در مرحله اول ۵ متر به سمت راست، در مرحله دوم $\frac{5}{4}$ متر به سمت چپ، در مرحله سوم $\frac{5}{4}$ متر به سمت راست حرکت می‌کند و به حرکت خود ادامه می‌دهد. در واقع مقدار حرکت‌های او در جهت مثبت یا منفی محور x ها یک دنباله هندسی می‌سازد که براین‌داین حرکت‌ها مکان نهایی متحرک را مشخص می‌کند:

$$5 = \text{مختصات محل قرارگیری متحرک در مرحله ۱}$$

$$5 - \frac{5}{2} = \text{مختصات محل قرارگیری متحرک در مرحله ۲}$$

$$5 - \frac{5}{2} + \frac{5}{4} = \text{مختصات محل قرارگیری متحرک در مرحله ۳}$$

$$5 - \frac{5}{2} + \frac{5}{4} - \frac{5}{8} = \text{مختصات محل قرارگیری متحرک در مرحله ۴}$$

:

$$5 - \frac{5}{2} + \frac{5}{4} - \frac{5}{8} + \dots - \frac{5}{2^9}$$

پس مجموع بالا مختصات نهایی را مشخص می‌کند:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{5((-\frac{1}{2})^9 - 1)}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{170.5}{512}$$

چون حاصل هر جمله از این دنباله از حاصل جمع جملات یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۲ و جمله اول ۱ به دست می‌آید می‌توانیم هر

$$a_1 = \frac{2^1 - 1}{2 - 1} = 2^1 - 1$$

$$a_2 = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} = 2^2 - 1$$

$$a_3 = \frac{2^3 - 1}{2 - 1} = 2^3 - 1$$

⋮

$$a_n = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$= (2^1 + 2^2 + \dots + 2^n) - 1 = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - 1$$

$$= 2^{n+1} - 2 - 1 = 2^{n+1} - 3$$

تذکره اگر به هر جمله از دنباله با رابطه بازگشتی $a_{n+1} = ta_n + k$ و

$a_1 = m$ ، عدد ثابتی اضافه کنیم، تبدیل به دنباله هندسی با قدرنسبت t خواهد شد.

۵۱- گزینه ۲ طول هر ضلع مثلث رنگی در هر مرحله به

ترتیب $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{3}$ طول ضلع مربع متناظر است. در نتیجه مساحت

هر مثلث $\frac{1}{9}$ کل مربعی است که اضلاع قائم مثلث بر روی اضلاع آن

مربع قرار دارد. همچنین چون در هر مرحله داخل هر مربع ۴ مثلث

و ۱ مربع قرار دارد مساحت کل مثلثها $\frac{4}{9}$ مساحت کل و در نتیجه

مساحت مربع محاط شده درون هر مربع در هر مرحله $\frac{5}{9}$ کل مربع

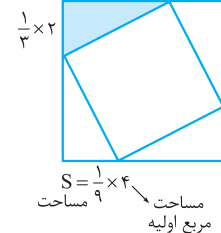
قبلی است. پس هر بار $\frac{1}{9}$ مربع داخلی رنگ می‌شود و در هر مرحله

مساحت مربع داخلی $\frac{5}{9}$ مربع قبلی است پس دنباله مساحت‌های

رنگی به صورت زیر است:

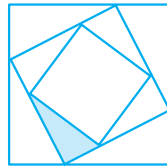
$$\frac{2}{3} \times 2$$

$$\frac{1}{3} \times 2$$



$$S = \frac{1}{2} \times 4$$

مساحت مربع اولیه



$$S = \frac{1}{9} \times \frac{5}{9} \times 4$$

مساحت مربع داخلی
مربع اصلی است.

$$\frac{1}{9} \times 4, \frac{1}{9} \times \frac{5}{9} \times 4, \left(\frac{1}{9} \times \frac{5}{9} \times 4\right) \times \frac{5}{9}, \dots$$

راه دوم: اگر دنباله با جمله عمومی c_n یک دنباله هندسی باشد،

داریم $\frac{c_{n+1}}{c_n} = q$ و در نتیجه $c_{n+1} = a_n q$. دنباله با جمله عمومی

$a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n + 3$ بسیار شبیه به یک دنباله هندسی است که اگر

از هر جمله آن عدد ثابتی کم کنیم تبدیل به یک دنباله هندسی با قدرنسبت $\frac{2}{3}$ خواهد شد. اگر دنباله جدید را b بنامیم و قدرنسبت

آن را $\frac{2}{3}$ فرض کنیم باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} b_n = a_n - k \\ b_{n+1} = \frac{2}{3} b_n = \frac{2}{3} (a_n - k) \end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم $b_{n+1} = a_{n+1} - k$ (زیرا از هر جمله k واحد کم

کرده‌ایم) پس داریم:

$$\begin{cases} b_{n+1} = \frac{2}{3} b_n = \frac{2}{3} (a_n - k) \\ b_{n+1} = a_{n+1} - k = \frac{2}{3} a_n + 3 - k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} (a_n - k) = \frac{2}{3} a_n + 3 - k$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} a_n - \frac{2}{3} k = \frac{2}{3} a_n + 3 - k \Rightarrow \frac{1}{3} k = 3 \Rightarrow k = 9$$

۵۰- گزینه ۴ راه اول: جملات این دنباله را به صورت زیر

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$a_3 = 2 \times 3 + 1 = 7 \Rightarrow 1, 3, 7, 15, \dots$$

$$a_4 = 2 \times 7 + 1 = 15$$

با اضافه کردن ۱ واحد به هر جمله دنباله فوق این دنباله به یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۲ تبدیل می‌شود:

$$b_n : 2, 4, 8, 16, \dots \quad \text{و} \quad q = 2$$

پس مجموع 10 جمله اول دنباله با جمله عمومی a_n ، 10 واحد کم‌تر از

مجموع 10 جمله اول دنباله هندسی است. پس ابتدا مجموع 10 جمله

اول دنباله هندسی را به کمک رابطه مجموع n جمله اول حساب می‌کنیم:

$$S_{10} = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2^{11} - 2$$

پس مجموع 10 جمله ابتدایی دنباله a به صورت زیر است:

$$S'_{10} = S_{10} - 10 = 2^{11} - 2 - 10 = 2^{11} - 12$$

راه دوم: هر جمله از دنباله a را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2 + 1$$

$$a_3 = 2(2 + 1) + 1 = 2^2 + 2 + 1$$

$$a_4 = 2(2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1$$

⋮

$$a_{10} = 2(2^8 + 2^7 + \dots + 2) + 1 = 2^9 + 2^8 + \dots + 2 + 1$$

**گزینه ۲** - ۵۴

اگر فرض کنیم $S = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + 10x^9$ ، داریم:

$$\begin{cases} xS = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + 9x^9 + 10x^{10} \\ S = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + 10x^9 \end{cases}$$

$$S - xS = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^9 - 10x^{10}$$

$$S(1-x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^9 - 10x^{10}$$

از طرفی دنباله $1, x, x^2, \dots, x^9$ یک دنباله هندسی با قدرنسبت x است، پس:

$$S_9 = 1 + x + x^2 + \dots + x^9 = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{x^{10} - 1}{x - 1}$$

$$\Rightarrow S(1-x) = \frac{x^{10} - 1}{x - 1} - 10x^{10}$$

$$\xrightarrow{x=2} -S = 2^{10} - 1 - 10 \times 2^{10}$$

$$\Rightarrow S = 10 \times 2^{10} - 2^{10} + 1 = 9 \times 2^{10} + 1$$

گزینه ۱ - ۵۵

اگر $a_n = 2 \times 3^{n-1}$ باشد، جمله اول برابر $a_1 = 2$ است. این دنباله یک دنباله هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{3}$ است.

پس مجموع تمام جملات آن از رابطه $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$ به دست می‌آید:

$$a_1 = 2, a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{2}{9}, \dots$$

$$S_\infty = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$

گزینه ۱ - ۵۶

جملات a_3, a_6, a_9, \dots خود تشکیل یک

دنباله هندسی با قدرنسبت $q^3 = \frac{1}{8}$ می‌دهند:

$$b_n: a_3, a_6, a_9, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{8}, \frac{1}{64}, \frac{1}{512}, \dots$$

مجموع جملات دنباله a_n و b_n را طبق رابطه حد مجموع به دست می‌آوریم:

$$S_{a_n} = \frac{a_1}{1-q_1} = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8}} = 1$$

$$S_{b_n} = \frac{b_1}{1-q'} = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8}} = 1$$

در نتیجه مجموع جملات باقی‌مانده برابر است با:

$$S_{a_n} - S_{b_n} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{4}{9}, \frac{4}{9} \times \left(\frac{5}{9}\right)^1, \frac{4}{9} \times \left(\frac{5}{9}\right)^2, \dots$$

در نتیجه دنباله حاصل تشکیل یک دنباله هندسی با جمله اول $\frac{4}{9}$ قدرنسبت $\frac{5}{9}$ می‌دهد. در نتیجه:

$$S_{10} = \frac{a_1(1-q^{10})}{1-q} = \frac{4}{9} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^{10}}{1 - \frac{5}{9}} = 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^{10}$$

گزینه ۲ - ۵۲

مجموع بقیه جملات یعنی مجموع تمام جملات به جز جمله a_1 و a_2 . پس دنباله جدید یک دنباله هندسی با جمله اول a_3 است:

$$a_1 + a_2 = 3 \times \frac{a_3}{1-q} \Rightarrow a_1 + a_2 q = \frac{3a_1 q^2}{1-q}$$

$$\xrightarrow{\div a_1} 1 + q = \frac{3q^2}{1-q} \Rightarrow 1 - q^2 = 3q^2$$

$$\Rightarrow q^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \pm \frac{1}{2}$$

گزینه ۲ - ۵۳

سعی می‌کنیم جمله عمومی دنباله زیر را به دست آوریم:

$$Y, Y^2, Y^3, \dots, \underbrace{Y^4 \dots Y^9}_{\text{۱۰ بار}}$$

$$Y = Y \times 1 = Y \times \frac{1^0 - 1}{9}$$

$$Y^2 = Y \times 11 = Y \times \frac{1^2 - 1}{9}$$

$$Y^3 = Y \times 111 = Y \times \frac{1^3 - 1}{9}$$

⋮

$$\underbrace{Y^4 \dots Y^9}_{\text{۱۰ بار}} = Y \times \underbrace{(111\dots1)}_{\text{۱۰ بار}} = Y \times \frac{1^{10} - 1}{9}$$

در نتیجه:

$$= \frac{Y}{9} \left[Y \left(\frac{1^0 - 1}{9} + \frac{1^2 - 1}{9} + \frac{1^3 - 1}{9} + \dots + \frac{1^9 - 1}{9} \right) \right]$$

$$= \frac{Y}{9} \left[\frac{Y}{9} (1^0 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^9 - 10) \right]$$

$$= \frac{Y \times Y}{9} [1^2 + 1^3 + \dots + 1^9]$$

حاصل جمع $1^2 + 1^3 + \dots + 1^9$ جمله ابتدایی یک دنباله هندسی با قدرنسبت 1^0 و جمله ابتدایی 1^2 است. در نتیجه حاصل عبارت بالا به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{9 \times Y}{9} [1^2 + 1^3 + \dots + 1^9] = \frac{9 \times Y}{9} \left[1^2 \left(\frac{1^9 - 1}{1^0 - 1} \right) \right]$$

$$= 70 (1^9 - 1)$$

۵۹- گزینه ۲ $a_n = \frac{2^n + 3^n}{4^n} = \left(\frac{2}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$

a_n از حاصل جمع دو دنباله هندسی با قدرنسبت ۵ به ترتیب $\frac{1}{2}$ و

$\frac{3}{4}$ تشکیل شده است: $b_n = \left(\frac{2}{4}\right)^n \Rightarrow b_n: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

$c_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \Rightarrow c_n: \frac{3}{4}, \frac{9}{16}, \frac{27}{64}, \dots$

قدرنسبت جملات ردیف فرد b_n برابر $\frac{1}{4}$ و c_n برابر $\frac{9}{16}$ است (توان دوم قدرنسبت دنباله اصلی). پس:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{27}{64} + \dots = \frac{c_1}{1-q} = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{16}} = \frac{12}{7}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{12}{7} = \frac{14 + 36}{21} = \frac{50}{21}$$

۶۰- گزینه ۱ $a_n: \frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \frac{4}{2^4}, \dots$

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots \\ 2S = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \dots \end{cases}$$

$$2S - S = 1 + \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2^2} - \frac{2}{2^2}\right) + \left(\frac{4}{2^3} - \frac{3}{2^3}\right) + \dots$$

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \Rightarrow S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

۵۷- گزینه ۲ شعاع هر دایره بزرگتر برابر نصف طول قطر

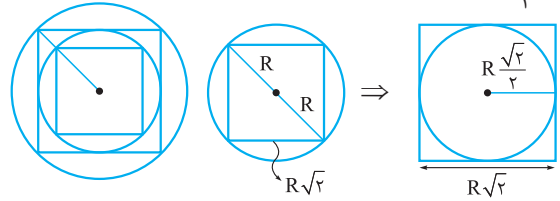
مربع محاط شده درون آن است. طول ضلع هر مربع نیز برابر قطر

هر دایره محاط شده درون آن است. پس اگر شعاع دایره اول R

باشد، طول قطر مربع درون آن $2R$ و در نتیجه طول ضلع مربع

$$\sqrt{2}R \times \frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}R \text{ است.}$$



در نتیجه دنباله مساحتها به صورت زیر است:

$$\pi R^2, \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2, \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2, \dots$$

$$\pi R^2, \frac{\pi R^2}{2}, \frac{\pi R^2}{4}, \dots$$

پس دنباله مساحت یک دنباله هندسی با جمله اول πR^2 و

قدرنسبت $\frac{1}{2}$ است. در نتیجه حد مجموع مساحتها برابر است با:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\pi R^2}{1-\frac{1}{2}} = 2\pi R^2$$

۵۸- گزینه ۳

$$a_n = \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \left(\frac{2}{6}\right)^n + \left(\frac{3}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

دنباله a_n از حاصل جمع دو دنباله هندسی با قدرنسبت‌های بین

صفر و ۱ تشکیل شده است. اگر $c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ و $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ باشند،

می‌توان حد مجموع b_n و c_n را محاسبه و با هم جمع کنیم تا

مجموع جملات دنباله a_n را به دست آوریم.

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{1}{2} \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow S_b = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

$$c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{3} \\ q = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow S_c = \frac{c_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$S = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$